

SCHAUM'S  
ouTlines

全美经典 学习指导系列

# 电路

[美] J. 埃德明斯特 M. 奈维 著

韩光胜 许怡生 译

涵盖全部课程基础

364道精选习题及其详解

334道补充习题及其答案

迅速提高解题能力

自学的最佳参考书



科学出版社



麦格劳-希尔教育出版集团

全球销量  
超越 的

SCHAUM'S  
ouTlines

# “全美经典学习指导系列” 是您的最佳 学习伴侣!



10年来最畅销的教辅系列

全美著名高校资深教授倾力之作

国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译

省时高效的学习辅导, 全面详细的习题解答

迄今为止国内最全面的教辅系列

覆盖大学理工科专业

## 全美经典 学习指导系列

概率论统计	2000工程力学习题精解	电气工程基础
会计学	工程力学	工程电磁场基础
离散数学	3000物理习题精解	数字信号处理
Mathematica使用指南	流体力学	数字系统导论
数理逻辑与证明	物理学基础	数字原理
机械振动	材料力学	电机与机电学
微分方程	2000离散数学习题精解	基本电路分析
统计学原理(上)	工程热力学	信号与系统
统计学原理(下)	数值分析	微生物学
力学学	量子力学	生物化学
热力学与材料力学	有机化学习题精解	生物学
有限元分析	3000化学习题精解	分子和细胞生物学
生态学	大学化学学习题精解	人体解剖与生理学
近代地理学	电路	

<http://www.schaums.com>

<http://www.mheducation.com>

ISBN 7-03-009727-0



9 787030 097279 >

Mc  
Graw  
Hill

ISBN 7-03-009727-0 TN · 348

定价: 35.00 元

全美经典学习指导系列

# 电 路

[美]J. 埃德明斯特 M. 奈维 著

韩光胜 许怡生 译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

## 内 容 简 介

本书重点介绍电路的基本定律、定理及电路的原理与解题技巧,并对以前版本的原有内容进行了修改与适时更新。每章首先介绍相关的定义、原理以及典型例题,然后配有问题解答和补充习题,习题涵盖了各种难易程度的重点问题,可以帮助学生更好地掌握电路的基本原理。

本书可作为工程与技术专业电路分析课程的教材或补充教材,也可供电气工程专业或其他专业学生参考。

**Joseph Edminster, Mahmood Nahvi: Schaums Outlines Electric Circuits, Third Edition**

**ISBN: 0-07-018999-4**

Copyright © 1997 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill, Companies, Inc.

All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔国际公司合作出版,未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售。

**图字: 01-2001-1770**

### 图书在版编目(CIP)数据

电路/[美]埃德明斯特(Edminster, J.)著;韩光胜等译.-北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009727-0

I. 电… II. ①埃… ②韩… III. 电路 IV. TN710

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 057062 号

**科学出版社 出版**

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

**源海印刷厂 印刷**

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002 年 1 月第 1 版 开本: A4 (890×1240)

2002 年 1 月第一次印刷 印张: 23

印数: 1—5 000 字数: 657 000

**定价: 35.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

## 前 言

本书可作为电气工程专业和其他工程与技术专业电路分析课程的教材或补充教材. 本书重点介绍电路的基本定律、定理及电路的解题技巧, 这对于大多数课程都是通用的.

作为本书的第三版, 我们对原有内容进行了修订和适时更新. 全书共分 17 章, 书中引入了现有理论和研究成果. 每章开始部分为相关的定义、原理、定理以及典型例题. 接下来是问题的解答和补充习题. 习题难易程度不同, 一些习题着重涉及某些关键问题, 这将帮助学生更好地应用基本原理. 本书补充习题较多, 每道习题后面均给出了答案, 这可以使读者有机会训练自己的解题技巧.

本书第一部分为基本定义, 包括有受控源在内的电路元件, 电路定律、定理以及电路的分析方法, 如节点电压法、网孔电流法等. 这些定理和解题方法首先用于直流电阻电路, 然后引入阻抗和复频率, 最后推广至  $RLC$  电路. 第 5 章放大器和运算放大电路是新增的内容. 运算放大器的例题和习题是为了说明简单实用的概念而精心筛选出来的, 这些内容在学生的后续课程中是重要的, 并且是令人感兴趣的. 为了提高学生关于常用信号模型的知识, 本书新增加了波形与信号一章即第 6 章.

第 7 章主要讨论一阶电路响应, 如稳态响应, 以及对阶跃函数、脉冲函数、冲激函数和指数函数输入的暂态响应. 第 8 章讨论高阶电路, 介绍了复频率的概念. 以后几章覆盖了相量分析、正弦稳态分析、功率、功率因数和多相电路, 以及网络函数、频率响应、滤波器、串并联谐振、二端口网络、互感器和变压器等内容. 第 15 章介绍了 Spice 和 PSpice 在电路分析中的应用. 电路方程采用经典微分方程和拉普拉斯变换进行求解, 以便于比较. 第 17 章的内容主要是傅里叶级数和傅里叶变换以及它们在电路分析中的应用. 最后两个附录概略地给出了复数系统、矩阵和行列式的有关知识.

本书是为广大学生编写的, 从他们身上我们将探索如何把课程教得更好. 在很大程度上, 正是这些学生使得教育工作更加令人满意和富有意义. 在此, 我们向 McGraw-Hill 和 MathSoft 公司表示感谢, 尤其感谢 John Carico 和 David Leschinsky, 他们富有前瞻性地出版了本书的电子版, 它是基于 Mathcad 这一先进的计算软件的交互式版式. 最后, 感谢我们的妻子 Nina Edminister 和 Zahra Nahvi 长期以来的支持, 以及所有为之付出努力的人们.

J. 埃德明斯特  
M. 奈维

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 导论</b> .....	( 1 )
1.1 电量和国际单位制 .....	( 1 )
1.2 力、功和功率.....	( 2 )
1.3 电荷与电流 .....	( 2 )
1.4 电位 .....	( 3 )
1.5 电能和电功率 .....	( 3 )
1.6 常量与变量 .....	( 3 )
习题及解答.....	( 4 )
<b>第 2 章 电路基本概念</b> .....	( 6 )
2.1 无源元件与有源元件 .....	( 6 )
2.2 符号约定 .....	( 6 )
2.3 电压-电流关系 .....	( 7 )
2.4 电阻元件 .....	( 8 )
2.5 电感元件 .....	( 9 )
2.6 电容元件 .....	( 9 )
2.7 电路图 .....	( 10 )
习题及解答.....	( 11 )
<b>第 3 章 电路定律</b> .....	( 16 )
3.1 引言 .....	( 16 )
3.2 基尔霍夫电压定律 .....	( 16 )
3.3 基尔霍夫电流定律 .....	( 16 )
3.4 电路元件的串联连接 .....	( 16 )
3.5 电路元件的并联连接 .....	( 17 )
3.6 分压 .....	( 18 )
3.7 分流 .....	( 18 )
习题及解答.....	( 19 )
<b>第 4 章 电路的分析方法</b> .....	( 23 )
4.1 支路电流法 .....	( 23 )
4.2 网孔电流法 .....	( 23 )
4.3 矩阵和行列式 .....	( 24 )
4.4 节点电压法 .....	( 25 )
4.5 输入电阻 .....	( 26 )
4.6 转移电阻 .....	( 27 )
4.7 电路化简 .....	( 27 )
4.8 叠加原理 .....	( 28 )
4.9 戴维南与诺顿定理 .....	( 29 )
4.10 最大功率传输定理.....	( 31 )
习题及解答.....	( 31 )
<b>第 5 章 放大器和运算放大器电路</b> .....	( 42 )
5.1 放大器模型 .....	( 42 )
5.2 放大器电路的负反馈 .....	( 43 )
5.3 运算放大器 .....	( 44 )

5.4 含有理想运算放大器的电路分析 .....	( 46 )
5.5 反相电路 .....	( 47 )
5.6 求和电路 .....	( 47 )
5.7 同相电路 .....	( 48 )
5.8 电压跟随器 .....	( 49 )
5.9 差动与差动放大器 .....	( 50 )
5.10 含有多个运放的电路 .....	( 51 )
5.11 积分器与微分器电路 .....	( 52 )
5.12 模拟计算机 .....	( 55 )
5.13 低通滤波器 .....	( 56 )
5.14 比较器 .....	( 57 )
习题及解答 .....	( 58 )
<b>第 6 章 波形和信号</b> .....	( 73 )
6.1 引言 .....	( 73 )
6.2 周期函数 .....	( 73 )
6.3 正弦函数 .....	( 74 )
6.4 时移与相移 .....	( 76 )
6.5 周期信号的合成 .....	( 77 )
6.6 平均值和有效值 .....	( 78 )
6.7 非周期函数 .....	( 79 )
6.8 单位阶跃函数 .....	( 80 )
6.9 单位冲激函数 .....	( 81 )
6.10 指数函数 .....	( 82 )
6.11 带阻尼的正弦波 .....	( 84 )
6.12 随机信号 .....	( 85 )
习题及解答 .....	( 86 )
<b>第 7 章 一阶电路</b> .....	( 95 )
7.1 引言 .....	( 95 )
7.2 通过一个电阻使电容放电 .....	( 95 )
7.3 在电容器两端建立直流电压 .....	( 96 )
7.4 无电源的 $RL$ 电路 .....	( 97 )
7.5 在电感中建立一个直流电流 .....	( 98 )
7.6 再论指数函数 .....	( 99 )
7.7 复杂的一阶 $RL$ 电路和 $RC$ 电路 .....	( 100 )
7.8 电感和电容的直流稳态 .....	( 102 )
7.9 开关切换时间的暂态过程 .....	( 103 )
7.10 一阶电路的脉冲响应 .....	( 104 )
7.11 $RC$ 和 $RL$ 电路的冲激响应 .....	( 106 )
7.12 $RC$ 和 $RL$ 电路中的阶跃响应和冲激响应的总结 .....	( 106 )
7.13 $RC$ 和 $RL$ 电路对突然加上的指数函数激励的响应 .....	( 107 )
7.14 $RC$ 和 $RL$ 电路对突加正弦激励的响应 .....	( 108 )
7.15 一阶电路中强迫响应的总结 .....	( 109 )
习题及解答 .....	( 109 )
<b>第 8 章 高阶电路和复数频率</b> .....	( 120 )
8.1 引言 .....	( 120 )
8.2 串联 $RLC$ 电路 .....	( 120 )
8.3 并联 $RLC$ 电路 .....	( 122 )
8.4 二网孔电路 .....	( 124 )
8.5 复数频率 .....	( 125 )

8.6 在 $s$ 域中的一般化的阻抗( $R, L, C$ )	(126)
8.7 网络函数和零极点图	(127)
8.8 强迫响应	(129)
8.9 自然响应	(129)
8.10 幅值和频率的定标	(130)
习题及解答	(131)
<b>第9章 正弦稳态电路分析</b>	(141)
9.1 引言	(141)
9.2 元件响应	(141)
9.3 相量	(143)
9.4 阻抗和导纳	(144)
9.5 频率域中的分压和分流	(146)
9.6 网孔电流分析法	(146)
9.7 节点电压分析法	(148)
9.8 戴维南和诺顿定理	(149)
习题及解答	(149)
<b>第10章 交流功率</b>	(163)
10.1 时间域中的功率	(163)
10.2 正弦稳态功率	(164)
10.3 平均功率或有功功率	(165)
10.4 无功功率	(166)
10.5 $R, L$ 和 $C$ 的交流功率小结	(166)
10.6 电感和电容之间的能量交换	(168)
10.7 复功率, 视在功率和功率三角形	(168)
10.8 并联网络	(172)
10.9 功率因数的改善	(173)
10.10 最大功率传输	(174)
习题及解答	(175)
<b>第11章 多相电路</b>	(184)
11.1 引言	(184)
11.2 二相系统	(184)
11.3 三相系统	(185)
11.4 $Y$ 和 $\Delta$ 系统	(185)
11.5 相量电压	(186)
11.6 平衡的 $\Delta$ 连接负载	(187)
11.7 平衡的四线 $Y$ 连接负载	(188)
11.8 $Y$ 和 $\Delta$ 连接的等效	(188)
11.9 平衡三相负载的单线等效电路	(189)
11.10 非平衡 $\Delta$ 连接负载	(190)
11.11 非平衡 $Y$ 连接负载	(190)
11.12 三相功率	(192)
11.13 功率测量和两瓦特表法	(192)
习题及解答	(193)
<b>第12章 频率响应, 滤波器和谐振</b>	(202)
12.1 频率响应	(202)
12.2 高通和低通网络	(203)
12.3 半功率频率	(205)
12.4 一般化的二端口, 两元件网络	(205)
12.5 频率响应和网络函数	(206)



12.6	由零极点位置决定的频率响应	( 207 )
12.7	理想与实际滤波器	( 207 )
12.8	无源和有源滤波器	( 208 )
12.9	带通滤波器和谐振	( 209 )
12.10	自然频率和阻尼系数	( 210 )
12.11	RLC 串联电路, 串联谐振	( 210 )
12.12	品质因数	( 211 )
12.13	RLC 并联电路, 并联谐振	( 212 )
12.14	实际的 LC 并联电路	( 213 )
12.15	串并联转换	( 213 )
12.16	轨迹图	( 214 )
	习题及解答	( 216 )
<b>第 13 章</b>	<b>二端口网络</b>	( 228 )
13.1	端点和端口	( 228 )
13.2	Z 参数	( 228 )
13.3	互补网络的 T 等效电路	( 229 )
13.4	Y 参数	( 230 )
13.5	互补网络的 PI 等效电路	( 231 )
13.6	端点特性的应用	( 231 )
13.7	Z 参数与 Y 参数间的转换	( 232 )
13.8	h 参数	( 233 )
13.9	g 参数	( 233 )
13.10	传递参数	( 234 )
13.11	互联二端口网络	( 234 )
13.12	参数类型的选择	( 235 )
13.13	端点参数及转换的总结	( 236 )
	习题及解答	( 237 )
<b>第 14 章</b>	<b>互感和变压器</b>	( 247 )
14.1	互感	( 247 )
14.2	耦合系数	( 248 )
14.3	耦合线圈的分析	( 248 )
14.4	同名端规则	( 249 )
14.5	一对耦合线圈中的能量	( 250 )
14.6	传导耦合等效电路	( 251 )
14.7	线性变压器	( 251 )
14.8	理想变压器	( 253 )
14.9	自耦变压器	( 254 )
14.10	反射阻抗	( 255 )
	习题及解答	( 256 )
<b>第 15 章</b>	<b>使用 Spice 和 PSpice 进行电路分析</b>	( 268 )
15.1	Spice 和 PSpice	( 268 )
15.2	电路描述	( 268 )
15.3	一个 Spice 源文件的组成	( 269 )
15.4	数据语句和直流分析	( 269 )
15.5	直流分析中的控制和输出语句	( 272 )
15.6	戴维南等效电路	( 274 )
15.7	运算放大电路	( 275 )
15.8	交流稳态电路和频率响应	( 278 )
15.9	互感和变压器	( 279 )

15.10 使用可变参数的模型装置 .....	( 280 )
15.11 时间响应和暂态分析 .....	( 282 )
15.12 其他电源类型的说明 .....	( 283 )
15.13 总结 .....	( 286 )
习题及解答 .....	( 287 )
<b>第 16 章 拉普拉斯变换方法</b> .....	( 300 )
16.1 引言 .....	( 300 )
16.2 拉普拉斯变换 .....	( 300 )
16.3 可选择的拉普拉斯变换 .....	( 300 )
16.4 积分的收敛性 .....	( 302 )
16.5 初值和终值定理 .....	( 303 )
16.6 部分分式展开式 .....	( 303 )
16.7 $s$ 域中的电路 .....	( 304 )
习题及解答 .....	( 306 )
<b>第 17 章 波形分析的傅里叶方法</b> .....	( 316 )
17.1 引言 .....	( 316 )
17.2 傅里叶三角级数 .....	( 316 )
17.3 指数型傅里叶级数 .....	( 317 )
17.4 波形的对称性 .....	( 318 )
17.5 线谱 .....	( 320 )
17.6 波形综合 .....	( 321 )
17.7 有效值和功率 .....	( 321 )
17.8 电路分析中的应用 .....	( 322 )
17.9 非周期波形的傅里叶变换 .....	( 324 )
17.10 傅里叶变换的性质 .....	( 326 )
17.11 连续谱 .....	( 327 )
习题及解答 .....	( 328 )
<b>附录 A 复数系统</b> .....	( 341 )
A1 复数 .....	( 341 )
A2 复数平面 .....	( 341 )
A3 矢量算子 $j$ .....	( 341 )
A4 复数的其他表示形式 .....	( 341 )
A5 复数的和与差 .....	( 342 )
A6 复数乘法 .....	( 342 )
A7 复数除法 .....	( 342 )
A8 一个复数的共轭值 .....	( 342 )
<b>附录 B 矩阵和行列式</b> .....	( 344 )
B1 联立方程和特征矩阵 .....	( 344 )
B2 矩阵的类型 .....	( 344 )
B3 矩阵算术运算 .....	( 345 )
B4 一个方阵的行列式 .....	( 346 )
B5 方阵的特征值 .....	( 348 )
<b>附录 C 来自 Schaum 的电子教师指南的计算机屏幕举例</b> .....	( 349 )

# 第 1 章 导 论

## 1.1 电量和国际单位制

本书中采用国际单位(SI)制.表 1-1 中列出了四个基本量及其在国际单位制中的单位,另外还有三个基本量及其标准单位没有在该表中列出.这三个量分别为:温度,单位为开尔文(K);物质的量,单位是摩尔(mol);发光强度,单位是坎德拉(cd).

表 1-1

量	符号	(SI)单位	缩写
长度	$L, l$	米	m
质量	$M, m$	千克	kg
时间	$T, t$	秒	s
电流	$I, i$	安培	A

其他所有单位都可从这七个基本单位派生出来.表 1-2 列出了在电路分析中常用的物理量及其符号.

表 1-2

单位	符号	(SI)单位	缩写
电荷	$Q, q$	库仑	C
电位	$V, v$	伏特	V
电阻	$R$	欧姆	$\Omega$
电导	$G$	西门子	S
电感	$L$	亨利	H
电容	$C$	法拉	F
频率	$f$	赫兹	Hz
力	$F, f$	牛顿	N
能量、功	$W, w$	焦耳	J
功率	$P, p$	瓦特	W
磁通	$\Phi$	韦伯	Wb
磁通密度	$B$	特斯拉	T

另外两个辅助变量是平面角(在电路分析中又称为相角)和立体角,相应的国际单位分别为弧度(rad)和球面度(sr).

正弦函数经常用角度作为相角的单位.如: $\sin(\omega t + 30^\circ)$ .由于  $\omega t$  表示的是弧度,因此这是一个混合单位的例子.

应尽可能使用国际单位制的十进位倍数及约量.表 1-3 中列出的符号可作为前缀加在表 1-1 和表 1-2 单位符号的前面.如 mV 即为毫伏、 $10^{-3}$  伏,而 MW 为兆瓦、 $10^6$  瓦.

表 1-3

词头名称	因次	符号
皮	$10^{-12}$	p
纳	$10^{-9}$	n
微	$10^{-6}$	$\mu$
毫	$10^{-3}$	m
厘	$10^{-2}$	c
千	$10^3$	k
兆	$10^6$	M
吉	$10^9$	G
太	$10^{12}$	T

## 1.2 力、功和功率

以上派生出的单位满足与这些变量相关的数学表达式.从“力等于质量乘以加速度”可知,1 牛顿就是使 1 千克质量的物体以  $1 \text{ 米/秒}^2$  的加速度运动的力,即

$$1\text{N} = 1\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$$

力作用下通过一段距离时就产生功.1 焦耳等于 1 牛顿·米,即  $1\text{J} = 1\text{N}\cdot\text{m}$ .功和能量的单位相同.

功率是做功的速率或能量从一种形式转化为另一种形式的速率.功率的单位是瓦特(W),也就是每秒 1 焦耳(J/s).

**例 1.1** 一个质量为  $10 \text{ kg}$  的物体,以  $2.0 \text{ m/s}^2$  恒加速度作简单直线运动.(a)求作用力  $F$ ;  
(b)如果在  $t=0, x=0$  时,物体静止不动,求  $t=4 \text{ s}$  时的位置、动能和功率.

$$(a) \quad F = ma = (10 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}^2) = 20.0 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = 20.0 \text{ N}$$

$$(b) \quad \text{当 } t = 4 \text{ s}, x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s})^2 = 16.0 \text{ m}$$

$$\text{KE} = Fx = (20.0\text{N})(16.0\text{m}) = 3200\text{N}\cdot\text{m} = 3.2\text{kJ}$$

$$P = \text{KE}/t = 3.2\text{kJ}/4\text{s} = 0.8\text{kJ/s} = 0.8\text{kW}$$

## 1.3 电荷与电流

电流的单位安培(A)的定义为:在两根真空中相距  $1 \text{ m}$  且其截面忽略不计的无限长的平行导体中产生  $2.0 \times 10^{-7} \text{ N/m}$  大小力的恒定电流.而更有用的概念为电流是由运动的电荷产生,1 A 等于在  $1 \text{ s}$  内通过一定截面的电荷为  $1 \text{ C}$ .因此电流的时变函数形式为: $i(\text{A}) = dq/dt$  (C/s).电荷的单位库仑等价于安培·秒.

移动的电荷可以为正,也可负.如图 1-1(a)设定,液体或等离子体中的正离子向左运动,产生电流  $i$  的方向也指向左.当这些离子以  $1\text{C/s}$  的速率穿过截面  $S$  时,则产生的电流为  $1\text{A}$ .图 1-1(b)显示了自左向右运动的负离子也产生方向指向左的电流.

在电路分析中更重要的是金属导体中的电流,它由原子结构最外层电子的运动产生.例如对于铜金属来说,晶状结构中最外层的一个电子受原子核的约束力很小,可自由地从一个原子

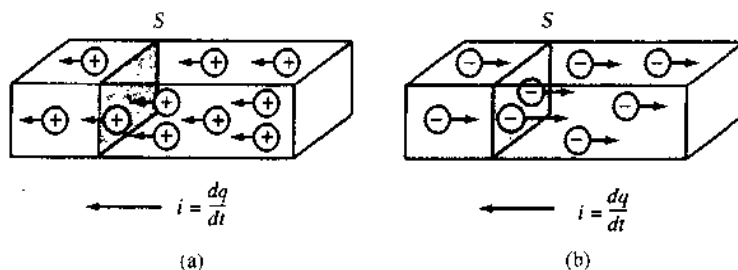


图 1-1

移动到另一个原子.在常温下这些电子持续、随机地运动.铜导体中电子的准确传导的情形为每立方米大约  $8.5 \times 10^{28}$  个传导电子自由移动.由于电子电荷为  $-e = -1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ , 因此要产生 1A 的电流大约需要每秒  $6.24 \times 10^{18}$  个电子穿过导体的一定截面.

**例 1.2** 一导体中通过 5 A 恒定电流,在 1 min 内有多少电子通过导体中某点?

$$5 \text{ A} = (5 \text{ C/s}) (60 \text{ s/min}) = 300 \text{ C/min}$$

$$\frac{300 \text{ C/min}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C/电子}} = 1.87 \times 10^{21} \text{ 电子/min}$$

#### 1.4 电位

当电荷在电场中受力的作用时,如果无其他力作用,将使含有该电荷的粒子加速运动.在此我们感兴趣的是使电荷朝与电场相反的方向运动所作的功,如图 1-2(a)所示.因此如果使 1 C 的电荷  $Q$  从位置 0 移动到位置 1 需要 1 J 的功,那么位置 1 相对于位置 0 具有 1 V 的电位;  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ . 电位是做功的能力,如同图 1-2(b)所示的质量为  $m$  的物体反抗重力  $g$  的作用而升高到距地面高度为  $h$  一样.势能  $mgh$  表明了释放物体时所能做的功.当物体自由下落时做加速运动,势能转换为动能.

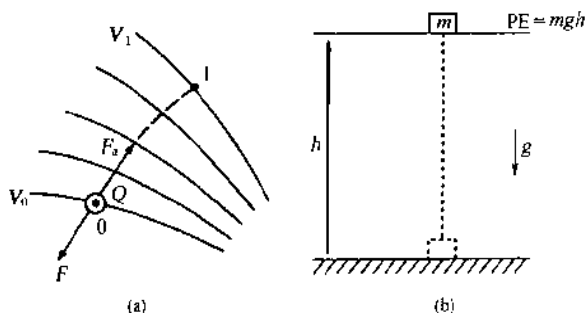


图 1-2

**例 1.3** 在电路中将  $0.5 \mu\text{C}$  的电荷从  $a$  点移动到  $b$  点需要  $9.25 \mu\text{J}$  的能量,那么两点之间的电位差是多少?

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} \quad V = \frac{9.25 \times 10^{-6} \text{ J}}{0.5 \times 10^{-6} \text{ C}} = 18.5 \text{ V}$$

#### 1.5 电能和电功率

电能的单位为焦耳(J),有关内容在后面学习电感和电容的章节中将会遇到,它们各自的电场、磁场都能储存能量.电能的转换速率是电功率,单位为瓦特(W),也即 J/s. 另外电功率还等于电压和电流的乘积:  $P = VI$ ;  $1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A}$ . 并且  $\text{V} \cdot \text{A} = (\text{J/C}) \cdot (\text{C/s}) = \text{J/s} = \text{W}$ . 进一步讲,功率是能量对时间的微分  $P = dW/dt$ , 因此瞬时功率  $P$  一般是时间的函数. 在后面章节中将进一步介绍当电压与电流是正弦函数时,功率在时间上的平均值  $P_{\text{avg}}$  及均方根值(RMS).

**例 1.4** 一电阻两端的电位差为 50.0 V,且每分钟有 120.0 C 的电荷通过某定点,在此条件下电能转换为热能的速率是多少?

$$(120.0 \text{ C/min}) / (60 \text{ s/min}) = 2.0 \text{ A} \quad P = (2.0 \text{ A})(50.0 \text{ V}) = 100.0 \text{ W}$$

因为  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ , 所以能量的转换速率为 100 J/s.

#### 1.6 常量与变量

为了区分常量和时变量,以大写字母表示常量,而以小写字母表示变量.例如,10 A 的恒定电流记为  $I = 10.0 \text{ A}$ , 而 10 A 的时变电流记为  $i = 10.0 f(t) \text{ A}$ . 电路分析中常用的函数例子有正弦函数  $i = 10.0 \sin \omega t \text{ (A)}$  和指数函数  $v = 15.0 e^{-\alpha t} \text{ (V)}$ .

## 习题及解答

- 1.1 某物体沿  $x$  方向运动, 有一以  $F = 12/x^2$  (N) 关系变动的力作用于其上. (a) 求  $F$  在  $1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$  距离中所做的功; (b) 多大的恒力在相同距离内做功相同?

解 (a)  $dW = Fdx$ , 所以  $W = \int_1^3 \frac{12}{x^2} dx = 12 \left[ \frac{-1}{x} \right]_1^3 = 8 \text{ J}$

(b)  $8 \text{ J} = F_c(2\text{m})$  或  $F_c = 4 \text{ N}$

- 1.2 在一电阻中通过的电荷为  $270 \text{ C/min}$ , 若电能以  $7.56 \text{ kJ/min}$  的速率转换为热能, 那么电阻两端的电位差是多少?

解 由  $P = VI$  可得

$$V = \frac{P}{I} = \frac{7.56 \times 10^3 \text{ J/min}}{270 \text{ C/min}} = 28 \text{ J/C} = 28 \text{ V}$$

- 1.3 已知某电路元件中流过电流为  $i = 2.5 \sin \omega t$  (mA), 其中  $\omega$  为角频率, 其单位为  $\text{rad/s}$ , 两端的电位差为  $v = 45 \sin \omega t$  (V). 求平均功率  $P_{\text{avg}}$  以及在该函数在一个周期内所转换的能量  $W_T$ .

解 能量是瞬时功率对时间的积分

$$W_T = \int_0^{2\pi/\omega} vi dt = 112.5 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{112.5\pi}{\omega} (\text{mJ})$$

平均功率为

$$P_{\text{avg}} = \frac{W_T}{2\pi/\omega} = 56.25 \text{ mW}$$

注意  $P_{\text{avg}}$  与  $\omega$  无关.

- 1.4 在用电部门, 能量的单位常使用的是千瓦时 (kWh). (a)  $1 \text{ kWh}$  是多少焦耳? (b) 一台功率为  $75 \text{ W}$  的彩色电视机从下午 7:00 看到晚上 11:30, 则总共消耗了多少能量? 试分别以千瓦时和兆焦耳表示.

解 (a)  $1 \text{ kWh} = (1000 \text{ J/s})(3600 \text{ s/h}) = 3.6 \text{ MJ}$

(b)  $(75.0 \text{ W})(4.5 \text{ h}) = 337.5 \text{ Wh} = 0.3375 \text{ kWh}$

$(0.3375 \text{ kWh})(3.6 \text{ MJ/kWh}) = 1.215 \text{ MJ}$

- 1.5 住宅常使用电线规格为  $12^\#$  的铜线, 如每个原子中有一个自由电子, 则每米约含有  $2.77 \times 10^{23}$  个自由电子. 如果导线中速过  $25.0 \text{ A}$  的直流, 这些电子将有百分之几能穿过定截面?

解 
$$\frac{25.0 \text{ C/s}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C/电子}} = 1.56 \times 10^{20} \text{ 电子/s}$$

$$(1.56 \times 10^{20} \text{ 电子/s})(60 \text{ s/min}) = 9.36 \times 10^{21} \text{ 电子/min}$$

$$\frac{9.36 \times 10^{21}}{2.77 \times 10^{23}}(100) = 3.38\%$$

- 1.6 如将  $100 \text{ W}$  的白炽灯接上  $120 \text{ V}$  直流电压, 在一小时内穿过某定点的电子数是多少?

解  $100 \text{ W} = (120 \text{ V}) \times I(\text{A}) \quad I = 5/6 \text{ A}$

$$\frac{(5/6 \text{ C/s})(3600 \text{ s/h})}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C/电子}} = 1.87 \times 10^{22} \text{ 电子/h}$$

- 1.7 典型的  $12 \text{ V}$  电池常以安培-小时 ( $\text{A} \cdot \text{h}$ ) 来标定其容量, 例如一节  $70 \text{ A} \cdot \text{h}$  的电池以  $3.5 \text{ A}$  的速度放电, 可使用 20 小时. (a) 如电压保持恒定, 计算上述电池完全放电后所释放的能量和功率. (b) 如放电速率为  $7.0 \text{ A}$ , 重复 (a).

解 (a)  $(3.5 \text{ A})(12 \text{ V}) = 42.0 \text{ W}$  (或者  $\text{J/s}$ )

$(42.0 \text{ J/s})(3600 \text{ s/h})(20 \text{ h}) = 3.02 \text{ MJ}$

(b)  $(7.0 \text{ A})(12 \text{ V}) = 84.0 \text{ W}$

$$(84.0\text{J/s})(3600\text{s/h})(10\text{h}) = 3.02\text{MJ}$$

安培-小时是用以衡量电池所储的能量的,因此对于整个放电过程来说,无论是在10个小时内完成或是在20个小时内完成,转换的能量都是一样的.而功率是能量转换的速率,因此10小时放电发出的功率是20小时的两倍.

### 补充习题

- 1.8 计算  $7.5 \times 10^{-4}\text{ N}$  的力在  $14\text{ s}$  内使物体移动  $2\text{ m}$  所做的功和发出的功率.  
答案:  $1.5\text{ mJ}$ ,  $0.107\text{ mW}$
- 1.9 在  $3.5\text{ s}$  内,将一个质量为  $5.0\text{ kg}$  的物体沿倾斜角为  $30^\circ$  的无摩擦斜面向上移动,其移动距离在水平线上的投影为  $2.0\text{ m}$ ,计算功和功率.  
答案:  $49.0\text{ J}$ ,  $14.0\text{ W}$
- 1.10 在电路中的两点间移动  $8.5 \times 10^{18}$  个电子消耗的功为  $136.0\text{ J}$ ,那么两点间的电位差是多少?  
答案:  $100\text{ V}$
- 1.11 测得一电脉冲为  $305\text{ V}$ ,  $0.15\text{ A}$ ,持续了  $500\text{ }\mu\text{s}$ .计算它的功率和能量.  
答案:  $45.75\text{ W}$ ,  $22.9\text{ mJ}$
- 1.12 常以马力(hp)表示电动机的功率,  $1\text{ hp}$  等于  $746\text{ W}$ .  $5\text{ hp}$  的电动机工作2小时将发出多少功率?功率以兆焦(MJ)来表示.  
答案:  $26.9\text{ MJ}$
- 1.13 已知当  $t \geq 0$  时,  $q = (4.0 \times 10^{-4})(1 - e^{-250t})\text{ (C)}$ ,计算  $t = 3\text{ ms}$  时的电流值.  
答案:  $47.2\text{ mA}$
- 1.14 某电路元件的电流与电压分别为:  $i = 10e^{-5000t}\text{ (A)}$ ,  $v = 50(1 - e^{-5000t})\text{ (V)}$ .求  $t \geq 0$  时刻以后所转换的总能量.  
答案:  $50\text{ mJ}$
- 1.15 电路元件的电容值定义为  $Q/V$ ,其中  $Q$  是储存在元件中的电荷量,  $V$  是元件两端的电位差.国际单位制中电容的单位是法拉(F).写出由基本单位表示的法拉.  
答案:  $1\text{ F} = 1\text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 / \text{kg} \cdot \text{m}^2$

## 第2章 电路基本概念

### 2.1 无源元件与有源元件

电器装置是由电路图或网络来描述的,它们是由串联或并联联接的两端元件组成.对电路图的能预示实际器件的性能.二端元件的一般形式如图 2-1 所示,它们是由长方形符号及连接在  $A, B$  端点上的两根理想导线表示的一个器件.有源元件是指能向电路网络提供能量的电压源或电流源.电阻、电感和电容是无源元件,它们吸收电源能量,并将这些能量转化为其他形式或将它储存在电场或磁场中.

图 2-2 列举了七种基本电路元件.元件(a)和(b)是电压源,(c)和(d)是电流源.图 2-2(a)的圆形表示的是独立电压源,它不受所连接电路变化的影响.受控电压源要随所连接电路中的条件按一定的方式变化,以图 2-2(b)所示的菱形表示.电流源也分为独立电流源和受控电流源,相应的符号分别示于(c)和(d).图 2-2(e),(f)和(g)所示为三种无源电路元件的符号.

图 2-1

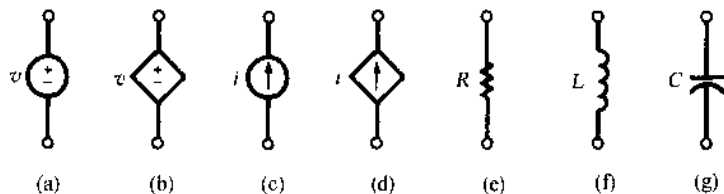


图 2-2

由于分布电阻、电感或电容常用在一个地方的某个元件来表示,所以此处表示的这些电路图称为集中参数电路.比如,由绝缘导线绕制的多匝线圈中在整个导线中都分布有电阻,但是电路图 2-3(b)或(c)中用一个集中在一个地方的电阻来表示在电路中的分布电阻,而电感也作同样的集中处理,在电路中用与电阻串联(图 b)或并联(图 c)表示.

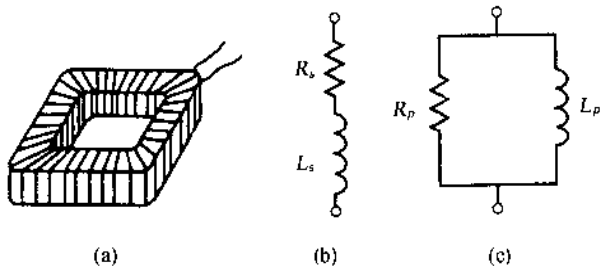


图 2-3

一般来说,线圈可以用电路元件的串联或并联形式表示.根据所加电压的频率需要用这两种形式之一表示器件.

### 2.2 符号约定

为完整地描述电压源,必须指出电压函数与极性.极性,用符号  $+$ ,  $-$  表示,置于电压源符号中导线的旁边.例如图 2-4(a),  $v = 10.0 \sin \omega t$ , 在正弦函数的第一个周期,当  $0 > \omega t > \pi$  时,端点  $A$  相对  $B$  为正,而当  $\pi > \omega t > 2\pi$  时,端点  $B$  相对  $A$  为正.与电压源类似,电流源用函数表示的同时还需要表明方向,见图 2-4(b).在图 2-4(c)所示的无源元件  $R, L$  和  $C$  中,电流流



入的一端设为正极性,而电流流出的一端为负极性端。

用图 2-5(a)的直流电路来说明功率的符号。电路由直流电压源  $V_A = 20.0\text{V}$ ,  $V_B = 5.0\text{V}$  和  $5\Omega$  电阻串联组成,电路中的电流为  $3.0\text{A}$  呈顺时针方向。就图 2-5(b)来说,当电流从正极性端点流入时,元件吸收功率。可用  $VI$  或  $I^2R$  来计算功率,这两部分功率被电压源  $V_B$  和电阻吸收,分别为  $45.0\text{W}$  和  $15\text{W}$ 。由于电流从  $V_A$  的负端流入,这一元件为电路提供功率,  $P = VI = 60.0\text{W}$  表明由电阻和电源  $V_B$  吸收的功率确实是由电源  $V_A$  提供的。

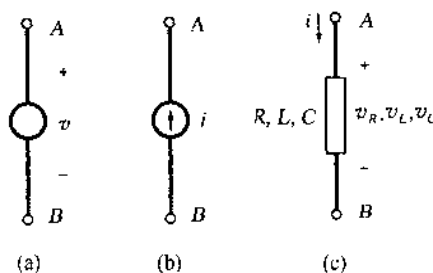


图 2-4

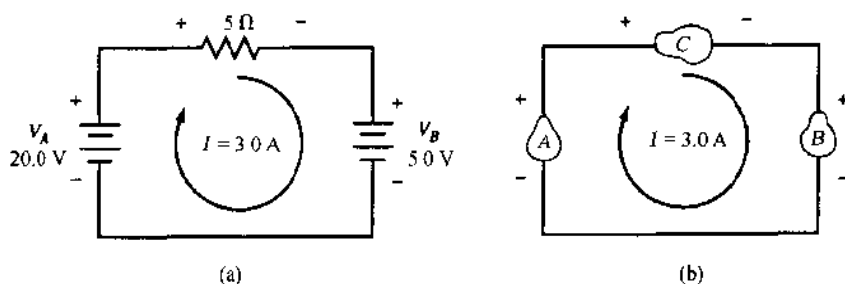


图 2-5

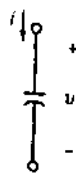
### 2.3 电压-电流关系

无源电路元件电阻  $R$ , 电感  $L$  和电容  $C$ , 是以各元件中电压和电流相关联的形式进行定义。例如, 若单个元件的电压  $v$  与电流  $i$  的关系为一常量, 则此元件为电阻,  $R$  为常比例系数, 且  $v = Ri$ 。类似地, 若电压是电流对时间的导数,  $v = L di/dt$ ,  $L$  为常比例系数, 则此元件为电感。最后, 若元件中的电流是电压对时间的导数,  $i = C dv/dt$ ,  $C$  为常比例系数, 则该元件为电容。表 2-1 归纳了这三种无源元件的电压-电流关系。注意电流的方向和相应电压的极性。

表 2-1

电路元件	单位	电压	电流	功率
 电阻	欧姆 ( $\Omega$ )	$v = Ri$ (欧姆定律)	$i = \frac{v}{R}$	$P = vi = i^2R$
 电感	亨利(H)	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt + k_1$	$p = vi = Li \frac{di}{dt}$

续表

电路元件	单位	电压	电流	功率
 电容	法拉(F)	$v = \frac{1}{C} \int i dt + k_2$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$p = vi = C v \frac{dv}{dt}$

## 2.4 电阻元件

所有消耗能量的设备在它的电路模型中必有电阻. 电感器和电容器可以储存能量, 并随后将能量返回给电源或其他元件. 电阻器中的功率可用公式  $p = vi = i^2 R = v^2 / R$  计算, 其值总为正, 如下面例 2-1 所示. 瞬时功率的积分就可确定能量.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt$$

**例 2.1** 一个  $4.0 \Omega$  电阻中通过电流  $i = 2.5 \sin \omega t$  (A). 求电压、功率和一个周期内吸收的能量.  $\omega = 500\pi$  (rad/s).

$$v = Ri = 10.0 \sin \omega t \text{ (V)}$$

$$P = vi = i^2 R = 25.0 \sin^2 \omega t \text{ (W)}$$

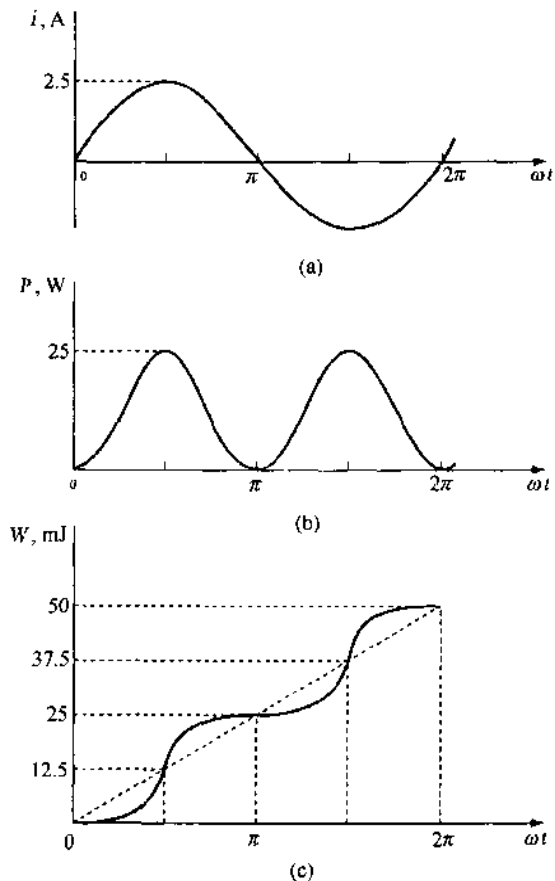


图 2-6

$$w = \int_0^t P dt = 25.0 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right] (\text{J})$$

图 2-6 所示的  $i, P$  与  $w$  的图形说明  $P$  总为正, 能量  $w$  虽为时间的函数, 却一直在增加. 这个能量为电阻所吸收.

## 2.5 电感元件

在磁场中存储能量的电路元件称为电感器(也称电感). 在时变电流的作用下, 一个周期的一段时间里储存能量, 而在其他时间又释放给电源. 当电感元件脱离电源时, 磁场将不存在. 即电感元件如不连接电源就不能储存能量. 在电动机、变压器及类似装置中, 有线圈的电路模型都有电感. 在频率很高时, 甚至对一组平行导体呈现出的电感也必须予以考虑. 电感的功率和能量的关系式如下所示.

$$p = vi = L \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} Li^2 \right]$$

$$w_L = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} L i di = \frac{1}{2} L [i_2^2 - i_1^2]$$

电感元件在磁场中的储能为  $w_L = \frac{1}{2} Li^2$ .

**例 2.2** 当  $0 < t < \left(\frac{\pi}{50}\right)$  s 时, 通过 30 mH 电感的电流为  $i = 10.0 \sin 50t$  (A). 求电感的电压、功率和能量.

$$v = L \frac{di}{dt} = 15.0 \cos 50t (\text{V}) \quad p = vi = 75.0 \sin 100t (\text{W})$$

$$w_L = \int_0^t p dt = 0.75(1 - \cos 100t) (\text{J})$$

如图 2-7 所示, 在  $t=0$  和  $t=(\pi/50)$  s 时, 能量为零. 因此这段时间中电感元件确实进行了能量转换, 前一段时间储存的能量过后又释放出来.

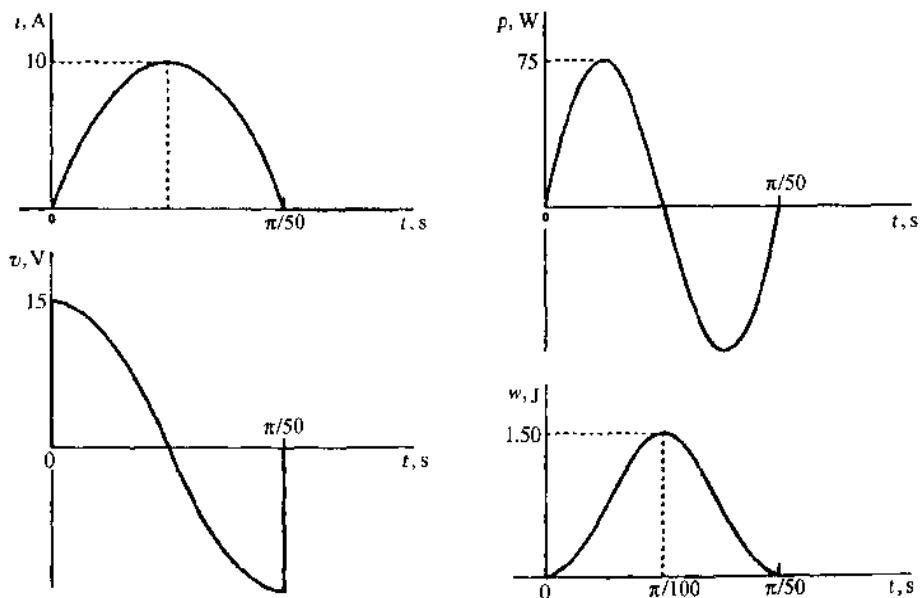


图 2-7

## 2.6 电容元件

在电场中储存能量的电路元件叫做电容器(也称作电容). 当电压在一个周期中变化时, 在周期的一段时间内会储存能量, 而在随后的时间内又将其释放出来. 当去掉电源时, 电感元件

由于磁场消失而不能保存能量,而去掉电源以后,电容元件仍能储存电荷也就能保持电场.电荷将一直保持,直到提供了放电回路,此时才会释放能量.电容器中的电荷,  $q = Cv$ , 在电介质中产生电场,这就是电容器储存能量的机理.在简单平行板电容器中,一个极板电荷过剩,而另一个极板电荷不足.正是在电容放电时,使两极板上的电荷趋向均衡.电容元件的功率与能量的关系如下所示.

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} Cv^2 \right]$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} C v dv = \frac{1}{2} C [v_2^2 - v_1^2]$$

电容元件在电场中的储能为  $w_C = \frac{1}{2} Cv^2$ .

**例 2.3** 当  $0 < t < 5\pi \text{ ms}$  时, 一个  $20\mu\text{F}$  的电容两端的电压为  $v = 50.0 \sin 200 t \text{ (V)}$ , 计算电荷量、功率和能量. 设在  $t = 0$  时  $w = 0$ , 画出  $w_C$  的波形.

$$q = Cv = 1000 \sin 200 t \text{ (}\mu\text{C)}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = 0.20 \cos 200 t \text{ (A)}$$

$$p = vi = 5.0 \sin 400 t \text{ (W)}$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p dt = 12.5 [1 - \cos 400 t] \text{ (mJ)}$$

在  $0 < t < 2.5\pi \text{ ms}$  间隔内, 电压与电荷分别从 0 增至  $50.0 \text{ V}$  和  $1000\mu\text{C}$ . 图 2-8 表明, 储存的能量可增至  $25 \text{ mJ}$ , 之后由于能量返回电源, 使能量最后减小为零.

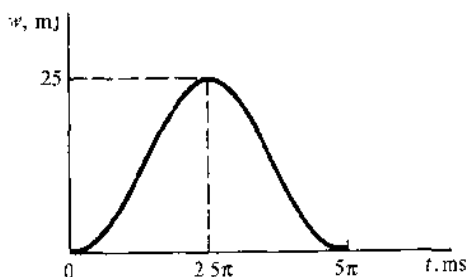


图 2-8

## 2.7 电路图

每一电路的电路图可以有多种形式, 它们看上去虽然各不相同, 但其实质都一样. 表示一个问题的电路图不一定就表示了求解问题的最佳形式. 因此, 解题前应首先研究电路图, 如有必要可重画一张电路图, 以更清楚地表明元件的连接关系. 图 2-9 可视为一个典型的例子, 其

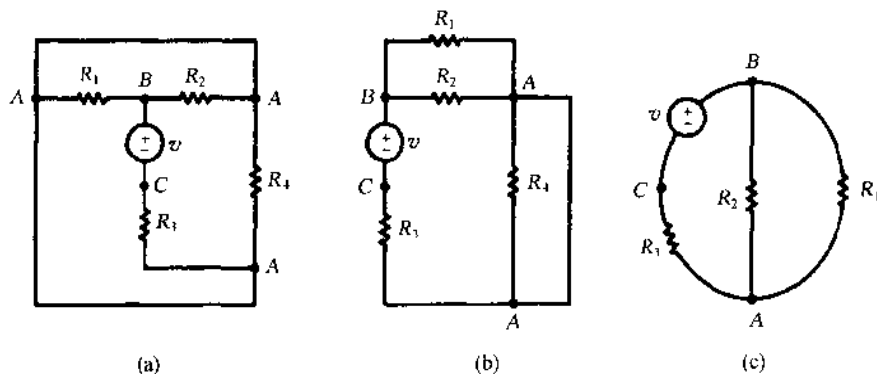


图 2-9

中三个电路实际上是相同的. 在图 2-9(a)中, 标为 A 的三个“连接点”在(b)中为两个点. 而在进行电路分析时, 电阻  $R_4$  由于被短路线旁路, 可去掉. 于是就在图 2-9(c)中画出单个连接点 A 为三条支路的交点.

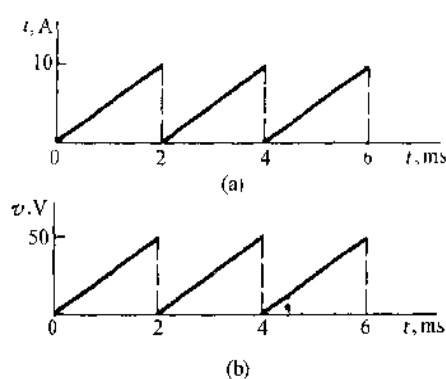
### 习题及解答

- 2.1 一个  $25.0\Omega$  的电阻两端电压为  $v = 150.0 \sin 377t$  (V), 求相应的电流  $i$  和功率  $p$ .

解

$$i = \frac{v}{R} = 6.0 \sin 377t \text{ (A)} \quad p = vi = 900.0 \sin^2 377t \text{ (W)}$$

- 2.2 流过  $5\Omega$  电阻的电流在 2ms 内由 0 线性增长到 10A, 在  $t = 2^+$  ms 时电流又变为 0, 并且在  $t = 4$  ms 时, 又线性增长到 10 A, 此形式每 2 ms 重复变化一次. 画出相应电压  $v$  的波形.



解 由于  $v = Ri$ , 最大电压为  $(5 \times 10) = 50$  V. 在图 2-10 中画出了  $i$  和  $v$  的波形. 显然, 这两个函数性质相同.

- 2.3 流经  $2.0$  mH 的电感元件的电流为  $i = 5.0 (1 - e^{-5000t})$  (A), 求其电压和最大的储能值.

解

图 2-10

$$v = L \frac{di}{dt} = 50.0 e^{-5000t} \text{ (V)}$$

在图 2-11 中画出了  $i$  与  $v$  的波形. 由于最大电流为 5.0 A, 则最大储能为

$$W_{\max} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 = 25.0 \text{ mJ}$$

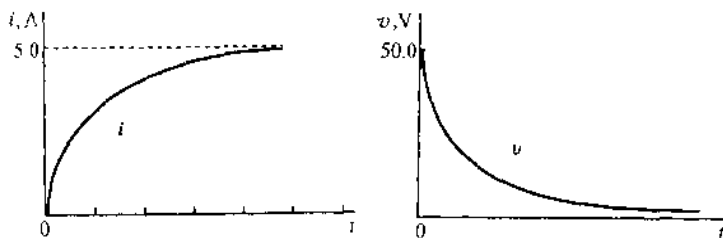


图 2-11

- 2.4  $3.0$  mH 电感元件的端电压为: 当  $0 < t < 2$  ms 时,  $v = 15.0$  V; 当  $2 < t < 4$  ms 时,  $v = -30.0$  V. 求电感电流, 并画出在给定时间段内  $v_L$  和  $i$  的波形.

解 当  $0 < t < 2$  ms 时

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v dt = \frac{1}{3 \times 10^{-3}} \int_0^t 15.0 dt = 5 \times 10^3 t \text{ (A)}$$

当  $t = 2$  ms 时

$$i = 10.0 \text{ A}$$

当  $2 < t < 4$  ms 时

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int_{2 \times 10^{-3}}^t v dt + 10.0 = 10.0 + \frac{1}{3 \times 10^{-3}} \int_{2 \times 10^{-3}}^t -30.0 dt \\ &= 10.0 + \frac{1}{3 \times 10^{-3}} [-30.0t + (60.0 \times 10^{-3})] \text{ (A)} \\ &= 30.0 - (10 \times 10^{-3}t) \text{ (A)} \end{aligned}$$

见图 2-12.

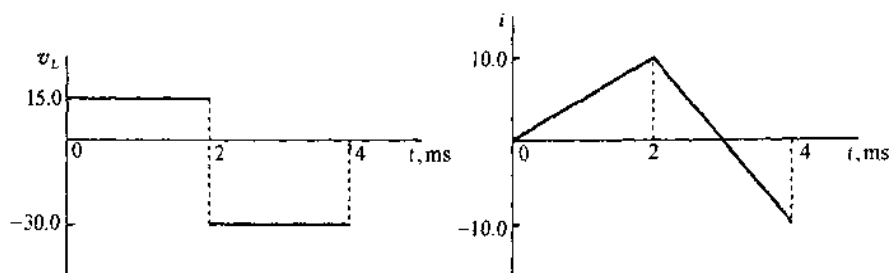


图 2-12

- 2.5 一个  $60.0 \mu\text{F}$  电容的电压为当  $0 > t > 2 \text{ ms}$  时,  $v = 25.0 \times 10^3 t (\text{V})$ , 画出  $i$ ,  $p$  和  $w$  在给定时间内的图形并求出  $W_{\max}$ .

解 当  $0 > t > 2 \text{ ms}$  时

$$i = C \frac{dv}{dt} = 60 \times 10^{-6} \frac{d}{dt}(25.0 \times 10^3) = 1.5 \text{ A}$$

$$p = vi = 37.5 \times 10^3 t (\text{W})$$

$$w_c = \int_0^t p dt = 1.875 \times 10^4 t^2 (\text{mJ})$$

见图 2-13.

$$W_{\max} = (1.875 \times 10^4)(2 \times 10^{-3})^2 = 75.0 \text{ mJ}$$

或

$$W_{\max} = \frac{1}{2} CV_{\max}^2 = \frac{1}{2} (60.0 \times 10^{-6})(50.0)^2 = 75.0 \text{ mJ}$$

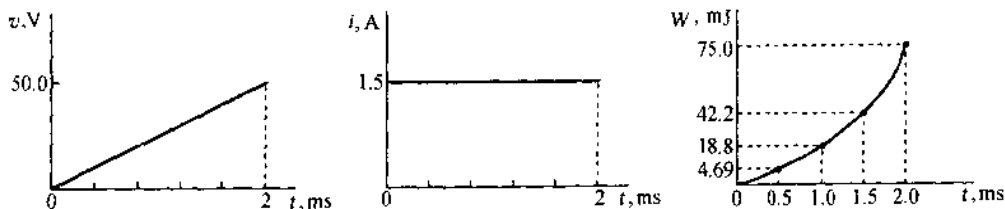


图 2-13

- 2.6 一个  $20.0 \mu\text{F}$  的电容在  $5.0 \text{ ms}$  内电荷从 0 线性地充至  $400 \mu\text{C}$ . 求其电压函数和  $W_{\max}$ .

解

$$q = \left( \frac{400 \times 10^{-6}}{5.0 \times 10^{-3}} \right) t = 8.0 \times 10^{-2} t (\text{C})$$

$$v = q/C = 4.0 \times 10^3 t (\text{V})$$

$$V_{\max} = (4.0 \times 10^3)(5.0 \times 10^{-3}) = 20.0 \text{ V} \quad W_{\max} = \frac{1}{2} CV_{\max}^2 = 4.0 \text{ mJ}$$

- 2.7 由  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 2 \text{ mH}$  和  $C = 500 \mu\text{F}$  组成的串联电路中在  $0 \leq t \leq 1 \text{ ms}$  时间内, 电流从 0 线性地增长至  $10 \text{ A}$ , 在  $1 \text{ ms} \leq t \leq 2 \text{ ms}$  时间内电流保持  $10 \text{ A}$  不变, 然后从  $t = 2 \text{ ms}$  的  $10 \text{ A}$  线性地减小, 在  $t = 3 \text{ ms}$  时减小到 0. 画出  $v_R$ ,  $v_L$  和  $v_C$  的图形.

解  $v_R$  与  $i$  相同, 都是时间的函数, 其最大值  $V_{\max} = 2(10) = 20 \text{ V}$ .

当  $0 < t < 1 \text{ ms}$  时

$$\frac{di}{dt} = 10 \times 10^3 \text{ A/s} \quad \text{和} \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 20 \text{ V}$$

当  $1 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$  时, 由于  $di/dt = 0$ , 于是  $v_L = 0$ .

设电容中初始电荷为 0,

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

当  $0 \leq t \leq 1$  ms 时

$$v_C = \frac{1}{5 \times 10^{-4}} \int_0^t 10^4 t dt = 10^7 t^2 (\text{V})$$

电压值在  $t = 1$  ms 时达到 10 V, 当  $1 \text{ ms} < t < 2$  ms 时

$$v_C = (20 \times 10^3)(t - 10^{-3}) + 10 (\text{V})$$

· 见图 2-14.

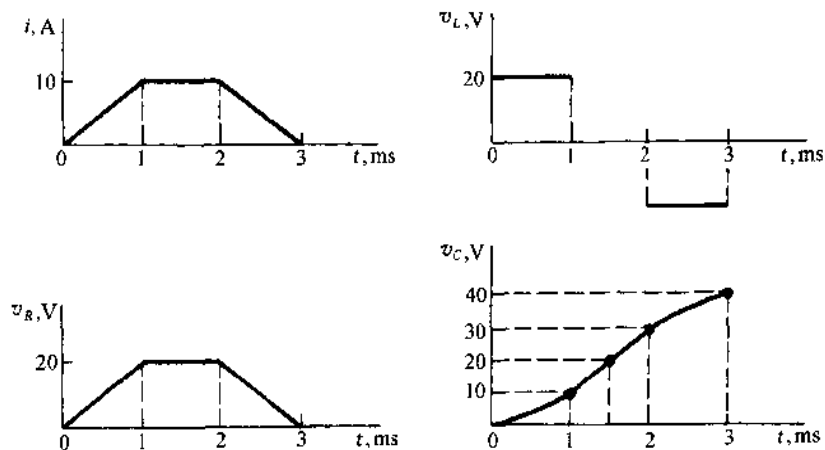


图 2-14

2.8 单个电路元件的电流和电压函数如图 2-15 所示, 确定这是何种元件.

解 因为  $v$  与  $i$  不成比例, 此元件不可能是电阻.  $v$  是  $i$  的导数, 当  $2 \text{ ms} < t < 4 \text{ ms}$  时,  $i$  不等于 0, 而  $v$  是常数(0), 因此元件不可能是电容. 又当  $0 < t < 2 \text{ ms}$  时,

$$\frac{di}{dt} = 5 \times 10^3 \text{ A/s} \quad \text{且} \quad v = 15 \text{ V}$$

因此

$$L = v / \frac{di}{dt} = 3 \text{ mH}$$

(可验证在  $4 \text{ ms} < t < 6 \text{ ms}$  时间段内,  $L$  值相同).

2.9 计算图 2-16 所示支路在下列情况时的电压  $v$ . (a)  $i_2 = 1 \text{ A}$ , (b)  $i_2 = -2 \text{ A}$ , (c)  $i_2 = 0 \text{ A}$ .

解 电压  $v$  是 10V 独立电压源与电流控制电

压源  $v_x$  的和. 注意与控制电流相乘的系数 15 的单位是  $\Omega$ .

$$(a) \quad v = 10 + v_x = 10 + 15(1) = 25 \text{ V}$$

$$(b) \quad v = 10 + v_x = 10 + 15(-2) = -20 \text{ V}$$

$$(c) \quad v = 10 + 15(0) = 10 \text{ V}$$

2.10 求图 2-17 所示一般化电路元件在下列情况中吸收的功率. (a)  $v = 50 \text{ V}$ , (b)  $v = -50 \text{ V}$ .

解 由于电流从负极性端流入元件, 则

$$(a) \quad p = -vi = -(50)(8.5) = -425 \text{ W}$$

$$(b) \quad p = -vi = -(-50)(8.5) = 425 \text{ W}$$

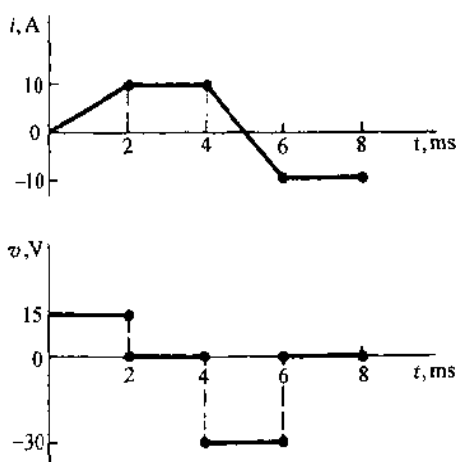


图 2-15

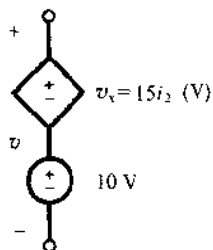


图 2-16

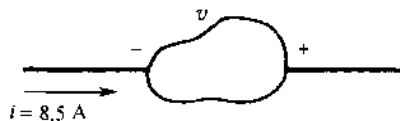


图 2-17

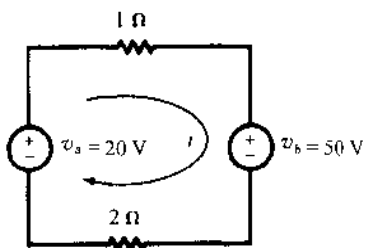


图 2-18

2.11 求图 2-18 电路中电源发出的功率.

解

$$i = \frac{20 - 50}{3} = -10 \text{ A}$$

电源吸收的功率为

$$p_a = -v_a i = -(20)(-10) = 200 \text{ W}$$

$$p_b = v_b i = (50)(-10) = -500 \text{ W}$$

因为发出功率等于吸收负的功率,所以电源  $v_b$  发出功率为 500 W,而  $v_a$  吸收功率为 200 W,两个电阻消耗功率为 300 W.

2.12 一个  $25.0\Omega$  电阻两端的电压为  $v = 150.0 \sin 377 t$  (V),求功率  $p$  和一个周期内的平均功率  $P_{avg}$ .

解

$$i = v/R = 6.0 \sin 377 t \text{ (A)}$$

$$p = vi = 900.0 \sin^2 377 t \text{ (W)}$$

电压和电流函数的一个周期的终点在  $377t = 2\pi$  处.由于平均功率为半个周期上的积分,半个周期的终点在  $377t = \pi$  处,于是

$$P_{avg} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 900.0 \sin^2(377t) d(377t) = 450.0 \text{ (W)}$$

2.13 求图 2-19 中  $10.0\Omega$  电阻两端的电压.若受控源中的控制电流  $i_x$  分别为(a)2A 和(b)-1A.

解  $i = 4i_x - 4.0$ ;  $v_R = iR = 40.0i_x - 40.0$  (V)

$$i_x = 2 \text{ A}; \quad v_R = 40.0 \text{ V}$$

$$i_x = -1 \text{ A}; \quad v_R = -80.0 \text{ V}$$

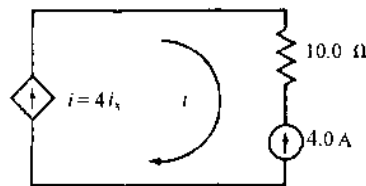


图 2-19

### 补充习题

2.14 一个电阻两端电压为  $V = 1.5 \text{ mV}$ .若吸收的功率分别为(a)27.75 nW 和(b)1.20  $\mu\text{W}$ ,求电流的大小  
答案:18.5  $\mu\text{A}$ , 0.8 mA

2.15 阻值为  $5.0\Omega$  的电阻在  $0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$  内通过电流为  $i = 5.0 \times 10^3 t$  (A).求瞬时功率和平均功率.  
答案:125.0  $t^2$  (W), 167.0 (W)

2.16 已知电流从某一般化电路元件正端流入,元件两端电压为 3.91 V.若吸收的功率为 -25.0 mW,求电流值.  
答案: -6.4 mA

2.17 某电路元件在  $0 \leq t \leq 10^3 t \leq \pi$  时间段的电流和电压值分别为:  $i = 2.0 \sin 10^3 t$  (mA),  $v = 5.0 \cos 10^3 t$  (mV),确定该元件.



答案:2.5 mH的电感器

- 2.18 已知4.0 mH电感两端的电压为:  $v = 2.0e^{-10^3 t}$  (V), 在  $t = 0$  时, 电流为0.求最大储能.

答案:0.5 mW

- 2.19  $2.0 \mu\text{F}$  的电容, 初始电荷为  $Q_0$ , 经开关与  $10.0 \Omega$  电阻串联. 若电阻上消耗的功率为3.6 mJ, 求  $Q_0$ .

答案:120.0  $\mu\text{C}$

- 2.20 如果电容量为  $C$  法拉的电容器中的电流  $i = (V_m/R)e^{-t(R/C)}$  (A), 设初始电荷为0, 证明最大储能为  $\frac{1}{2}CV_m^2$ . 假设初始电荷为零.

- 2.21  $t \geq 0$  时, 单个元件的电流如图2-20所示. 若设元件分别为: (a)  $10 \text{ k}\Omega$ ; (b)  $15 \text{ mH}$ ; (c)  $0.3 \mu\text{F}$ , 且  $Q(0) = 0$ . 求  $t = 6.5 \mu\text{s}$  时元件两端电压.

答案: (a) 25V; (b) -75V; (c) 81.3V



图 2-20

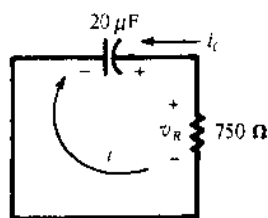


图 2-21

- 2.22 图2-21所示电路中, 当  $t > 0$  时,  $20.0 \mu\text{F}$  电容的电压为  $v = 100.0e^{-t/0.015}$  (V). 求电容放电时的能量函数, 并将总能量与  $750 \Omega$  电阻器吸收的能量进行比较.

答案:  $0.10(1 - e^{-t/0.0075})$  (J)

- 2.23 若图2-22中受控电压源的控制电压  $v_2$  分别为以下值: (a) 4V; (b) 5V; (c) 10V. 求电路中的电流  $i$ .

答案: (a) 1 A; (b) 0 A; (c) 5 A

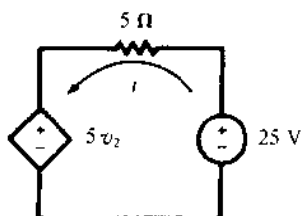


图 2-22

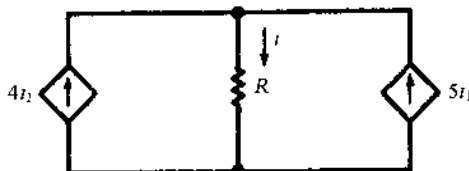


图 2-23

- 2.24 在下列情况下, 求图2-23电路中的电流  $i$ . (a)  $i_1 = 2 \text{ A}$ ,  $i_2 = 0$ ; (b)  $i_1 = -1 \text{ A}$ ,  $i_2 = 4 \text{ A}$ ; (c)  $i_1 = i_2 = 1 \text{ A}$ .

答案: (a) 10 A; (b) 11 A; (c) 9 A

## 第3章 电路定律

### 3.1 引言

电路或网络是由在第二章中介绍的许多典型电路元件互相联接而组成的. 电路中一般至少包含一个电压源或电流源, 元件的连接关系会在电压和电流之间形成一些新的约束. 这些新的约束及其相应方程, 加上单个元件的电压电流关系提供了电路的求解方法.

对特定元件进行定义, 元件在网络中的连接方式, 及求解方程的基本目的, 都是为了分析电气装置的性能, 如: 电动机、发电机、变压器、传感器和许多电子装置. 这些结论一般解答了电气装置在所施加电源作用下运行时的一些关键性问题.

### 3.2 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律说明: 任何一个闭合路径中, 各支路电压的代数和为零. 其中一些电压

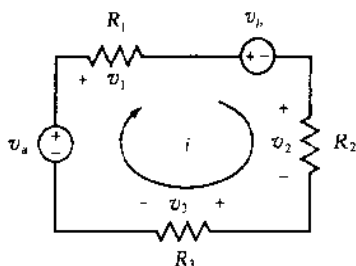


图 3-1

是电源电压, 而另一些电压是由无源元件上的电流产生, 有时把这种电压称为电压降. 这个定律同样适用于由直流电源 DC 驱动的电, 可变电源  $v(t)$  和  $i(t)$  驱动的电, 以及将要在第九章介绍的那些电源驱动的电. 4.2 节介绍的网孔电流分析法就是基于基尔霍夫电压定律.

**例 3.1** 写出图 3-1 所示电路的 KVL 方程.

对于图示电流方向, 由电路的左下角开始, 我们有

$$-v_a + v_1 + v_b + v_2 + v_3 = 0$$

$$-v_a + iR_1 + v_b + iR_2 + iR_3 = 0$$

$$v_a - v_b = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

### 3.3 基尔霍夫电流定律

两个或更多个电路元件联接的连接点称为节点, 两个元件的接点叫做简单节点, 没有电流分流. 三个或更多个元件的接点称为主节点, 这里会产生电流分流的情况. 基尔霍夫电流定律 (KCL) 指出一个节点上的电流的代数和为零; 也可以换一种说法: 流入节点电流之和与流出该节点的电流之和相等. 4.3 节介绍的电路分析中节点电压法就是根据基尔霍夫电流定律写出的主节点电流方程作为基础的. 基尔霍夫电流定律的基础是电荷守恒.

**例 3.2** 写出图 3-2 所示电路主节点 KCL 方程.

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

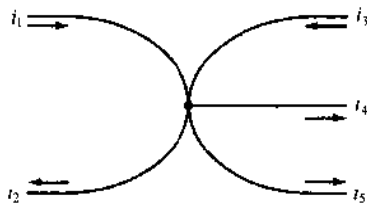


图 3-2

### 3.4 电路元件的串联连接

图 3-3 所示串联连接的三个无源电路元件上流过同一电流  $i$ , 元件两端的电压分别为  $v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$ , 总电压  $v$  是各个分电压之和:  $v = v_1 + v_2 + v_3$

如果这些元件是电阻时,

$$\begin{aligned} v &= iR_1 + iR_2 + iR_3 \\ &= i(R_1 + R_2 + R_3) \\ &= iR_{eq} \end{aligned}$$

这里用一个等效电阻  $R_{\text{eq}}$  替代了三个串联电阻, 其  $v$  与  $i$  之间也具有相同的关系。

对任意多个电阻串联的情况我们有:  $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$ 。

如果这三个元件是电感时,

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt} \\ &= L_{\text{eq}} \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

将这一关系扩展到有任意多个电感串联的情况, 我们有

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots$$

如果这三个电路元件是电容, 并且假设电容元件的初始电荷为零, 则积分常数也为零。

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt + \frac{1}{C_3} \int idt \\ &= \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int idt \\ &= \frac{1}{C_{\text{eq}}} \int idt \end{aligned}$$

几个电容串联的等效电容是  $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$

**例 3.3** 三个串联电阻的等效电阻是  $750.0 \Omega$ , 其中两个电阻分别是  $40.0 \Omega$  和  $410.0 \Omega$ , 第三个电阻的阻值是多少?

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$750.0 = 40.0 + 410.0 + R_3 \quad \text{则 } R_3 = 300.0 \Omega$$

**例 3.4** 两个串联连接的电容器,  $C_1 = 2.0 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10.0 \mu\text{F}$ , 求等效电容值, 如果  $C_2 = 10 \text{ pF}$ , 求等效电容。

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(2.0 \times 10^{-6})(10.0 \times 10^{-6})}{2.0 \times 10^{-6} + 10.0 \times 10^{-6}} = 1.67 \mu\text{F}$$

如果  $C_2 = 10.0 \text{ pF}$ ,

$$C_{\text{eq}} = \frac{(2.0 \times 10^{-6})(10.0 \times 10^{-12})}{2.0 \times 10^{-6} + 10.0 \times 10^{-12}} = \frac{2.0 \times 10^{-18}}{2.0 \times 10^{-6}} = 10.0 \text{ pF}$$

在分母中  $C_2 = 10.0 \text{ pF}$ , 对于  $C_1 + C_2$  的作用是微不足道的, 因此可以忽略。

注意: 当两个串联的电容器数值相差较大时, 等效电容的数值基本上与较小电容的数值相同。

### 3.5 电路元件的并联连接

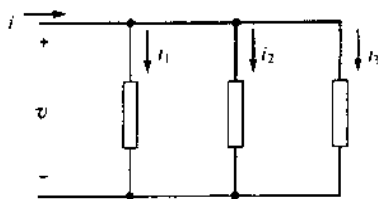


图 3-4

图 3-4 表示的是三个电阻并联的情况, KCL 描述为流入主节点的电流  $i$  等于离开这一节点的两个支路电流之和。

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

如果三个无源元件是电阻时,

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v = \frac{1}{R_{\text{eq}}} v$$

对于有几个电阻并联的情况:

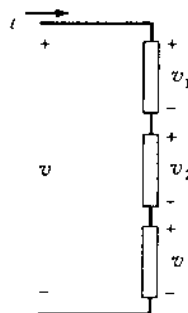


图 3-3

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$$

常见的情况是两个电阻并联,这种情况可以用专门方法说明:两个电阻并联的等效值是两电阻的乘积除以二者之和

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

**例 3.5** 求等效电阻 (a)两个  $60.0\Omega$  的电阻并联;(b)三个  $60.0\Omega$  的电阻并联.

$$(a) \quad R_{\text{eq}} = \frac{(60.0)^2}{120.0} = 30.0\Omega$$

$$(b) \quad \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{60.0} + \frac{1}{60.0} + \frac{1}{60.0} \quad R_{\text{eq}} = 20.0\Omega$$

注意:对于  $n$  个等值电阻并联的情况,其等效电阻为  $R/n$ .

多个电感并联,其表达式与电阻并联时的表达式类似: $\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots$ . 在两个电

$$\text{感并联时: } L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

**例 3.6** 两个电感并联,其中:  $L_1 = 3.0 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 6.0 \text{ mH}$ . 求等效电感  $L_{\text{eq}}$ .

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{3.0 \text{ mH}} + \frac{1}{6.0 \text{ mH}} \quad \text{即} \quad L_{\text{eq}} = 2.0 \text{ mH}$$

三个电容并联的情况

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv}{dt} = C_{\text{eq}} \frac{dv}{dt}$$

多个电容器并联关系与电阻串联的关系相同:  $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots$ .

### 3.6 分压

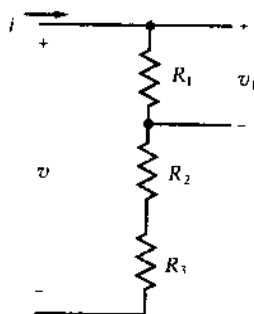


图 3-5

图 3-5 所示的一组串联电阻的电路称作电压分压器. 这一概念可以扩展应用到电阻串联以外的范围,如第九章介绍的阻抗串联的情况.

因为  $v_1 = iR_1$ , 并且  $v = i(R_1 + R_2 + R_3)$ , 所以

$$v_1 = v \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \right)$$

**例 3.7** 设计两个电阻器组成的分压器,其总电阻为  $50.0\Omega$ . 如果要求输出电压是输入电压的 10%,求电路中两个电阻器的数值.

$$\frac{v_1}{v} = 0.10 \quad 0.10 = \frac{R_1}{50.0 \times 10^3}$$

由此可得  $R_1 = 5.0\Omega$  及  $R_2 = 45.0\Omega$ .

### 3.7 分流

如图 3-6 所示,电阻的并联组成一个电流分配器. 其中支路电流  $i_1$  与总电流  $i$  之比可以说明电流分配器的运行情况.

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \quad \text{及} \quad i_1 = \frac{v}{R_1}$$

则

$$\frac{i_1}{i} = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

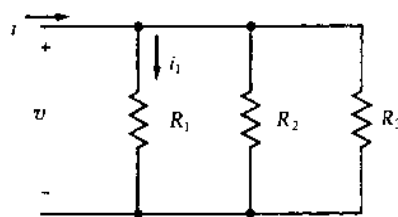


图 3-6

对于两条支路的电流分配器,我们有

$$\frac{i_1}{i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

这一关系可表示为:两支路的并联电路中,一条支路的电流与总电流之比等于另一支路的电阻与总电阻之比。

**例 3.8** 要将 30 mA 的电流由电阻网络分为 20 mA 和 10 mA 的两条支路电流,该网络的等效电阻大于等于 10  $\Omega$ ,求各支路电阻。

$$\frac{20 \text{ mA}}{30 \text{ mA}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \frac{10 \text{ mA}}{30 \text{ mA}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \geq 10.0 \Omega$$

对方程求解可知:  $R_1 \geq 15.0 \Omega$ ,  $R_2 \geq 30.0 \Omega$ 。

### 习题及解答

**3.1** 图 3-7 所示电路中电流  $I$  为 0.40 A,求电压  $V_3$  及其极性。

**解** 假定  $V_3$  与  $V_1$  的极性相同,应用 KCL 定律从图中左下角开始写出:

$$\begin{aligned} V_1 - I(5.0) - V_2 - I(20.0) + V_3 &= 0 \\ 50.0 - 2.0 - 10.0 - 8.0 + V_3 &= 0 \\ V_3 &= -30.0 \text{ V} \end{aligned}$$

$b$  点相对于  $a$  点的极性为正。

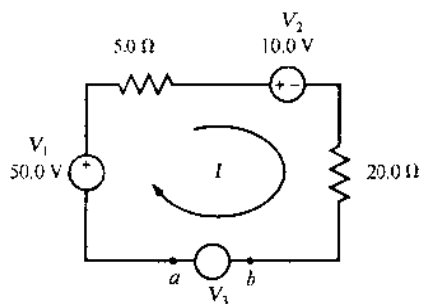


图 3-7

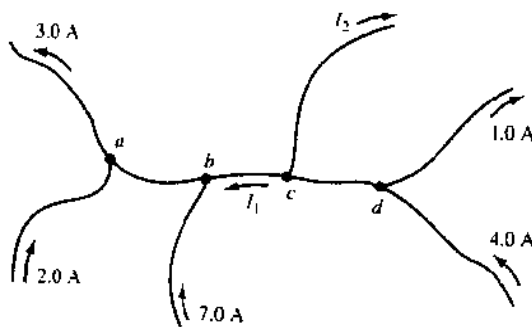


图 3-8

**3.2** 求 3-8 所示网络中的电流  $I_1$  和  $I_2$ 。

**解**  $a$  和  $b$  构成一个节点,应用 KCL 可写出

$$2.0 + 7.0 + I_1 = 3.0 \quad \text{或} \quad I_1 = -6.0 \text{ A}$$

同理,  $c$  与  $d$  也构成一个节点,这样也可以写出:

$$4.0 + 6.0 = I_2 + 1.0 \quad \text{或} \quad I_2 = 9.0 \text{ A}$$

**3.3** 求图 3-9 所示电路中电流  $I$ 。

**解** 因为阴影部分中电阻的数值没有给定,无法计算这些支路中的电流是多少,但可将该网络作为单一节点,应用 KCL 求解。这样

$$2.0 - 3.0 - 4.0 - I = 0 \quad \text{或} \quad I = -5.0 \text{ A}$$

**3.4** 求 3-10 所示电路的等效电阻。

**解** 两个  $20.0 \Omega$  电阻并联的等效值为  $R_{eq} = [(20)(20)/(20 + 20)] = 10 \Omega$ ,它又与  $10.0 \Omega$  的电阻串联,电阻之和是  $20.0 \Omega$ ,接下来又与另一个  $20.0 \Omega$  的电阻并联,总的等效电阻是  $10.0 \Omega$ 。

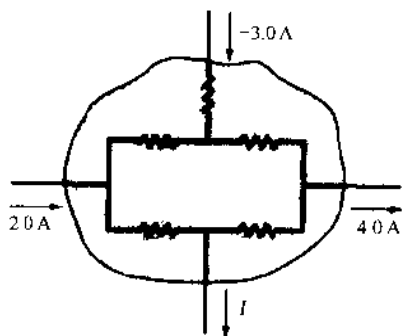


图 3-9

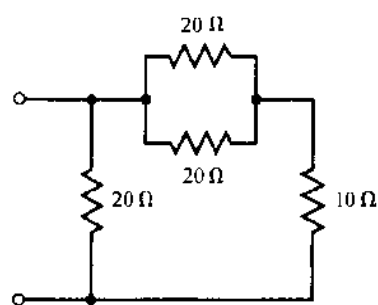


图 3-10

### 3.5 确定图 3-11 所示电路三个并联电感的等效电感.

**解** 两个 20 mH 的电感并联以后获得等效电感是 10 mH, 接下来这个电感又与 10 mH 的电感并联, 总的等效电感是 5 mH. 算法为

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{10 \text{ mH}} + \frac{1}{20 \text{ mH}} + \frac{1}{20 \text{ mH}} = \frac{4}{20 \text{ mH}} \quad \text{或} \quad L_{\text{eq}} = 5 \text{ mH}$$

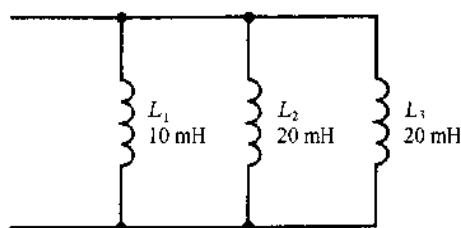


图 3-11

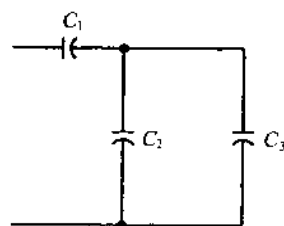


图 3-12

### 3.6 求图 3-12 所示三个电容器电路的总电容的表达式.

**解** 因为  $C_2$  和  $C_3$  是并联连接,  $C_{\text{eq}} = C_2 + C_3$ , 又因为  $C_1$  与  $C_{\text{eq}}$  是串联连接

$$C_T = \frac{C_1 C_{\text{eq}}}{C_1 + C_{\text{eq}}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

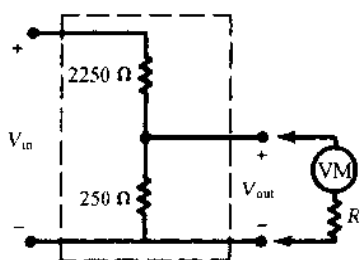


图 3-13

**3.7** 图 3-13 所示电路为电压分压器, 又称作衰减器. 当它是一个具有可变抽头的单一电阻时, 称作电位差计或电位箱. 为了弄清负载对测试情况的影响, 该负载是电压表 VM 的电阻  $R$ . 请计算当  $R$  为下列情况时  $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$  的比值. (a)  $R = \infty$ ; (b) 1 MΩ; (c) 10 MΩ; (d) 1 kΩ

**解** (a)  $V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = \frac{250}{2250 + 250} = 0.100$

(b) 电阻  $R$  与 250 Ω 电阻并联的等效电阻;

$$R_{\text{eq}} = \frac{250(10^6)}{250 + 10^6} = 249.9 \Omega, \quad \text{则} \quad V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = \frac{249.9}{2250 + 249.9} = 0.100$$

$$(c) R_{\text{eq}} = \frac{(250)(10000)}{250 + 10000} = 243.9 \Omega, \quad \text{则} \quad V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = 0.098$$

$$(d) R_{\text{eq}} = \frac{(250)(1000)}{250 + 1000} = 200.0 \Omega, \quad \text{则} \quad V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = 0.082$$

### 3.8 求图 3-14(a)所示网络的各支路电流.

**解** 节点  $a, b$  左右两端的等效电阻是

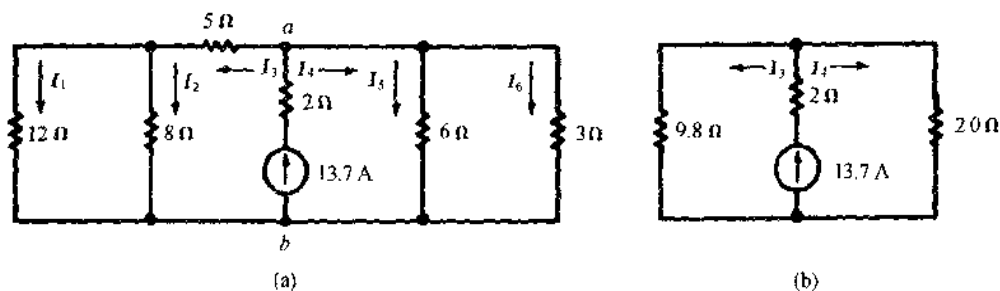


图 3-14

$$R_{eq(L)} = 5 + \frac{(12)(8)}{20} = 9.8 \Omega$$

$$R_{eq(R)} = \frac{(6)(3)}{9} = 2.0 \Omega$$

参阅图 3-14(b)的简化电路

$$I_3 = \frac{2.0}{11.8}(13.7) = 2.32 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{9.8}{11.8}(13.7) = 11.38 \text{ A}$$

参阅原始电路

$$I_1 = \frac{8}{20}(2.32) = 0.93 \text{ A} \quad I_2 = 2.32 - 0.93 = 1.39 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{3}{9}(11.38) = 3.79 \text{ A} \quad I_6 = 11.38 - 3.79 = 7.59 \text{ A}$$

### 补充习题

3.9 求图 3-15 所示电路中电压源的电压  $V$  及极性. 如果 (a)  $I = 2.0 \text{ A}$ ; (b)  $I = -2.0 \text{ A}$ .

答案: (a) 50 V, b 点为正极; (b) 10 V, a 点为正极

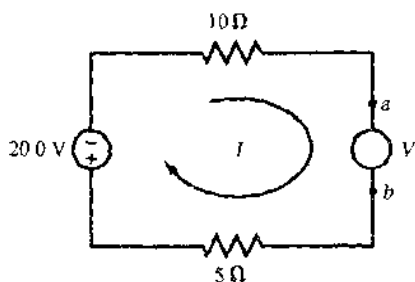


图 3-15

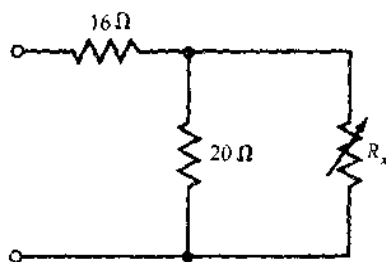


图 3-16

3.10 求图 3-16 电路的等效电阻  $R_{eq}$ , 当 (a)  $R_x = \infty$ ; (b)  $R_x = 0$ ; (c)  $R_x = 5 \Omega$ .

答案: (a) 36Ω; (b) 16Ω; (c) 20Ω

3.11 一个 8.0 mH 的电感与两个并联的电感串联, 两个并联电感的数值分别为 3.0 mH 和 6.0 mH, 求  $L_{eq}$ .

答案: 10.0 mH

3.12 证明图 3-17 所示的三个相同数值的电容电路, 等效电容值为  $C_{eq} = 1.5 \text{ C}$ .

3.13 求图 3-18 所示分压电路的电阻  $R_H$ ,  $R_0$ , 使得当  $V_0 \approx 100 \text{ V}$  时电流  $I$  限制在 0.5 A 以内.

答案:  $R_H = 2.0 \text{ M}\Omega$ ,  $R_0 = 200 \Omega$

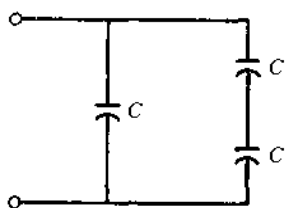


图 3-17

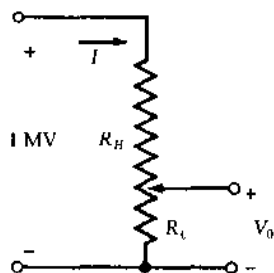


图 3-18

3.14 利用电压分压关系, 计算图 3-19 电路的  $v_1, v_2$ .

答案: 11.4 V, 73.1 V

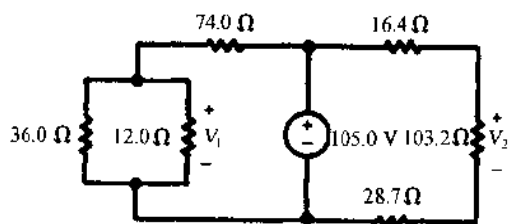


图 3-19

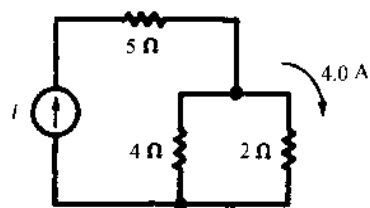


图 3-20

3.15 求图 3-20 所示电路的电流源电流  $I$  及输出功率.

答案: 6.0 A, 228 W

3.16 证明四个电阻并联的电路中, 其中一条支路(例如  $R_4$  支路)的电流与总电流的关系为

$$I_4 = I_T \left( \frac{R'}{R_4 + R'} \right) \quad \text{这里} \quad R' = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

注意: 这与两条支路并联电路的电流分流情况类似, 其他支路的电阻可由  $R'$  代替.



## 第4章 电路的分析方法

### 4.1 支路电流法

在支路电流法中,要先指定有源网络中各支路的电流方向,然后将基尔霍夫电流定律用于主节点,再使用主节点间的电压与电流的关系,便可以建立一组联立方程,这一方程组可以解出支路电流。

**例 4.1** 用支路电流法求解图 4-1 所示电路中各支路电流。

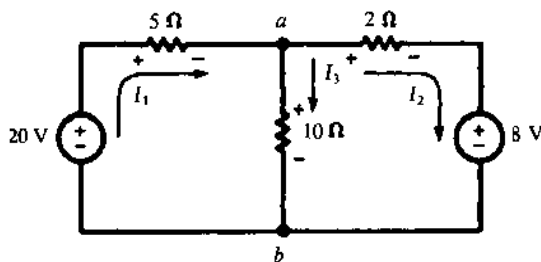


图 4-1

支路电流  $I_1$ ,  $I_2$  和  $I_3$  的正方向如图所示.对节点  $a$  应用 KCL 定律,有

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

电压  $V_{ab}$  可以用各支路中的元件关系写出:  $V_{ab} = 20 - I_1(5)$ ,  $V_{ab} = I_3(10)$  及  $V_{ab} = I_2(2) + 8$ . 于是可写出下方程组

$$20 - I_1(5) = I_3(10) \quad (2)$$

$$20 - I_1(5) = I_2(2) + 8 \quad (3)$$

联立求解这三个方程(1)、(2)和(3)得出:  $I_1 = 2\text{ A}$ ,  $I_2 = 1\text{ A}$  和  $I_3 = 1\text{ A}$ .

解题中支路电流也可以设定为其他方向,只是结果中将包含有适当的符号.对于更复杂的网络,支路电流法使用起来比较困难,其原因是:它并未指出起始点或网络的逻辑上的阶数而建立所需的方程组.其结果是支路电流法比网孔电流法和节点电压法需要更多的独立方程。

### 4.2 网孔电流法

在网孔电流法中对网络的每一个窗口设定一个电流,这样电流形成完整的闭合回路.有时把它们称为回路电流.因此每个元件及每条支路都有一个独立的电流.当一条支路有两个网孔电流时,其实际电流由两个网孔电流的代数和确定.网孔电流可以设为顺时针或逆时针方向,而在开始时我们最好设定所有网孔电流均为顺时针方向.一旦设定了电流的方向,可对每个回路写出基尔霍夫电压方程,以得到所需要的联立方程组。

**例 4.2** 用网孔电流法求图 4-2 所示电路的各支路电流。

选择电流  $I_1$  和  $I_2$  的方向如图 4-2 所示,从左回路  $\alpha$  点开始应用 KVL 写出方程为

$$-20 + 5I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0$$

从右回路  $\beta$  点开始写出方程为

$$8 + 10(I_2 - I_1) + 2I_2 = 0$$

重新整理方程

$$15I_1 - 10I_2 = 20 \quad (4)$$

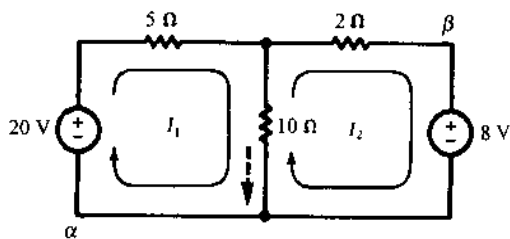


图 4-2

$$-10I_1 + 12I_2 = -8 \quad (5)$$

联立求解方程(4)和(5), 解出  $I_1 = 2 \text{ A}$ ,  $I_2 = 1 \text{ A}$ . 如图中虚线所示, 中间支路的电流为  $I_1 - I_2 = 1 \text{ A}$ . 在例 4.1 中这是支路电流  $I_3$ .

为了建立一组有效的联立方程组, 不必限制各电流为各窗口电流, 尽管这种限定为窗口电流的情况在网孔电流法中是常见的. 例如, 在题 4.6 中, 每一电流都经过电源. 在这道题中, 这些电流都称为回路电流. 可依据的规则是: 网络中每个元件都必须有一个电流或一个合成电流, 而在不同支路中的两个元件不能设定为同一电流或同一个合成电流.

### 4.3 矩阵和行列式

$n$  个网孔网络的  $n$  个联立方程可以写成矩阵的形式(参考附录 B 中关于矩阵及行列式的介绍).

**例 4.3** 当把 KVL 应用于图 4-3 所示的三个网孔的网络时, 可以获得下面三个方程

$$\begin{aligned} (R_A + R_B)I_1 - R_B I_2 &= V_a \\ -R_B I_1 + (R_B + R_C + R_D)I_2 - R_D I_3 &= 0 \\ -R_D I_2 + (R_D + R_E)I_3 &= -V_b \end{aligned}$$

将方程改写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ -V_b \end{bmatrix}$$

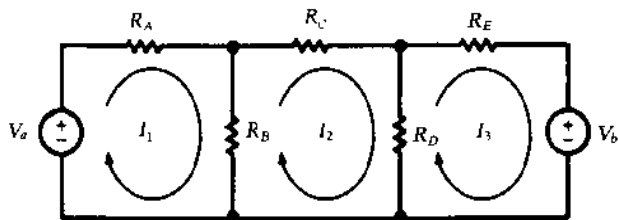


图 4-3

矩阵中的元素可以用一般形式表示

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

这里元素  $R_{11}$  (1 行、1 列) 是网孔电流  $I_1$  流经的全部电阻之和. 在图 4-3 中, 是  $R_A + R_B$ . 类似地,  $R_{22}$  和  $R_{33}$  分别是电流  $I_2, I_3$  通过的全部电阻之和.

元素  $R_{12}$  (1 行、2 列) 是网孔电流  $I_1$  和  $I_2$  共同经过的全部电阻之和. 如果这两

个电流以相同的方向通过每个电阻,则  $R_{12}$  的符号为“+”号;如果这两个电流以相反的方向通过电阻,则  $R_{12}$  的符号为“-”号。在图 4-3 中  $R_B$  是电流  $I_1$  和  $I_2$  惟一的公共电阻,而且电阻  $R_B$  上两个电流方向相反,则这项的符号为负号。类似地,元素  $R_{21}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{13}$  和  $R_{31}$  都是由下标所指出的两个网孔电流的公共电阻之和。其符号的确定和上述确定  $R_{12}$  的符号的情况一样。注意,对所有的  $i$  和  $j$ ,  $R_{ij} = R_{ji}$ 。另一个结果是,电阻矩阵是关于主对角线对称的。

对电流矩阵不需要说明,它是个单列矩阵,用下标 1, 2, 3... 来区别该项电流与哪一网孔对应。在网孔电流法中,电流矩阵是未知的。

电压矩阵中的元素  $V_i$  是驱动网孔电流  $I_i$  的全部电源电压之和。如果  $I_i$  由电源一端流向+端,则该项电压为正,反之为负。换句话说如果电源是驱动网孔电流的方向,电压取正值。在图 4-3 中,网孔 1 中  $V_a$  电源是驱动电流  $I_1$  的方向,2 中没有电源,网孔 3 中  $V_b$  电源反向驱动  $I_3$ ,则  $V_3$  取负值。

由网孔电流法引出的矩阵方程可以用多种技巧求解。下面要介绍的行列式法是其中之一(克莱姆法则)。然而,应当说,对于大型网络,其他方法会有效得多。

#### 例 4.4 用行列式法求解例 4.3 的矩阵方程(6)。

未知电流  $I_1$  可由两个行列式之比解出。分母行列式含有电阻矩阵的元素。它可以称为系数行列式,用符号  $\Delta_R$  表示,分子行列式的元素除第一列以外均与  $\Delta_R$  相同,在这里,电压矩阵的元素取代了系数行列式的第一列元素。这样

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

类似地

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & V_1 & R_{13} \\ R_{21} & V_2 & R_{23} \\ R_{31} & V_3 & R_{33} \end{vmatrix} \quad I_3 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & V_3 \end{vmatrix}$$

用电压项的余因了对分子行列式进行展开得到一组方程,可以帮助理解网络,特别是网络的驱动点和转移电阻。

$$I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right) \quad (7)$$

$$I_2 = V_1 \left( \frac{\Delta_{12}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{22}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{32}}{\Delta_R} \right) \quad (8)$$

$$I_3 = V_1 \left( \frac{\Delta_{13}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{23}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{33}}{\Delta_R} \right) \quad (9)$$

这里  $\Delta_{ij}$  代表  $\Delta_R$  中  $R_{ij}$  (表示  $i$  行  $j$  列的元素)的余因子,必须注意余因子的符号——见附录 B。

#### 4.4 节点电压法

如图 4-4 所示的网络中包含有 5 个节点,其中 4、5 是简单节点,1、2 和 3 是主节点。在节点电压法中,选择一个主节点作为参考节点,然后根据 KCL 写出其他主节点的方程。每一个其他主节点设定一个电压,可以理解为是相对于参考节点的电压。而这些电压是未知的,当用一种合适的方法将它们确定时,可以得到网络的解。

图 4-4(b)为重新画出的电路,选择节点 3 作为电压  $V_1$  和  $V_2$  的参考节点。利用 KCL 可知,从节点 1 流出的全部电流为零

$$\frac{V_1 - V_a}{R_A} + \frac{V_1}{R_B} + \frac{V_1 - V_2}{R_C} = 0$$

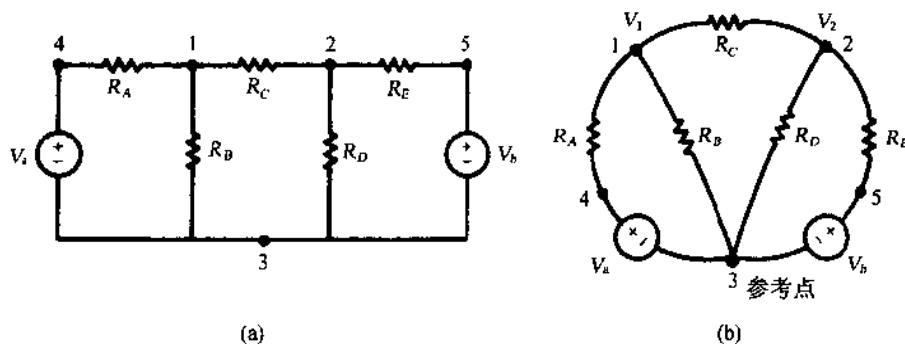


图 4-4

类似地, 节点 2 流出的电流之和也是零

$$\frac{V_2 - V_1}{R_C} + \frac{V_2}{R_D} + \frac{V_2 - V_b}{R_E} = 0$$

(在这种结构中应用 KCL 并不意味着所有实际的电流都是流出这些节点, 的确, 支路 1-2 中的电流一定是从一个节点流出而流入另一个节点的。)对  $V_1, V_2$  写出的方程为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} & -\frac{1}{R_C} \\ -\frac{1}{R_C} & \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a/R_A \\ V_b/R_E \end{bmatrix}$$

要注意系数矩阵的对称性. 元素(1,1)包含了所有与节点 1 相连接的电阻的倒数之和, 元素(2,2)包含了所有与节点 2 相连接的电阻的倒数之和; 元素(1,2)和元素(2,1)是所有与节点 1 和 2 连接的支路电阻的倒数之和的负数.(在目前的电路中只有一条这样的支路.)

右边是驱动电流矩阵, 它包含有  $V_a/R_A$  和  $V_b/R_E$ , 因为它们均是驱动一个电流流入节点, 所以它们取为正值. 节点电压方程的矩阵表达式中的元素将在第 9 章中进一步讨论, 在那里将要涉及正弦稳态网络.

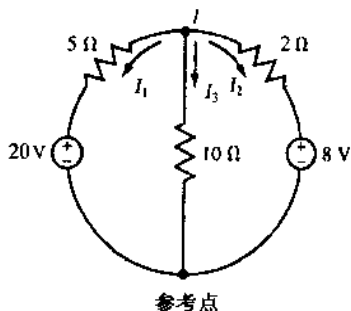


图 4-5

#### 例 4.5 用节点电压法求例 4.2 电路

将电路图重新画于图 4-5 中. 它有两个主节点, 故仅需要一个方程, 假定电流方向全是自上而节点流出, 下面的节点是参考节点.

$$\frac{V_1 - 20}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 8}{2} = 0$$

由上式得到  $V_1 = 10$  V. 则  $I_1 = (10 - 20)/5 = -2$  A (这里的负号表示电流  $I_1$  是流入节点 1 的);  $I_2 = (10 - 8)/2 = 1$  A,  $I_3 = 10/10 = 1$  A. 在例 4.2 中电流是用虚线表示的.

#### 4.5 输入电阻

在单个电源的网络中, 通常感兴趣的是输入电阻或驱动点的电阻. 图 4-6 给出这样的网络, 图中的驱动电压为  $V_1$ , 与其对应的电流是  $I_1$ . 因为只有一个电压源  $V_1$ , 则  $I_1$  的方程如下 [见例 4.4 的(7)式]

$$I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right)$$

输入电阻是  $V_1$  对  $I_1$  的比值

$$R_{in,1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}$$

读者可以验证一下,  $\Delta_R/\Delta_{11}$  的单位确实为  $\Omega$ .

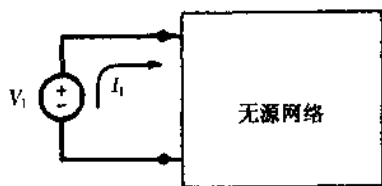


图 4-6



图 4-7

#### 4.6 转移电阻

网络某支路中的驱动电压可以在网络各个支路中产生电流. 例如, 在无源网络中加上电压源, 就会在与负载连接的那部分产生输出电流. 这种情况下网络便具有一个总的转移电阻. 考虑图 4-7 给出的无源网络, 电压源表示为  $V_r$ , 输出端电流为  $I_s$ . 关于  $I_s$  的网孔电流方程仅含有一项, 它是在分子行列式中由  $V_r$  产生的.

$$I_s = (0) \left( \frac{\Delta_{1s}}{\Delta_R} \right) + \cdots + 0 + V_r \left( \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_R} \right) + 0 + \cdots$$

网络的转移电阻是  $V_r$  与  $I_s$  之比

$$R_{\text{tra. rs}} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{rs}}$$

因为电阻矩阵是对称的,  $\Delta_{rs} = \Delta_{sr}$ , 所以

$$R_{\text{tra. rs}} = R_{\text{tra. sr}}$$

该式表示了线性电路的一个重要的性质: 如果在网孔  $r$  中加上电压, 在网孔  $s$  中引起电流, 则在网孔  $s$  中加上相同电压也会在网孔  $r$  中产生相同的电流.

现在考虑含有多个电压源的有  $n$  个网孔电路的更一般的情况. 在网孔  $k$  中, 电流的解可以用输入电阻及转移电阻写出[参考例 4.4 中(7)、(8)、(9)式].

$$I_k = \frac{V_1}{R_{\text{tra. 1k}}} + \cdots + \frac{V_{k-1}}{R_{\text{tra. (k-1)k}}} + \frac{V_k}{R_{\text{in. k}}} + \frac{V_{k+1}}{R_{\text{tra. (k+1)k}}} + \cdots + \frac{V_n}{R_{\text{tra. nk}}}$$

上式在数学上并没有新的含意, 但是写成这种形式的电流方程却非常清楚地说明了叠加原理, 说明了电阻如何控制电压源对特定网孔电流的作用. 将电压源从网孔中移出, 将对该网孔引入高的传输电阻, 而对网孔电流  $I_k$  的影响却很小. 电压源  $V_k$  以及与  $k$  网孔相邻的其他网孔中的电源对电流  $I_k$  的影响较大.

#### 4.7 电路化简

网孔电流法及节点电压法是电路分析的主要方法. 而串联与并联支路的等效电阻(见 3.4 节和 3.5 节)结合分压和分流规律又提供了电路分析的另一种方法. 这种方法是冗长乏味的, 经常需要画出几个附加的电路. 尽管如此, 化简网络的处理方法提供了一个用电压、电流和功率等表示网络的全部功能的非常清楚的图景. 电路化简是从观察分析网络, 找出电阻的串并联关系开始的.

**例 4.6** 求图 4-8 所示网络中 60 V 电压源提供的功率和每个电阻吸收的功率.

$$R_{ab} = 7 + 5 = 12 \Omega$$

$$R_{cd} = \frac{(12)(6)}{12 + 6} = 4 \Omega$$

这两个等效电阻是并联的(见图 4-9), 从而得到

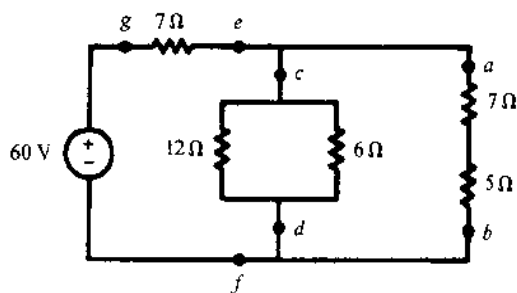


图 4-8

$$R_{ef} = \frac{(4)(12)}{4 + 12} = 3 \Omega$$

3 Ω 的等效电阻与 7 Ω 的电阻相串联(见图 4-10), 因此全电路的电阻是

$$R_{eq} = 7 + 3 = 10 \Omega$$

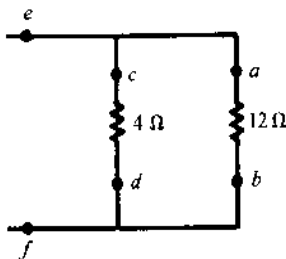


图 4-9

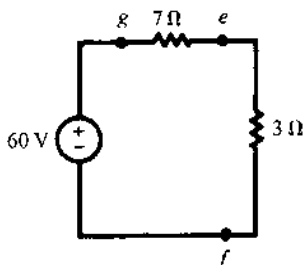


图 4-10

电路中吸收的总功率与电源提供的功率相等, 可以用下式计算

$$P_T = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{(60)^2}{10} = 360 \text{ W}$$

这个功率在  $R_{ge}$  和  $R_{ef}$  两个电阻上分配如下:

$$P_{ge} = P_{7\Omega} = \frac{7}{7+3}(360) = 252 \text{ W} \quad P_{ef} = \frac{3}{7+3}(360) = 108 \text{ W}$$

功率  $P_{ef}$  又分配给  $R_{cd}$  和  $R_{ab}$ , 见下式

$$P_{cd} = \frac{12}{4+12}(108) = 81 \text{ W} \quad P_{ab} = \frac{4}{4+12}(108) = 27 \text{ W}$$

最后, 这些功率在各个电阻之间分配如下

$$P_{12\Omega} = \frac{6}{12+6}(81) = 27 \text{ W} \quad P_{7\Omega} = \frac{7}{7+5}(27) = 15.75 \text{ W}$$

$$P_{6\Omega} = \frac{12}{12+6}(81) = 54 \text{ W} \quad P_{5\Omega} = \frac{5}{7+5}(27) = 11.25 \text{ W}$$

#### 4.8 叠加原理

在有两个或两个以上独立电源的线性电路中可以这样进行分析: 一次仅考虑一个电源的单独作用, 求得各个电压和支路电流, 然后将所得的结果进行叠加, 最终求出该电路中各部分电压及各支路电流. 用这种叠加的方法求解电路是因为电压与电流是线性关系. 对于受控电源来说, 只有当控制量是在含有电源网络的外部, 使每次只有一个电源单独作用的情况不会改变控制量时才能使用叠加原理. 当每次只有一个电源作用时, 被排除的电压源用短路线代替; 被排除的电流源用开路代替. 因为一个元器件上的功率与电流或电压的平方成比例, 它们是非线性关系, 所以不能直接用叠加的方法计算功率.

为了进一步对叠加法进行解释, 我们现在分析例 4.4 中的方程(7).

$$I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right)$$

上式暗含了叠加原理. 注意, 右边的三项相加得到电流  $I_1$ . 如果 3 个网孔中都含有电源, 那么每项都会对电流  $I_1$  有作用. 进一步说, 若只有第 3 个网孔含有电源, 而  $V_1$  和  $V_2$  是零, 则电流  $I_1$  就只由第三项决定.

**例 4.7** 用叠加原理求图 4-11(a)  $23\ \Omega$  电阻中的电流.  $200\ \text{V}$  电压源单独作用时,  $20\ \text{A}$  电流源用开路代替, 见图 4-11(b).

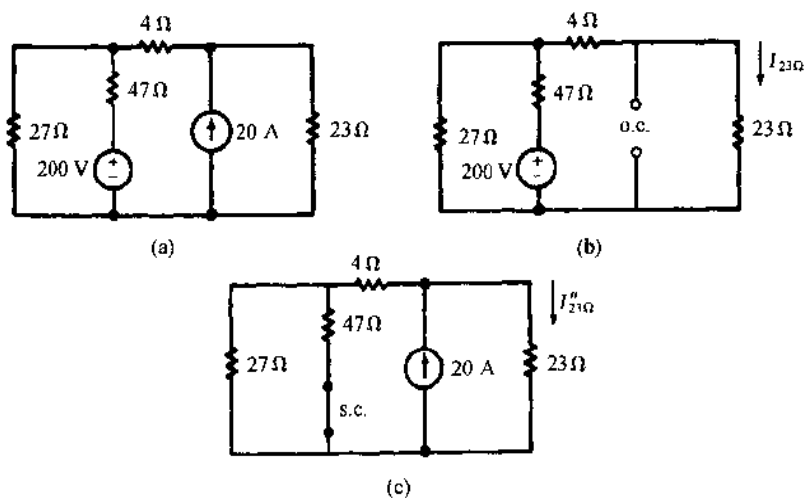


图 4-11

$$R_{eq} = 47 + \frac{(27)(4+23)}{54} = 60.5\ \Omega$$

$$I_T = \frac{200}{60.5} = 3.31\ \text{A}$$

$$I'_{23\Omega} = \left( \frac{27}{54} \right) (3.31) = 1.65\ \text{A}$$

当  $20\ \text{A}$  的电流源单独作用时,  $200\ \text{V}$  的电压源用短路线代替, 见图 4-11(c). 电源左部的等效电阻是

$$R_{eq} = 4 + \frac{(27)(47)}{74} = 21.15\ \Omega$$

则

$$I''_{23\Omega} = \left( \frac{21.15}{21.15 + 23} \right) (20) = 9.58\ \text{A}$$

流过  $23\ \Omega$  电阻器的总电流是

$$I_{23\Omega} = I'_{23\Omega} + I''_{23\Omega} = 11.23\ \text{A}$$

#### 4.9 戴维南与诺顿定理

含有一个或多个电压源或电流源的线性有源阻性网络, 可以用一个电压源和一个电阻的串联代替(戴维南定理), 或者用一个电流源和一个电阻并联代替(诺顿定理). 这个电压叫做戴维南等效电压  $V'$ , 这个电流叫做诺顿等效电流  $I'$ . 两个定理中所串联或并联的电阻相同, 为  $R'$ . 当图 4-12(a) 的端点  $a b$  开路时, 将在端口产生电压.

从图 4-12 可以清楚地看出端电压必定是戴维南等效电压  $V'$ . 如果像图 4-12(a) 中虚线所表示的那样, 将端点短路就会产生电流. 从图 4-12(c) 又可以清楚地发现这个电流就是诺顿等效电路中的电流  $I'$ . 如果 (b)、(c) 是同一个有源网络的等效电路, 那么它们也互等效. 故有  $I' = V'/R'$ ; 如果  $V'$ 、 $I'$  都已由有源电路确定了, 则  $R' = V'/I'$ .

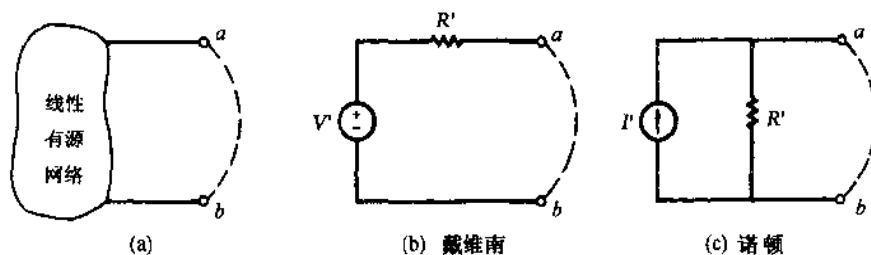


图 4-12

例 4.8 求图 4-13(a)所示电路的戴维南及诺顿等效电路。

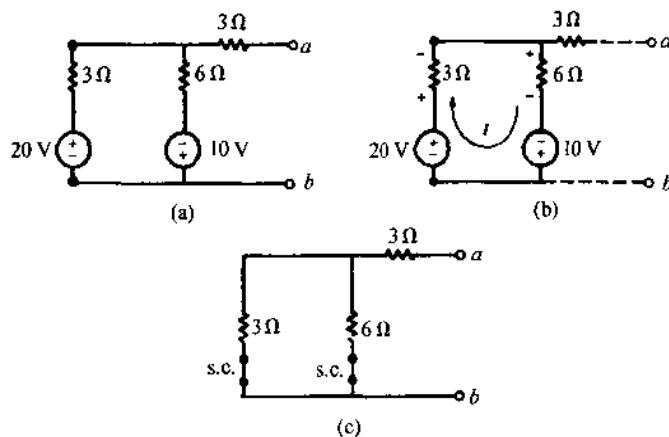


图 4-13

将  $a, b$  开路, 两个电源驱动一个电流顺时针方向流过  $3\Omega$  和  $6\Omega$  电阻[图 4-13(b)]

$$I = \frac{20 + 10}{3 + 6} = \frac{30}{9} \text{ A}$$

因为没有电流流过右上方的  $3\Omega$  电阻, 可以从两个有源支路中任何一条支路得到戴维南电压。

$$V_{ab} = V' = 20 - \left(\frac{30}{9}\right)(3) = 10 \text{ V}$$

或

$$V_{ab} = V' = \left(\frac{30}{9}\right)6 - 10 = 10 \text{ V}$$

电阻  $R'$  可以通过将电压源短路的方法得到[见图 4.13 (c)], 求出端口  $ab$  的等效电阻

$$R' = 3 + \frac{(3)(6)}{9} = 5 \Omega$$

当电路的端口短路时, 两个电源会产生电流  $I_{s.c.}$ , 假设电流在短路线中是从  $a$  电流向  $b$  点的, 我们可以用叠加的方法解出

$$I_{s.c.} = I' = \left(\frac{6}{6+3}\right)\left[\frac{20}{3 + \frac{(3)(6)}{9}}\right] - \left(\frac{3}{3+3}\right)\left[\frac{10}{6 + \frac{(3)(3)}{6}}\right] = 2 \text{ A}$$

图 4-14 给出了两个等效的电路. 在这种情况下  $V', R'$  和  $I'$  是独立求解的, 因它们与欧姆定律相关, 任何两个量都可以用来求解第三个量。

当考察有许多电阻性负载的有源电路时, 戴维南定理和诺顿定理是非常有用的。像图 4-15 所示的那样, 电阻器  $R_1, R_2, \dots, R_n$  是逐个接到电路的, 可以很方便的解出每次所产生的电流和功率。如果对原始电路用网络简化法求解, 将是非常繁琐和浪费时间的。



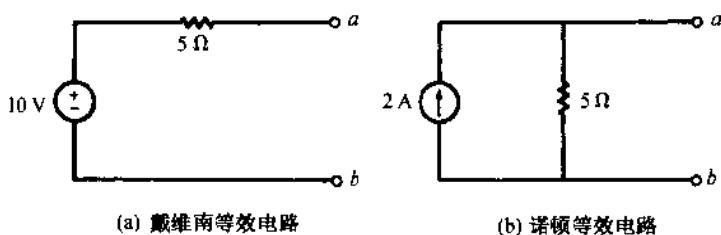


图 4-14

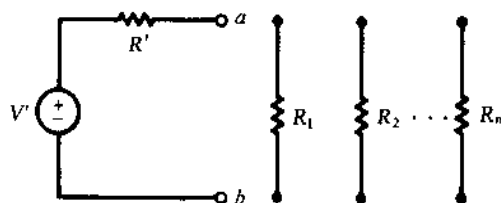


图 4-15

#### 4.10 最大功率传输定理

有时,希望得到从有源网络向外部负载  $R_L$  传输的最大功率.如果网络是线性的,就可以将网络简化为图 4-16 所示的等效电路.那么

$$I = \frac{V'}{R' + R_L}$$

这样在负载上吸收的功率是

$$P_L = \frac{V'^2 R_L}{(R' + R_L)^2} = \frac{V'^2}{4R'} \left[ 1 - \left( \frac{R' - R_L}{R' + R_L} \right)^2 \right]$$

可见,当  $R_L = R'$  时  $P_L$  得到最大值  $V'^2/4R'$ ,在这种情况下,  $R'$  中消耗的功率也是  $V'^2/4R'$ . 进一步,当传输功率最大时,效率为 50%.

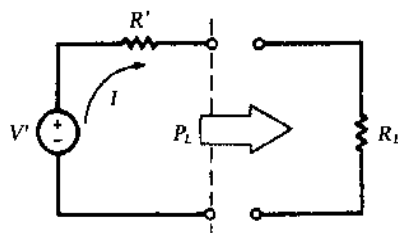


图 4-16

#### 习题及解答

4.1 用支路电流法求图 4-17 电路中 60 V 电压源提供的电流.

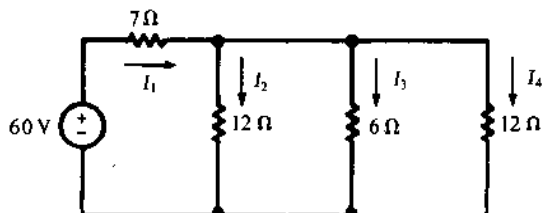


图 4-17

解 由 KCL 及 KVL 写出

$$I_2(12) = I_3(6) \quad (10)$$

$$I_2(12) = I_4(12) \quad (11)$$

$$60 = I_1(7) + I_2(12) \quad (12)$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \quad (13)$$

将(10), (11)式代入(13)式

$$I_1 = I_2 + 2I_2 - I_2 = 4I_2 \quad (14)$$

将(14)式代入(12)式

$$60 = I_1(7) + \frac{1}{4}I_1(12) = 10I_1 \quad \text{或} \quad I_1 = 6 \text{ A}$$

#### 4.2 用网孔电流法解 4.1 题.

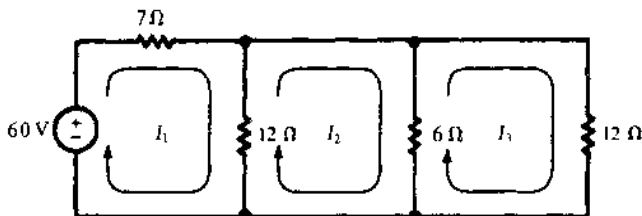


图 4-18

解 将 KVL 应用于每个网孔(见图 4-18), 结果如下

$$60 - 7I_1 + 12(I_1 - I_2)$$

$$0 = 12(I_2 - I_1) + 6(I_2 - I_3)$$

$$0 = 6(I_3 - I_2) + 12I_3$$

重新整理各式并将其改写为矩阵形式

$$\begin{aligned} 19I_1 - 12I_2 &= 60 \\ -12I_1 + 18I_2 - 6I_3 &= 0 \\ -6I_2 + 18I_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

应用克莱姆法则解出  $I_1$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 60 & -12 & 0 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{17280}{2880} = 6 \text{ A}$$

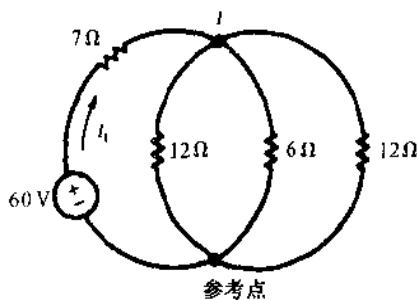


图 4-19

#### 4.3 用节点电压法解 4.1 和 4.2 题.

解 见图 4-19, 仅有两个主节点, 只需要写出一个方程

$$\frac{V_1 - 60}{7} + \frac{V_1}{12} + \frac{V_1}{6} + \frac{V_1}{12} = 0$$

由此得到  $V_1 = 18 \text{ V}$ , 则

$$I_1 = \frac{60 - V_1}{7} = 6 \text{ A}$$

#### 4.4 在题 4.2 中求输入电阻 $R_{in,1}$ , 然后利用它计算电流 $I_1$ .

解

$$R_{in,1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}} = \frac{2880}{\begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{2880}{288} = 10 \Omega$$

那么

$$I_1 = \frac{60}{R_{in,1}} = \frac{60}{10} = 6 \text{ A}$$

#### 4.5 求 4.2 题电路中的 $R_{tr,12}$ 和 $R_{tr,13}$ , 并根据结果计算电流 $I_2$ 和 $I_3$ .

解  $\Delta_R$  中元素(1,2)的余因子一定包括负号

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 216 \quad R_{\text{in},12} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{12}} = \frac{2880}{216} = 13.33 \, \Omega$$

则  $I_2 = 60/13.33 = 4.50 \, \text{A}$ .

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -12 & 18 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 \quad R_{\text{in},13} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{13}} = \frac{2880}{72} = 40 \, \Omega$$

则  $I_3 = 60/40 = 1.50 \, \text{A}$ .

4.6 用图 4-20 设定的回路电流求解 4.1 题.

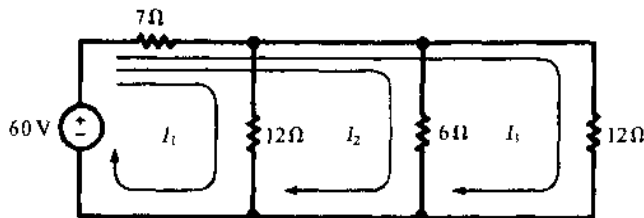


图 4-20

解 根据 4.2 节的法则, 用观察法求出元素的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

于是

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{vmatrix} = 2880$$

注意, 尽管这里  $\Delta_R$  的元素与 4.2 题的行列式中的元素不同, 但  $\Delta_R = 2880$  的结果一致. 网孔或回路的所有有效方程组产生数值相同的  $\Delta_R$ . 三个分子的行列式是

$$N_1 = \begin{vmatrix} 60 & 7 & 7 \\ 60 & 13 & 7 \\ 60 & 7 & 19 \end{vmatrix} = 4320 \quad N_2 = 8642 \quad N_3 = 4320$$

从而

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta_R} = \frac{4320}{2880} = 1.5 \, \text{A} \quad I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = 3 \, \text{A} \quad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = 1.5 \, \text{A}$$

由 60 V 电压源提供的电流是三个回路的电流之和,  $I_1 + I_2 + I_3 = 6 \, \text{A}$ .

4.7 用观察法写出图 4-21 所示网孔电流矩阵方程, 然后求解这些电流.

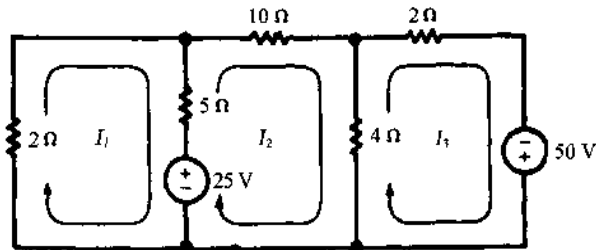


图 4-21

解 由

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{vmatrix} -25 & -5 & 0 \\ 25 & 19 & -4 \\ 50 & -4 & 6 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = (-700) \div 536 = -1.31 \text{ A}$$

及

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = \frac{1700}{536} = 3.17 \text{ A} \quad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = \frac{5600}{536} = 10.45 \text{ A}$$

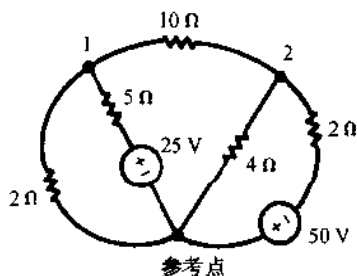


图 4-22

#### 4.8 用节点电压法求 4.7 题.

解 重新画出的电路如图 4-22 所示, 两个主节点标为 1 和 2, 选择第三个节点为参考节点. 根据 KCL 可以确定节点 1 的净输出电流为零

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - 25}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0$$

类似地, 在节点 2 可写出

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{4} + \frac{V_2 + 50}{2} = 0$$

将两个方程改写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -25 \end{bmatrix}$$

系数行列式及分子行列式是

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.80 & -0.10 \\ -0.10 & 0.85 \end{vmatrix} = 0.670$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 5 & -0.10 \\ -25 & 0.85 \end{vmatrix} = 1.75 \quad N_2 = \begin{vmatrix} 0.80 & 5 \\ -0.10 & -25 \end{vmatrix} = -19.5$$

得出电压

$$V_1 = \frac{1.75}{0.670} = 2.61 \text{ V} \quad V_2 = \frac{-19.5}{0.670} = -29.1 \text{ V}$$

根据电压的计算结果, 图 4-21 中的电流确定如下

$$I_1 = \frac{-V_1}{2} = -1.31 \text{ A} \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{10} = 3.17 \text{ A} \quad I_3 = \frac{V_2 + 50}{2} = 10.45 \text{ A}$$

#### 4.9 对于 4-23 所示的电路, 求出使电流为 $I_0 = 7.5 \text{ mA}$ 的电压 $V_s$ .

解 用节点电压法, 通过观察写出方程的矩阵形式如下

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解出  $V_2$  为

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.443 & V_s/20 \\ -0.250 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.443 & -0.250 \\ -0.250 & 0.583 \end{vmatrix}} = 0.0638 V_s$$

则

$$7.5 \times 10^{-3} = I_0 = \frac{V_2}{6} = \frac{0.0638 V_s}{6}$$

由此解出

$$V_s = 0.705 \text{ V.}$$

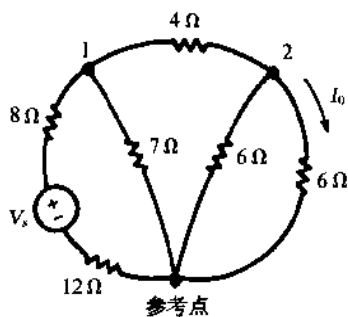


图 4-23

4.10 在图 4-24 所示网络中, 求  $10\ \Omega$  电阻器中的电流.

解 用观察法, 可以写出节点矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -0.20 \\ -6 & 0.70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.30 & -0.20 \\ -0.20 & 0.70 \end{vmatrix}} = 1.18\text{ V}$$

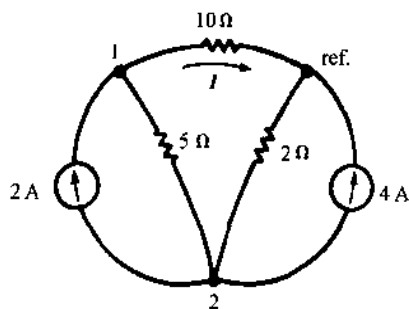


图 4-24

于是  $I = V_1/10 = 0.118\text{ A}$ .

4.11 求图 4-25 所示电路中的电压  $V_{ab}$ .

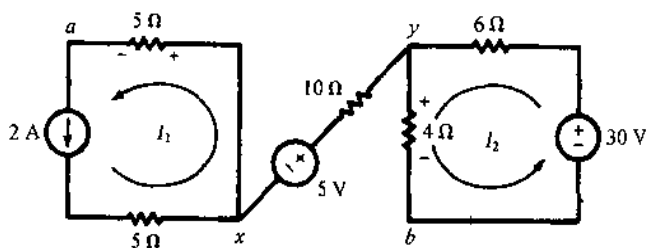


图 4-25

解 两个闭合回路各自独立, 没有电流通过连接支路

$$I_1 = 2\text{ A} \quad I_2 = \frac{30}{10} = 3\text{ A}$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = -I_1(5) - 5 + I_2(4) = -3\text{ V}$$

4.12 对图 4-26 所示的梯形网络, 求出用  $V_{in}$  对  $I_4$  之比表示的传输电阻.

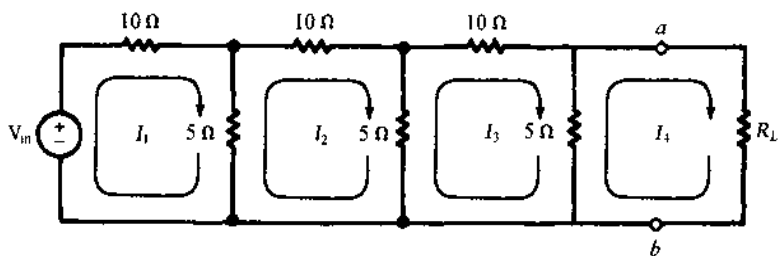


图 4-26

解 通过观察, 网络方程为

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 + R_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R = 5125R_L + 18750 \quad N_4 = 125V_{in}$$

$$I_4 = \frac{N_4}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{41R_L + 150} (\text{A})$$

所以

$$R_{\text{tra}, 14} = \frac{V_{in}}{I_4} = 41R_L + 150 (\Omega)$$

4.13 求图 4-26 中端点  $a, b$  左方电路的戴维南等效电路.

解 在图 4-27 所示三个网孔电路中可以求出短路电流  $I_{s.c.}$ :

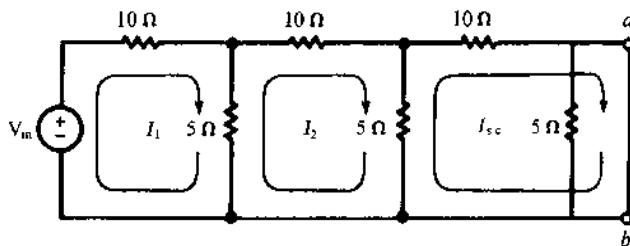


图 4-27

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{s.c.} = \frac{V_{in} \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{150}$$

开路电压  $V_{o.c.}$  是图 4-28 所示电路中  $5\Omega$  电阻两端的电压.

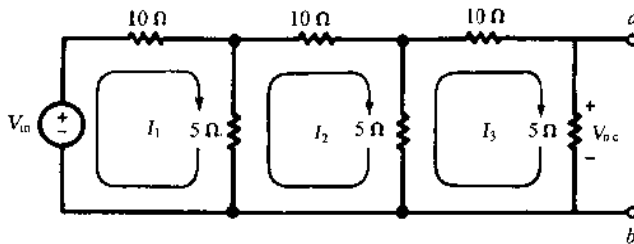


图 4-28

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \frac{25 V_{in}}{5125} = \frac{V_{in}}{205} \text{ (A)}$$

于是, 戴维南电压源是  $V' = V_{o.c.} = I_3(5) = V_{in}/41$ , 又

$$R_{Th} = \frac{V_{o.c.}}{I_{s.c.}} = \frac{150}{41} \Omega$$

戴维南等效电路示于图 4-29 中. 在  $a, b$  点连接电阻  $R_L$  后, 输出电流是

$$I_4 = \frac{V_{in}/41}{(150/41) + R_L} = \frac{V_{in}}{41 R_L + 150} \text{ (A)}$$

与 4.12 题的结果一致.

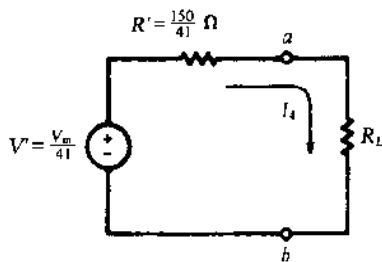


图 4-29

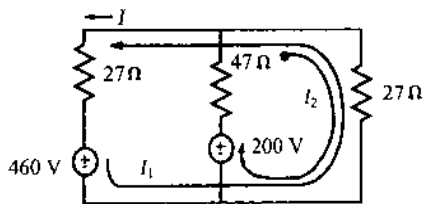


图 4-30

#### 4.14 用叠加原理求图 4-30 所示电路各电源共同作用下的电流 $I$ 。

**解** 选择回路电流如图 4-30 所示, 每个电源中只有一个电流通过。

$$\begin{bmatrix} 54 & -27 \\ -27 & 74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -460 \\ 200 \end{bmatrix}$$

对于 460 V 电压源

$$I_1' = I' = \frac{(-460)(74)}{3267} = -10.42 \text{ A}$$

对于 200 V 电压源

$$I_1'' = I'' = \frac{-(200)(-27)}{3267} = 1.65 \text{ A}$$

所以

$$I = I' + I'' = -10.42 + 1.65 = -8.77 \text{ A}$$

#### 4.15 用网络化简的方法求图 4-31(a) 所示电路中每个电阻中的电流。

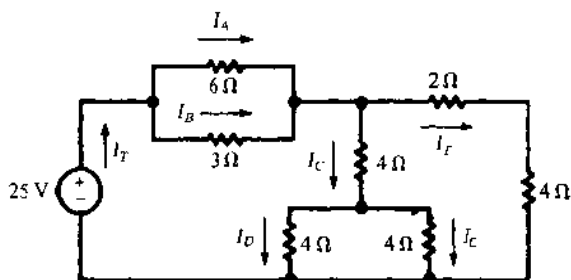


图 4-31(a)

**解** 第一步, 将两个并联电阻转换为等效电阻, 对于 6 Ω 和 3 Ω 电阻,  $R_{eq} = (6)(3)/(6+3) = 2\Omega$ . 对于两个 4 Ω 的电阻,  $R_{eq} = 2\Omega$ . 加上串联电阻后重新画出电路图[图 4-31(b)]. 现在, 两个 6 Ω 电阻并联后的等效电阻  $R_{eq} = 3\Omega$ , 然后又与一个 2 Ω 电阻串联. 最后如图 4-3(c) 所示,  $R_T = 5\Omega$ . 由此产生的总电流

$$I_T = \frac{25}{5} = 5 \text{ A}$$

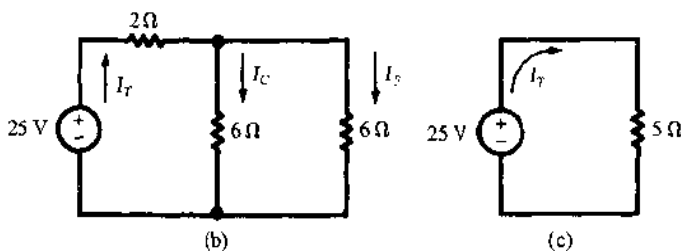


图 4-31(b, c)

现在可以回到图 4-31(b) 及 4-31(a) 来求支路电流

$$I_C = I_F = \frac{1}{2} I_T = 2.5 \text{ A}$$

$$I_D = I_E = \frac{1}{2} I_C = 1.25 \text{ A}$$

$$I_A = \frac{3}{6+3} I_T = \frac{5}{3} \text{ A}$$

$$I_B = \frac{6}{6+3} I_T = \frac{10}{3} \text{ A}$$

#### 4.16 求可变电阻 $R$ 的数值, 以使图 4-32 所示电路在端点 $a, b$ 之间的传输为最大功率。

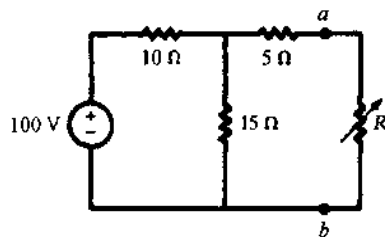


图 4-32

**解** 首先求出戴维南等效电路, 有  $V' = 60\text{ V}$  及  $R' = 11\ \Omega$ . 根据 4.10 节, 当  $R = R' = 11\ \Omega$  时传输的功率为最大, 即

$$P_{\max} = \frac{V'^2}{4R'} = 81.82\text{ W}$$

### 补充习题

- 4.17 对图 4-33 的电路, 用网孔电流法, 通过观察写出矩阵方程, 展开含有电压源的列的分子行列式, 求出电流  $I_1$ , 证明每个电源提供的电流为 2.13 A.

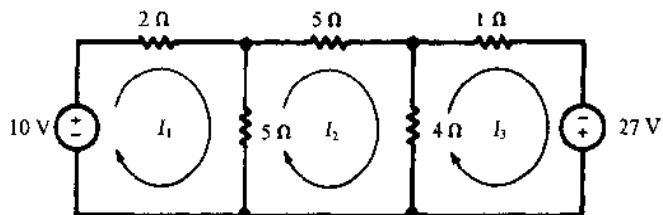


图 4-33

- 4.18 回路电流如图 4-34 所示, 写出矩阵方程并求解三个电流.

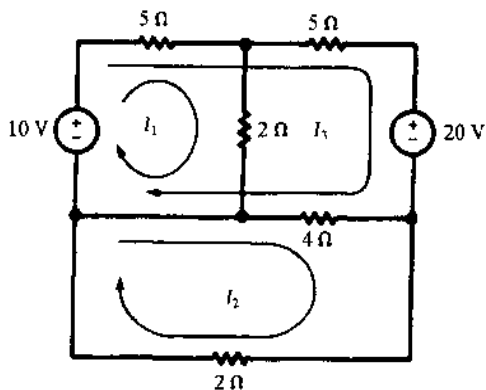


图 4-34

答案: 3.55 A, -1.98 A, -2.98 A

- 4.19 将题 4.18 的电路重画为图 4-35 所示的电路, 用节点电压法求节点电压  $V_1$  和  $V_2$ , 然后验证 4.18 题解得的电流.

答案: 7.11 V, -3.96 V

- 4.20 在图 4-36 所示的网络中, 电流  $I_0 = 7.5\text{ mA}$ . 用网孔电流法求所需要的电压源  $V_1$ .

答案: 0.705 V



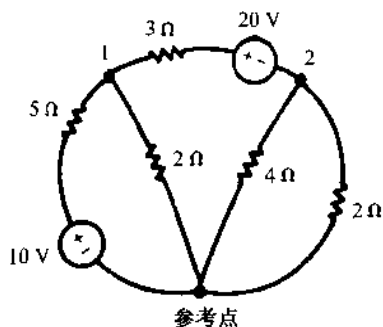


图 4-35

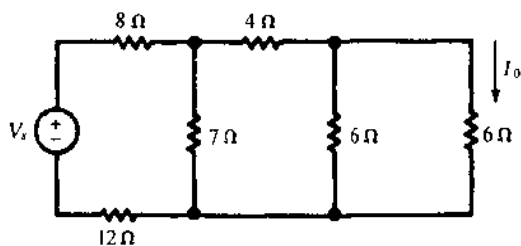


图 4-36

4.21 用题 4.20 的恰当的行列式求出从电压源  $V_s$  两端看去的输入电阻, 然后用网络化简的方法验证结果。

答案:  $23.5 \Omega$

4.22 网络如图 4-36 所示, 求电流  $I_0$  对于电压  $V_s$  的传输电阻。

答案:  $94 \Omega$

4.23 求图 4-37 所示网络的网孔电流。

答案:  $5.0 \text{ A}, 1.0 \text{ A}, 0.5 \text{ A}$

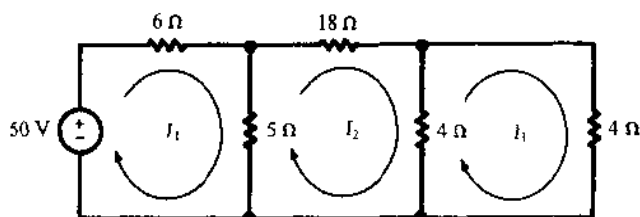


图 4-37

4.24 利用 4.23 题得到的矩阵计算  $R_{in,1}$ ,  $R_{tra,12}$  和  $R_{tra,13}$ 。

答案:  $10 \Omega, 50 \Omega, 100 \Omega$

4.25 求图 4-38 所示网络中四个网孔电流。

答案:  $2.11 \text{ A}, -0.263 \text{ A}, -2.34 \text{ A}, 0.426 \text{ A}$

4.26 电路如图 4-39 所示, 用网孔电流法或节点电压法求端点  $a, b$  的  $V_{o.c.}$ ,  $I_{s.c.}$  和  $R'$ . 考虑  $a$  点相对于  $b$  点的极性为正。

答案:  $-6.29 \text{ V}, -0.667 \text{ A}, 9.44 \Omega$

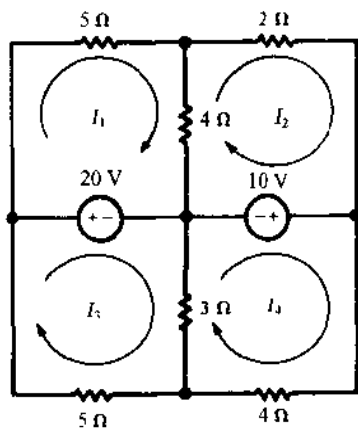


图 4-38

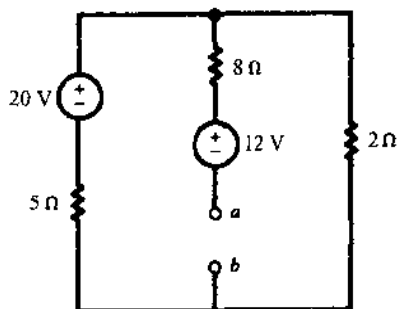


图 4-39

4.27 网络如图 4-40 所示, 用节点电压法求端点  $a, b$  处的  $V_{o.c.}$  及  $I_{s.c.}$ . 考虑  $a$  点相对于  $b$  点的极性为正。

答案:  $-11.2 \text{ V}, -7.37 \text{ A}$

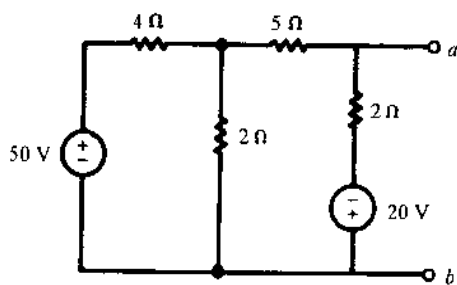


图 4-40

4.28 用网络化简的方法求图 4-41 电路中各电阻通过的电流。

答案: 在  $2.45\ \Omega$  电阻中, 通过电流为  $3.10\ \text{A}$ ;  $6.7\ \Omega$ ,  $0.855\ \text{A}$ ;  $10.0\ \Omega$ ,  $0.466\ \text{A}$ ;  $12.0\ \Omega$ ,  $0.389\ \text{A}$ ;  $17.47\ \Omega$ ,  $0.595\ \text{A}$ ;  $6.30\ \Omega$ ,  $1.65\ \text{A}$

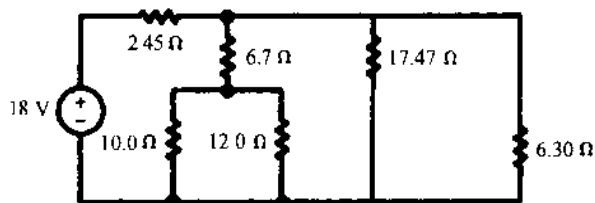


图 4-41

4.29 图 4-42 中两个检流计的指示均为  $1.70\ \text{A}$ , 如果电源提供的功率是  $300\ \text{W}$ , 求  $R_1$  和  $R_2$ 。

答案:  $23.9\ \Omega$ ,  $443.0\ \Omega$

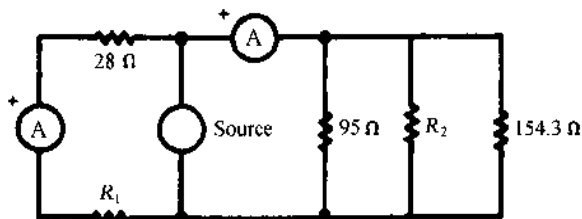


图 4-42

4.30 图 4-43 所示的电路中, 两个电流源提供的电流分别是  $I'$  和  $I''$ , 这里  $I' + I'' = I$ , 用叠加原理求这几个电流。

答案:  $1.2\ \text{A}$ ,  $15.0\ \text{A}$ ,  $16.2\ \text{A}$

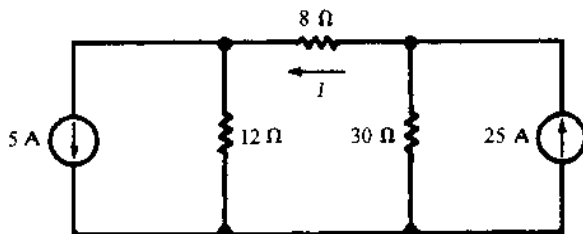


图 4-43

4.31 求图 4-44 所示电路的电流  $I$ 。

答案:  $-12\ \text{A}$

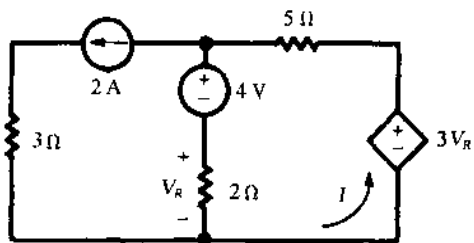


图 4-44

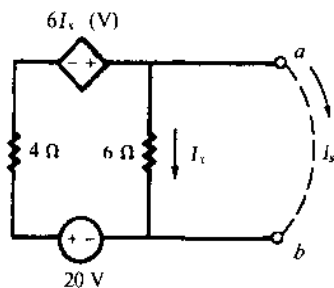


图 4-45

4.32 求图 4-45 所示电路的戴维南和诺顿等效电路。

答案:  $V' = 30 \text{ V}$ ,  $I' = 5 \text{ A}$ ,  $R' = 6 \Omega$

4.33 电路如图 4-46 所示, 求  $a, b$  点左端有源电路提供给右端可调电阻器的最大功率。

答案:  $8.44 \text{ W}$

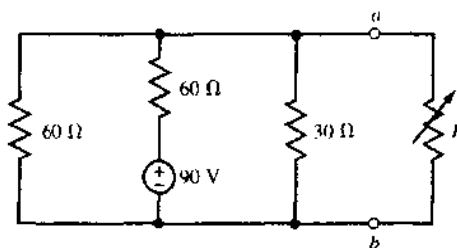


图 4-46

4.34 直流发电机在无负载情况下端电压是  $120 \text{ V}$ . 如果供出  $40 \text{ A}$  的额定电流时端电压将下降到  $112 \text{ V}$ . 求戴维南和诺顿等效电路。

答案:  $V' = 120 \text{ V}$ ,  $I' = 600 \text{ A}$ ,  $R' = 0.2 \Omega$

4.35 题 4.14 的网络重画为图 4-47 并加上端点  $a$  和  $b$ . 用戴维南或诺顿等效电路法化简  $a, b$  点左端的电路并求电流  $I$ .

答案:  $-8.77 \text{ A}$

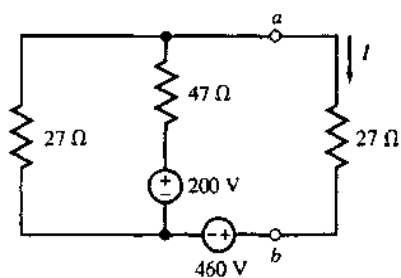


图 4-47

## 第5章 放大器和运算放大器电路

### 5.1 放大器模型

放大器是个放大信号的装置. 其核心是个受输入信号控制的电压源, 一个电压放大器的简化模型如图 5-1(a) 所示, 输入和输出的参考端经常接在一起作为公共参考点. 当输出端开路时, 有  $v_2 = kv_1$ , 这里  $k$  是相乘因子, 叫做开环电路增益; 电阻  $R_i$  和  $R_o$  分别是放大器的输入电阻和输出电阻. 为了使放大器更好的工作, 设计成  $R_i$  较大而  $R_o$  较小. 对于理想放大器  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$ , 如图 5-1(b) 所示. 偏离上述理想数值将使放大器总的增益下降.

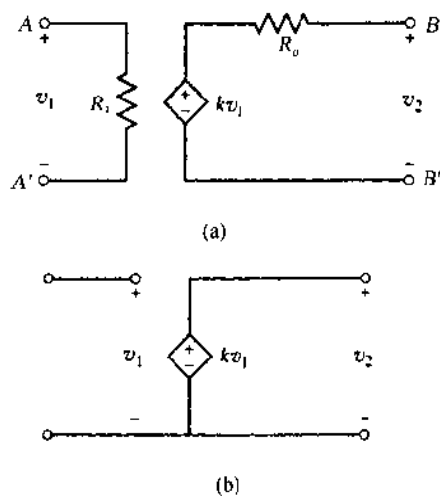


图 5-1

**例 5.1** 将一个内阻为  $R_s$  的实际电压源连接到输入电阻为  $R_i$  的电压放大器的输入端, 如图 5-2 所示. 求  $v_2/v_s$ .

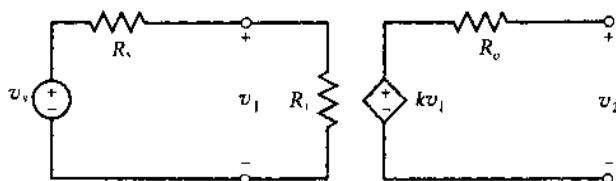


图 5-2

放大器的输入电压  $v_1$  是  $v_s$  经  $R_i$  和  $R_s$  之间分压得到

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

输出电压  $v_2$  是

$$v_2 = kv_1 = \frac{kR_i}{R_i + R_s} v_s$$

因此

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} k \quad (1)$$

放大器连接电压源后, 因子  $R_i/(R_i + R_s)$  使开环增益减少.

**例 5.2** 图 5-3 中有一个含内阻  $R_s$  的实际电压源  $v_s$ , 通过一个输入和输出电阻分别为  $R_i$ 、 $R_o$  的放大器向负载  $R_L$  传输信号, 求  $v_2/v_s$ 。

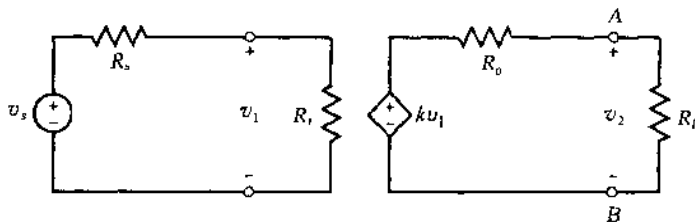


图 5-3

根据分压关系, 有

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

类似地, 这个输出电压是

$$v_2 = kv_1 \frac{R_L}{R_o + R_L} = k \frac{R_i R_L}{(R_i + R_s)(R_L + R_o)} v_s \quad \text{或} \quad \frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} \times \frac{R_L}{R_L + R_o} k \quad (2)$$

注意: 开环增益将因附加因子  $R_L/(R_L + R_o)$  进一步减少, 使输出电压也与负载的大小有关。

## 5.2 放大器电路的负反馈

对于图 5-4 所表示的理想放大器, 通过反馈电阻  $R_2$  将输出量的一部分反馈到放大器的输入端, 从而对放大器增益进行控制。反馈系数  $R_1/(R_1 + R_2)$  会影响放大器总的增益并使放大器对  $k$  的变化变得不敏感。

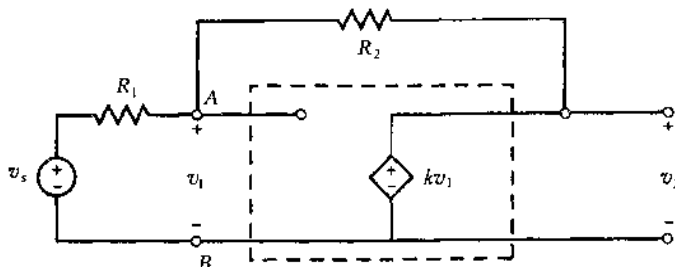


图 5-4

**例 5.3** 求图 5-4 中的  $v_2/v_s$ , 并将其表示成  $b = R_1/(R_1 + R_2)$  的函数。根据放大器关系有

$$v_2 = kv_1 \quad \text{或} \quad v_1 = v_2/k \quad (3)$$

对节点 A 应用 KCL, 得

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad (4)$$

将(3)式中的  $v_1$  代入(4)式, 得出

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_2 k}{R_2 + R_1 - R_1 k} = (1 - b) \frac{k}{1 - bk}, \quad \text{其中} \quad b = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (5)$$

**例 5.4** 图 5-5 中,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ 。(a)求作为开环增益  $k$  的函数的  $v_2/v_s$  表达式; (b)计算当  $k = 100$ , 及  $k = 1000$  时  $v_2/v_s$  的值并讨论结果。

(a)图 5-4 与图 5-5 的区别仅是受控电压源的极性不同。可以利用例 5-3 的结果求

$v_2/v_s$ , 并将(5)式中的  $k$  改为  $-k$ .

$$\frac{v_2}{v_s} = (1-b) \frac{-k}{1+bk}, \quad \text{其中} \quad b = \frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{6+k}$$

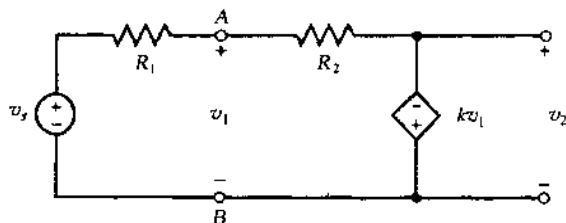


图 5-5

(b) 当  $k=100$  时,  $v_2/v_s = -4.72$ ; 当  $k=1000$  时,  $v_2/v_s = -4.97$ ; 这样  $k$  值增长 10 倍, 而  $v_2/v_s$  仅变化 5.3%, 即  $(4.97-4.72)/4.72 \approx 5.3\%$ . 当  $k$  的数值非常大时,  $v_2/v_s$  接近  $-R_2/R_1$ , 而与  $k$  无关.

### 5.3 运算放大器

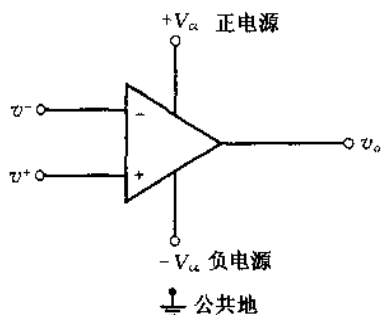


图 5-6

运算放大器是有两个输入端的器件, 分别用符号“+”和“-”表示, 称作同相输入端和反相输入端. 这个装置还需要连接直流电源 ( $V_{cc}$  和  $-V_{cc}$ ). 输入端、输出端和电源的公共参考点设计在运算放大器的外部, 叫做地线 (图 5-6).

输出电压  $v_o$  由  $v_d = v^+ - v^-$  决定. 忽略电容的影响, 传递函数可以用图 5-7 表示. 在线性工作区里  $v_o = A v_d$ . 开环增益  $A$  一般很高. 当  $v_d$  超过了线性范围  $|v_d| > V_{cc}/A$  时, 运算放大器饱和, 其数值为  $V_{cc}$  和  $-V_{cc}$ .

图 5-8 画出了工作在放大区的运算放大器模型, 为了简单起见, 图中省略了直流电压源. 在实际运算放大器中  $R_i$  很大, 而  $R_o$  较小,  $A$  的数值从  $10^5 \sim$  几百万. 当输出量保持在  $V_{cc}$  和  $-V_{cc}$  之间时, 图 5-8 的模型是有效的.  $V_{cc}$  的数值一般是  $5\text{ V} \sim 18\text{ V}$ .

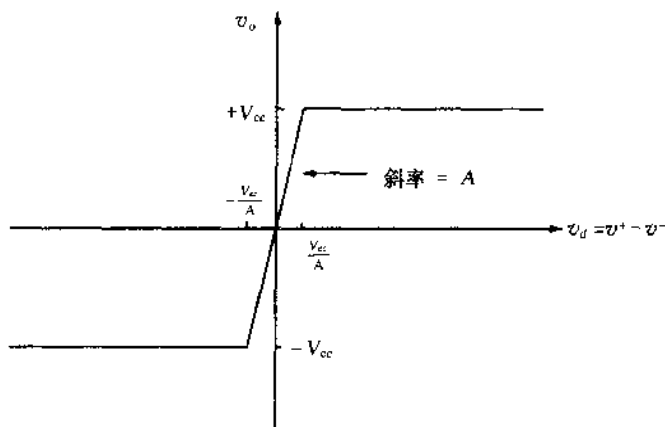


图 5-7

**例 5.5** 在图 5-8 的运算放大器中,  $V_{cc} = 15 \text{ V}$ ,  $A = 10^5$ ,  $v^- = 0$ . 求  $v^+$  在线性工作区的上限值.

$$|v_o| = |10^5 v^+| < 15 \text{ V}$$

$$|v^+| < 15 \times 10^{-5} \text{ V} = 150 \mu\text{V}$$

**例 5.6** 图 5-8 所示的运算放大器中,  $V_{cc} = 5 \text{ V}$ ,  $A = 10^5$ ,  $v^- = 0$ ,  $v^+ = 100 \sin 2\pi t (\mu\text{V})$ . 求开环输出电压  $v_o$ , 并画出  $v_o$  的波形.

运算放大器的输入电压是  $v_d = v^+ - v^- = v^+ = (100 \sin 2\pi t) 10^{-6} (\text{V})$ , 当运算放大器工作在线性区时,  $v_o = 10^5 v_d = 10 \sin 2\pi t (\text{V})$ . 输出电压将保持在  $+5 \text{ V} \sim -5 \text{ V}$  之间(图 5-9). 当输出电压  $v_o = 10 \sin 2\pi t (\text{V})$  达到  $5 \text{ V}$  时, 运算放大器开始饱和. 此时,  $t = 1/12 \text{ s}$ .  $t = 5/12 \text{ s}$  饱和结束. 类似的, 从  $7/12 \text{ s} \sim 11/12 \text{ s}$  期间运放饱和在  $-5 \text{ V}$ . 从  $t = 0 \text{ s} \sim t = 1 \text{ s}$ , 输出电压  $v_o$  为一个完整的周期, 表示如下

$$v_o = \begin{cases} +5 \text{ V} & 1/12 < t < 5/12 \\ -5 \text{ V} & 7/12 < t < 11/12 \\ 10 \sin 2\pi t \text{ V} & \text{其他} \end{cases}$$

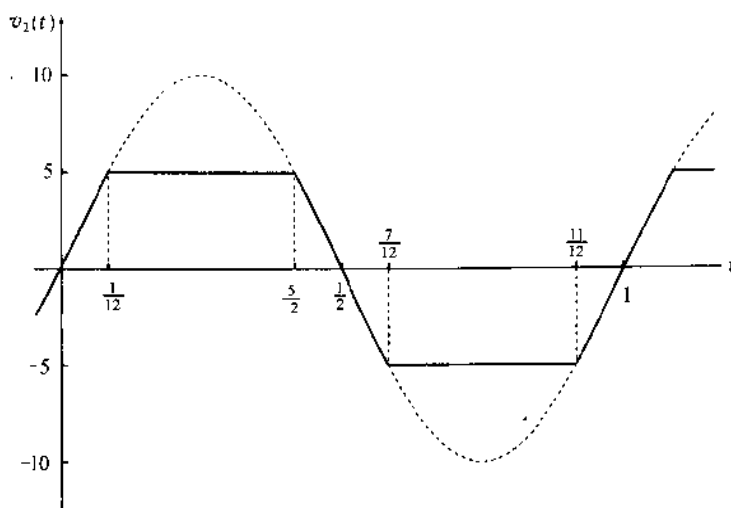


图 5-9

**例 5.7** 重新计算例 5.6 题,  $v^- = 0.25 \mu\text{V}$ ,  $v^+ = 50 \sin 2\pi t (\mu\text{V})$

$$v_d = v^+ - v^- = (50 \sin 2\pi t) \times 10^{-6} - 25 \times 10^{-6} = 50 \times 10^{-6} (\sin 2\pi t - 1/2) (\text{V})$$

当运算放大器工作在线性区时, 输出电压是

$$v_o = 10^5 v_d = 5 (\sin 2\pi t - 1/2) (\text{V})$$

当  $5 (\sin 2\pi t - 1/2) < -5 \text{ V}$ ,  $7/12 < t < 11/12$  时, 运算放大器饱和在  $-5 \text{ V}$  (见图 5-10). 从  $t = 0$  到  $t = 1 \text{ s}$ , 输出电压  $v_o$  为一个完整的周期, 表示如下

$$v_o = \begin{cases} -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 5 (\sin 2\pi t - 1/2) & \text{其他} \end{cases}$$

**例 5.8** 在图 5-11 中,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $R_i = 500 \text{ k}\Omega$ ,  $R_o = 0$ ,  $A = 10^5$ . 假定放大器不出现饱和, 求  $v_2/v_1$ .

流入节点 B 的电流之和为零. 注意到  $v_A = 0$ , 并且  $v_B = v_d$ , 所以

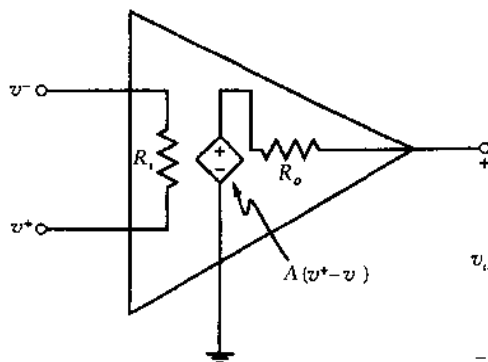


图 5-8

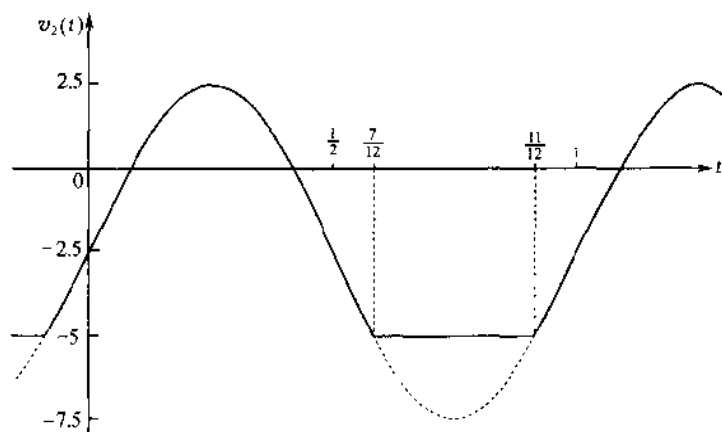


图 5-10

$$\frac{v_1 + v_d}{10} + \frac{v_d}{500} + \frac{v_2 + v_d}{50} = 0 \quad (6)$$

因为  $R_s = 0$ , 有

$$v_2 = Av_d = 10^5 v_d \quad \text{或者} \quad v_d = 10^{-5} v_2 \quad (7)$$

将(7)式中的  $v_d$  代入(6)式, 可以求出  $v_2/v_1$ .

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-5}{1 + 10^{-5} + 5 \times 10^{-5} + 0.1 \times 10^{-5}} = -5$$

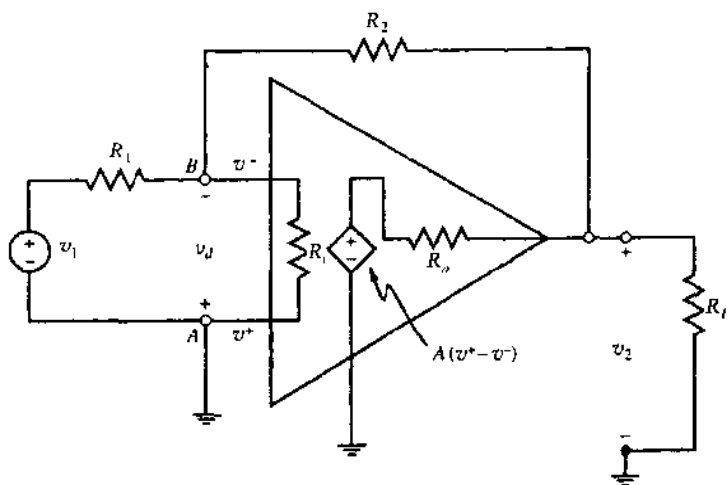


图 5-11

#### 5.4 含有理想运算放大器的电路分析

在理想运算放大器中,  $R_i$  和  $A$  为无限大,  $R_o$  是零. 所以, 理想运算放大器中反相端和同相端吸收的电流是零. 如果不出现饱和的情况, 两个输入端的电压相同. 在本章中, 如果不进行特别说明我们假定运算放大器是理想的, 都是工作在线性区内.

**例 5.9** 图 5-12 的运算放大器是理想的, 非饱和的. 求 (a)  $v_2/v_1$ ; (b) 输入电阻  $v_1/i_1$ ; (c)  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $p_1$  (电源  $v_1$  提供的功率), 以及  $p_2$  (各个电阻消耗的功率). 给定  $v_1 = 0.5 \text{ V}$ .

(a) 同相输入端  $A$  是接地端, 则  $v_A = 0$ . 因为运算放大器是理想的, 非饱和的,  $v_B = 0$ . 对节点  $B$  和  $C$  应用 KCL, 并考虑到运放不吸收电流, 得到



节点 B:  $\frac{v_1}{5} + \frac{v_C}{10} = 0$  或  $v_C = -2v_1$  (8)

节点 C:  $\frac{v_C}{10} + \frac{v_C}{1} + \frac{v_C - v_2}{2} = 0$  或  $v_2 = -3.2v_C$  (9)

将(8)式中的  $v_C$  代入(9)式

$$v_2 = -6.4v_1 \quad \text{或} \quad v_2/v_1 = -6.4$$

(b)  $V_B = 0$ ,  $i_1 = v_1/5000$ , 所以

$$\text{输入电阻} = v_1/i_1 = 5 \text{ k}\Omega$$

(c) 输入电流是  $i_1 = v_1/5000$ , 给定  $v_1 = 0.5$

$$\text{V}, i_1 = 0.5/5000 = 0.1 \text{ mA}.$$

为计算电流  $i_2$ , 我们在运算放大器的输出端应用 KCL:

$$i_2 - \frac{v_2}{8000} + \frac{v_2 - v_C}{2000}$$

从(a)中已知:  $v_2 = -3.2 \text{ V}$ ,  $v_C = -1 \text{ V}$ , 所以  $i_2 = 1.5 \text{ mA}$ .

由  $v_1$  提供的功率是:  $p_1 = v_1 i_1 = v_1^2/5000 = 50 \times 10^{-6} \text{ W} = 50 \mu\text{W}$

电阻器中消耗的功率是

$$1 \text{ k}\Omega \quad p_{1\text{k}\Omega} = v_C^2/1000 = 0.001 \text{ W} = 1000 \mu\text{W}$$

$$2 \text{ k}\Omega \quad p_{2\text{k}\Omega} = (v_2 - v_C)^2/2000 = 0.00242 \text{ W} = 2420 \mu\text{W}$$

$$5 \text{ k}\Omega \quad p_{5\text{k}\Omega} = v_1^2/5000 = 0.00005 \text{ W} = 50 \mu\text{W}$$

$$8 \text{ k}\Omega \quad p_{8\text{k}\Omega} = v_2^2/8000 = 0.00128 \text{ W} = 1280 \mu\text{W}$$

$$10 \text{ k}\Omega \quad p_{10\text{k}\Omega} = v_C^2/10000 = 0.0001 \text{ W} = 100 \mu\text{W}$$

电阻器中消耗的总功率是

$$p_2 = p_{1\text{k}\Omega} + p_{2\text{k}\Omega} + p_{5\text{k}\Omega} + p_{8\text{k}\Omega} + p_{10\text{k}\Omega} = 1000 + 2420 + 50 + 1280 + 100 = 4850 \mu\text{W}$$

## 5.5 反相电路

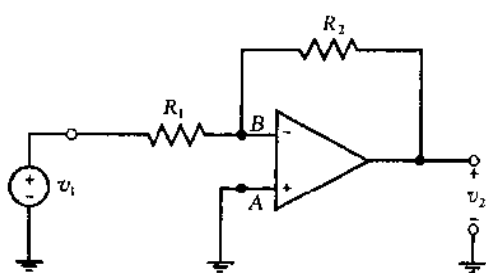


图 5-13

在反相电路中, 输入信号通过电阻  $R_1$  联接到运算放大器的反相端, 输出信号通过反馈电阻  $R_2$  连回到反相端, 运算放大器的同相端接地 (见图 5-13)。

为求出增益  $v_2/v_1$ , 将 KCL 用于计算流入节点 B 的电流。

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = 0 \quad \frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10)$$

增益值为负并仅由选择的电阻决定。该电路的输入电阻是  $R_1$ 。

## 5.6 求和电路

电路中多个电压的加权和可以用图 5-14 的电路求得。这种电路叫做求和电路, 属于反相电路的扩展。

为了求输出电压, 可以在反相输入端的节点应用 KCL 定律

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \cdots + \frac{v_n}{R_n} + \frac{v_o}{R_f} = 0$$

由此得出

$$v_o = - \left( \frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \cdots + \frac{R_f}{R_n} v_n \right) \quad (11)$$

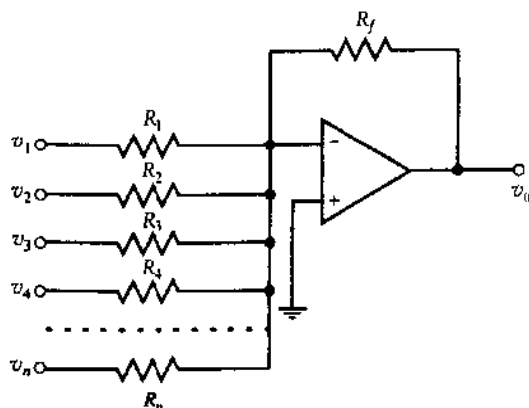


图 5-14

**例 5.10** 设图 5-14 电路有四个输入端, 分别接有电阻  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = \frac{1}{2}$ ,  $R_3 = \frac{1}{4}$ ,  $R_4 = \frac{1}{8}$ , 且  $R_f = 1$ , 所有电阻均以  $\text{k}\Omega$  为单位. 输入量设置为 0 V 或 1 V 求以下给定. 输入量  $v_4, v_3, v_2, v_1$  时的  $v_o$ .

$$(a) \quad v_4 = 1 \text{ V} \quad v_3 = 0 \quad v_2 = 0 \quad v_1 = 1 \text{ V}$$

$$(b) \quad v_4 = 1 \text{ V} \quad v_3 = 1 \text{ V} \quad v_2 = 1 \text{ V} \quad v_1 = 0$$

由(11)式得出

$$v_o = - (8v_4 + 4v_3 + 2v_2 + v_1)$$

代入  $v_1$  至  $v_4$  的值得出:

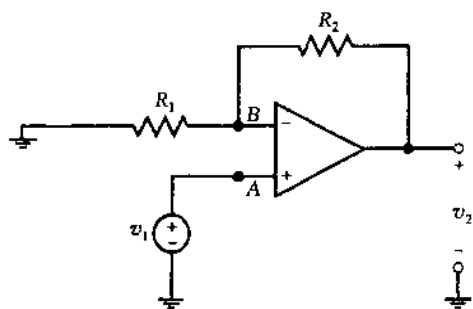
$$(a) \quad v_o = -9 \text{ V}$$

$$(b) \quad v_o = -14 \text{ V}$$

集合  $\{v_4, v_3, v_2, v_1\}$  形成了含有四位二进制数的序列, 每位为高电位(1 V)或低电位(0 V). 上述(a)(b)中给定的输入集合是相应的二进制数, 分别是  $(1001)_2 = (9)_{10}$  和  $(1110)_2 = (14)_{10}$ . 使输入为 0 V(低电平)和 1 V(高电平), 电路将输入集合  $\{v_4, v_3, v_2, v_1\}$  描述的二进制数列转换成为负电压. 以 V 测量时, 输出电压等于输入组的十进制表示的数值. 这个电路又叫做数模转换电路.

## 5.7 同相电路

同相电路的信号从运算放大器同相端输入. 反相输入端经过电阻  $R_2$  接到输出端, 并通过  $R_1$  接地(见图 5-15).



在节点 B 应用 KCL 求增益  $v_2/v_1$  的数值. 注意, 节点 A 和节点 B 电压均为  $v_1$ , 并且运算放大器不吸收电流.

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad \frac{v_2}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (12)$$

同相电路的增益  $v_2/v_1$  是正值, 并且是大于或等于 1 的. 因为运放不吸收电流, 电路的输入电阻是无限大.

图 5-15

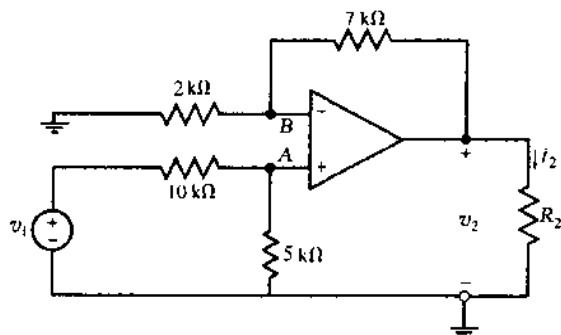


图 5-16

例 5.11 电路如图 5-16 所示, 求  $v_2/v_1$ .

首先根据  $v_1$  在  $10\text{ k}\Omega$  和  $5\text{ k}\Omega$  电阻器上的分压关系求出  $v_A$

$$v_A = \frac{5}{5+10}v_1 = \frac{1}{3}v_1$$

从(12)式可得

$$v_2 = \left(1 + \frac{7}{2}\right)v_A = \frac{9}{2}v_A = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}v_1\right) = 1.5v_1$$

所以  $\frac{v_2}{v_1} = 1.5$ .

另一种方法:

首先根据  $v_2$  在  $2\text{ k}\Omega$  和  $7\text{ k}\Omega$  电阻器上的分压求出  $v_B$ , 然后设定  $v_B = v_A$ :

$$v_B = \frac{2}{2+7}v_2 = \frac{2}{9}v_2 = \frac{1}{3}v_1$$

所以  $\frac{v_2}{v_1} = 1.5$ .

例 5.12 电路如图 5-17 所示, 以  $v_1, v_2, v_3$  及所示电路元件确定电压  $v_o$ .

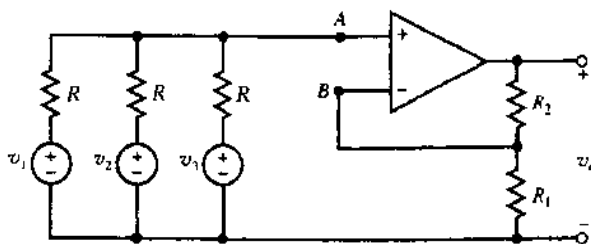


图 5-17

首先在节点 A 应用 KCL 求出  $v_A$ .

$$\frac{v_1 - v_A}{R} + \frac{v_2 - v_A}{R} + \frac{v_3 - v_A}{R} = 0 \quad \text{或} \quad v_A = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \quad (13)$$

由(12)式和(13)式可得:

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_A = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(v_1 + v_2 + v_3) \quad (14)$$

## 5.8 电压跟随器

图 5-18(a)电路中的运算放大器提供了一个单位增益的放大器, 由于  $v_1 = v^+$ ,  $v_2 = v^-$ , 及  $v^+ = v^-$ , 因此放大器中  $v_2 = v_1$ . 输出电压  $v_2$  跟随输入信号  $v_1$  变化. 由对  $R_f$  提供的电流

$i_l$ , 使运算放大器消除了加在电压源上的  $R_l$  的负载效应. 因此像缓冲器的功能.

**例 5.13** (a) 求图 5-18(a) 中的  $i_s$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  和  $i_l$ . (b) 将这个结果与如图 5-18(b) 所示的信号源直接与负载相连所得到的结果相比较.

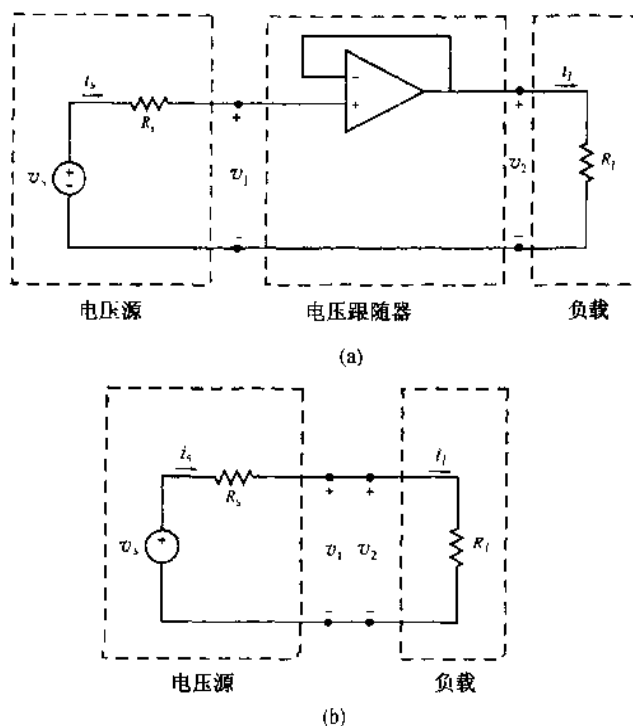


图 5-18

(a) 存在运算放大器的情况[图 5-18(a)], 有

$$i_s = 0 \quad v_1 = v_s \quad v_2 = v_1 = v_s \quad i_l = v_s / R_l$$

作为电压跟随器的运算放大器不从信号源  $v_s$  吸收电流. 因此带有负载  $R_l$  的电压  $v_s$  并没有因为负载电流而减少. 负载  $R_l$  中的电流是运放提供的.

(b) 去掉运算放大器[图 5-18(b)], 有

$$i_s = i_l = \frac{v_s}{R_l + R_s} \quad \text{及} \quad v_1 = v_2 = \frac{R_l}{R_l + R_s} v_s$$

负载  $R_l$  中的电流也经过  $R_s$  并在  $R_s$  上产生了电压降. 负载电压  $v_2$  与  $R_l$  有关.

## 5.9 差动与差动放大器

没有接地的信号源  $v_f$  叫做浮动信号源, 这样一个信号可以用图 5-19 所示电路进行放大. 这里运算放大器的两个输入端 A 和 B 的电压相同. 因此, 围绕输入回路写出 KVL 方程得

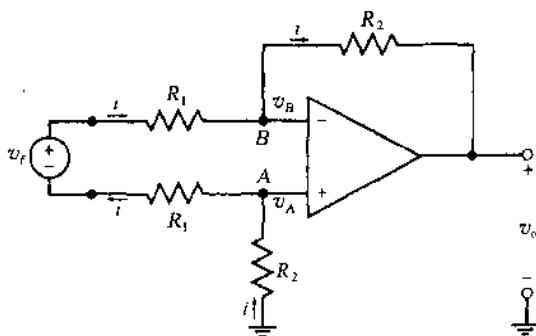


图 5-19

到:

$$v_f = 2R_1 i \quad i = v_f / 2R_1$$

运算放大器的输入端不吸收电流, 所以电流  $i$  也流过电阻  $R_2$ . 对运算放大器应用 KVL, 有

$$v_o + R_2 i + R_2 i = 0 \quad v_o = -2R_2 i = -2R_2 v_f / 2R_1 = -(R_2 / R_1) v_f \quad (15)$$

在特定情况下, 有公共地线的两个电压源  $v_1$  和  $v_2$  分别接到电路的反相输入端和同相输入端时, 有  $v_f = v_1 - v_2$

并且

$$v_o = (R_2 / R_1)(v_2 - v_1) \quad (16)$$

**例 5.14** 在图 5-20 所示电路中, 求作为  $v_1$  和  $v_2$  的函数  $v_o$ .

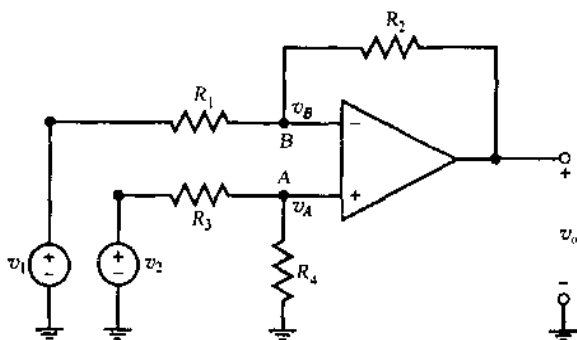


图 5-20

对节点 A 和 B 应用 KCL 方程

$$\text{节点 A} \quad \frac{v_A - v_2}{R_3} + \frac{v_A}{R_4} = 0$$

$$\text{节点 B} \quad \frac{v_B - v_1}{R_1} + \frac{v_B - v_o}{R_2} = 0$$

令  $v_A = v_B$ , 并从上述 KCL 方程中消去它们, 得到

$$v_o = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (17)$$

当  $R_3 = R_1$ ,  $R_2 = R_4$  时 (17) 式可以简化为 (16) 式.

### 5.10 含有多个运放的电路

因为运算放大器不存在负载效应, 所以关于单个运算放大器电路的分析和结论可以应用到含有多个理想运算放大器级联或者箝套的电路中.

**例 5.15** 求图 5-21 中的  $v_1$  和  $v_2$ .

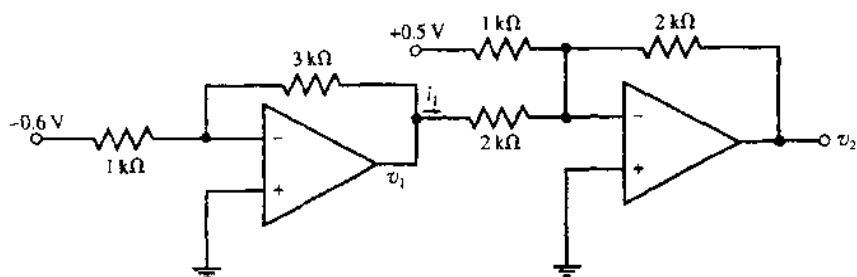


图 5-21

第一个运算放大器是反相电路

$$v_1 = -(3/1)(-0.6) = 1.8 \text{ V}$$

第二个运算放大器是求和电路

$$v_2 = -(2/1)(0.5) - (2/2)(1.8) = -2.8 \text{ V}$$

**例 5.16** 电路如图 5-22 所示, 令  $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ , 当 (a)  $R_f = \infty$ ; (b)  $R_f = 40 \text{ k}\Omega$  时, 分别求作为  $v_s$  函数的  $v_1, v_2, v_o$  和  $i_s, i_1, i_f$ .

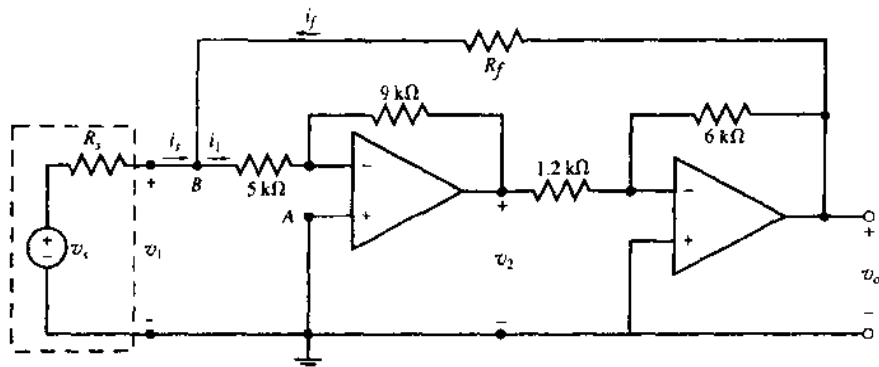


图 5-22

(a)  $R_f = \infty$ . 两个反相运算放大器是级联的,  $v^+ = 0$ . 根据输入回路的分压关系有

$$v_1 = \frac{5}{5+1} v_s = \frac{5}{6} v_s \quad (18)$$

从反相放大器得到

$$v_2 = -(9/5)v_1 = -(9/5)\left\{\frac{5}{6}v_s\right\} = -1.5v_s$$

$$v_o = -(6/1.2)v_2 = -5(-1.5v_s) = 7.5v_s$$

$$i_s = i_1 = \frac{v_s}{6000} (\text{A}) = 0.166 v_s (\text{mA})$$

$$i_f = 0$$

(b)  $R_f = 40 \text{ k}\Omega$ . 从反相运算放大器已得到:  $v_o = -5v_2$  及  $v_2 = -(9/5)v_1$ , 所以  $v_o = 9v_1$ . 对流出节点 B 的电流应用 KCL

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1}{5} - \frac{v_1 - v_o}{40} = 0 \quad (19)$$

将  $v_o = 9v_1$  代入(19)式, 解出  $v_1$  得

$$v_1 = v_s$$

$$v_2 = -(9/5)v_1 = -1.8v_s$$

$$v_o = -(6/1.2)v_2 = -5(-1.8)v_s = 9v_s$$

$$i_s = \frac{v_s - v_1}{1000} = 0$$

在节点 B 应用 KCL, 有

$$i_f = i_1 = \frac{v_1}{5000} (\text{A}) = \frac{v_s}{5000} (\text{A}) = 0.2 v_s (\text{mA})$$

第一个运算放大器的  $5 \text{ k}\Omega$  输入电阻中的电流  $i_1$  是第二个运算放大器的输出经过  $40 \text{ k}\Omega$  反馈电阻提供的, 所以从  $v_s$  吸收的电流  $i_s$  是零. 这个电路的输入电阻是无限大.

## 5.11 积分器与微分器电路

### 积分器

用一个电容代替图 5-13 反相放大器中的反馈电阻, 就形成了图 5-23 所示的基本积分器

电路.

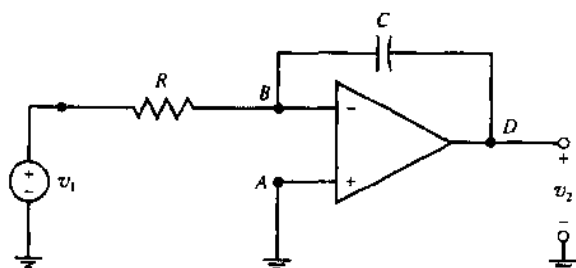


图 5-23

在反相输入节点应用 KCL 可以得到电路的输入-输出关系.

$$\frac{v_1}{R} + C \frac{dv_2}{dt} = 0, \quad \text{由此得到} \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC}v_1$$

则

$$v_2 = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_1 dt \quad (20)$$

即, 输出量等于输入的积分与增益因子  $-1/RC$  的乘积.

**例 5.17** 在图 5-23 中, 令  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ , 以及  $v_1 = \sin 2000t$ . 假定  $v_2(0) = 0$ , 求  $t > 0$  时的  $v_2$  值.

$$v_2 = -\frac{1}{10^3 \times 10^{-6}} \int_0^t \sin 2000t dt = 0.5(\cos 2000t - 1)$$

### 有泄漏的积分器

图 5-24 所示电路中, 由于电容两端的电压不断经过反馈电阻  $R_f$  放电, 因此叫做有泄漏的积分器. 这将使放大倍数  $|v_2/v_1|$  下降, 并在  $v_2$  有一个相位移. 在 5.13 节将对这一问题作进一步讨论.

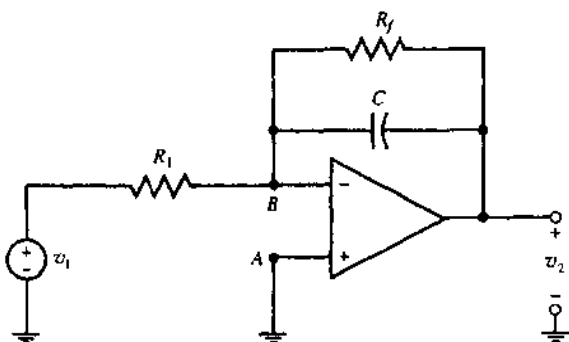


图 5-24

**例 5.18** 在图 5-24 中,  $R_1 = R_f = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$  以及  $v_1 = \sin 2000t$ , 求  $v_2$ .

反相输入节点电压为零, 在这个节点上的电流和为零. 这样,

$$\frac{v_1}{R_1} + C \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_f} = 0 \quad \text{或} \quad v_1 + 10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0$$

$$10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = -\sin 2000t \quad (21)$$

对(21)式求解的  $v_2$  是与  $v_1$  有相同频率的正弦信号, 但幅值和相位角不同. 即

$$v_2 = A \cos(2000t + B) \quad (22)$$

要求出  $A$  和  $B$ , 我们将(22)式中的  $v_2$  和  $dv_2/dt$  代入(21)式, 首先有

$$dv/dt = -2000A\sin(2000t + B)$$

这样

$$10^{-3}dv_2/dt + v_2 = -2A\sin(2000t + B) + A\cos(2000t + B) = -\sin 2000t$$

但是

$$2A\sin(2000t + B) - A\cos(2000t + B) = A\sqrt{5}\sin(2000t + B - 26.57^\circ) = \sin 2000t$$

所以,  $A = \sqrt{5}/5 = 0.447$ ,  $B = 26.57^\circ$ , 以及

$$v_2 = 0.447\cos(2000t + 26.57^\circ) \quad (23)$$

### 积分求和放大器

如图 5-25 所示, 在反相端具有多个输入和一个反馈电容构成的一个单运放电路, 可以对几个具有期望增益的函数进行积分求和运算。

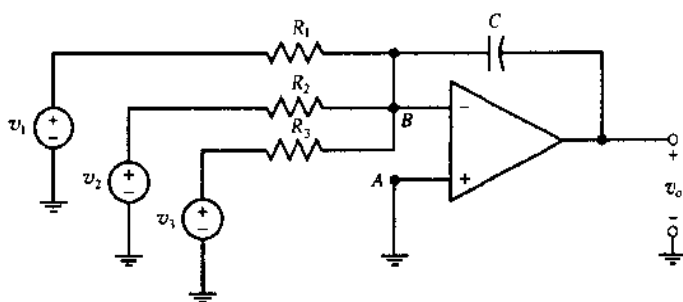


图 5-25

**例 5.19** 求图 5-25 所示有三个输入端的积分求和放大器的输出电压  $v_o$ 。

对运算放大器的反相输入端应用 KCL, 得出

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} + C \frac{dv_o}{dt} &= 0 \\ v_o &= - \int_{-\infty}^t \left( \frac{v_1}{CR_1} + \frac{v_2}{CR_2} + \frac{v_3}{CR_3} \right) dt \end{aligned} \quad (24)$$

### 积分器的初始条件

积分器所要求的初始条件  $v_0$  是由图 5-26 所示电路中一个复位开关提供的。开关瞬间闭合然后在  $t = t_0$  打开, 电容两端便建立了初始电压  $v_0$ , 这个电压在输出端是  $v_2$ 。在  $t > t_0$  时, 输入电压的加权积分被加到输出端, 得

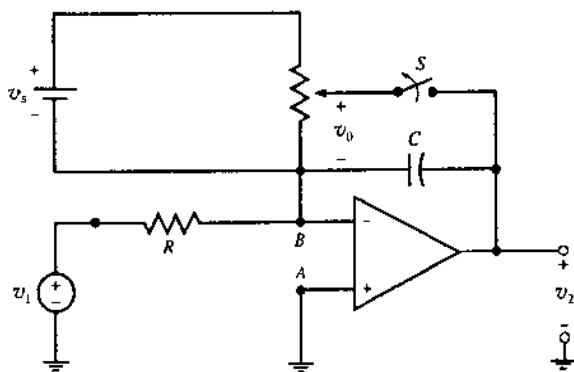


图 5-26



$$v_2 = -\frac{1}{CR} \int_{t_0}^t v_1 dt + v_0 \quad (25)$$

### 微分器

在反相放大器中用一个电感代替反馈支路的电阻,在输出端就产生输入信号的导数.图 5-27 说明构成的微分电路.

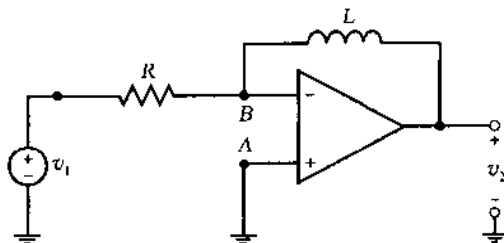


图 5-27

为得出输入量与输出量的关系,对反相输入节点的电流应用 KCL,得

$$\frac{v_1}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_2 dt = 0 \quad \text{或} \quad v_2 = -\frac{L}{R} \frac{dv_1}{dt} \quad (26)$$

### 5.12 模拟计算机

前面几节介绍的反相放大器、求和电路以及积分电路常被用作构成模拟计算机的基本模块,通常用来求解线性微分方程.考虑到噪音的影响,尽管噪音是低电平的,也要避免使用微分器.

为了设计一个计算电路,首先重新排列微分方程,以使所求变量最高次导数项放在方程的一边,其他项放在方程的另一边.然后用一个积分求和电路开始对方程进行积分.像下面例题中表示的那样,将加法积分器与放大器级联或者嵌套.本节中使用符号:  $x' = dx/dt$ ,  $x'' = d^2x/dt^2$  等等.

**例 5.20** 设计一个电路输入为  $x(t)$ , 输出为  $y(t)$ , 使其满足下面的方程

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x(t) \quad (27)$$

第一步:重新排列微分方程(27),使其为

$$y'' = x - 2y' - 3y \quad (28)$$

第二步:用图 5-28 中的积分求和运算放大器 #1 对(28)式进行积分.用(24)式求

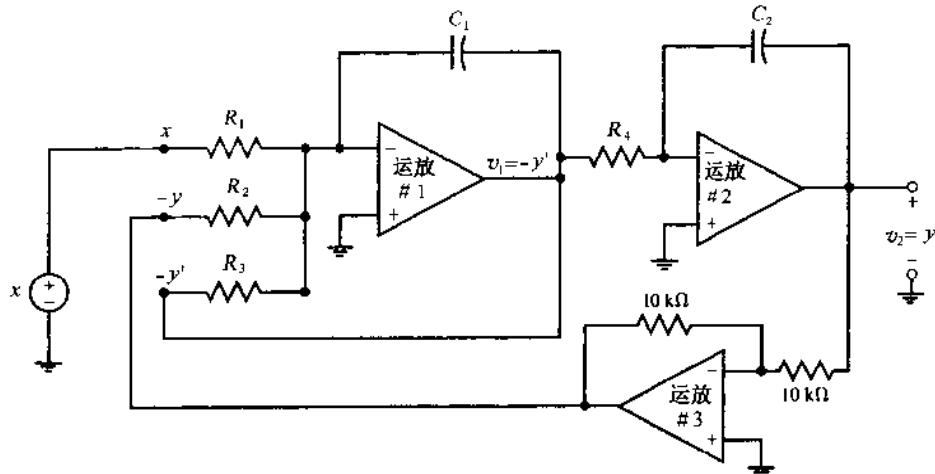


图 5-28

$R_1, R_2, R_3$  和  $C_1$ , 以使运算放大器 #1 的输出是  $v_1 = -y'$ . 令  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  并依此计算出其他电阻.

$$\begin{aligned} R_1 C_1 &= 1 & R_1 &= 1 \text{ M}\Omega \\ R_2 C_1 &= 1/3 & R_2 &= 333 \text{ k}\Omega \\ R_3 C_1 &= 1/2 & R_3 &= 500 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

$$v_1 = - \int (x - 3y' - 2y') dt = - \int y'' dt = - y' \quad (29)$$

第三步: 利用 #2 运算放大器对  $v_1 = -y'$  进行积分, 求出  $y$ . 令  $C_2 = 1 \mu\text{F}$  和  $R_4 = 1 \text{ M}\Omega$  在运算放大器 #2 的输出端得到  $v_2 = y$ .

$$v_2 = - \frac{1}{R_4 C_2} \int v_1 dt = \int y' dt = y \quad (30)$$

第四步: 通过下面图中的连接对运算放大器 #1 提供输入信号. 直接将  $v_1 = -y'$  反馈到运算放大器 #1 接有电阻  $R_3$  的输入端.  $v_2 = y$  通过单位增益的反相放大器  $3^\#$ , 得到  $-y$ , 然后把它反馈到运算放大器 #1 接有电阻  $R_2$  的输入端. 电压源  $x(t)$  接到运算放大器 #1 接有电阻  $R_1$  的输入端. 完整的电路如图 5-28 所示.

**例 5.21** 设计一个能作为理想电压源  $v(t)$  的运算放大器电路, 使得  $t > 0$  时  $v(t)$  满足方程  $v' + v = 0, v(0) = 1 \text{ V}$ .

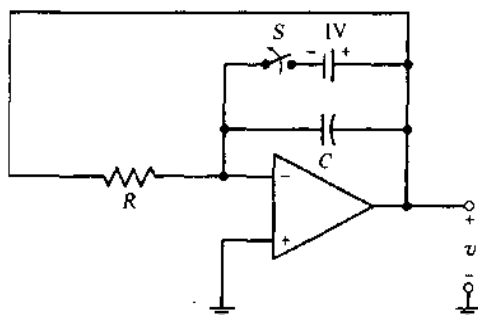


图 5-29

按照例 5-20 的设计步骤设计图 5-29 电路, 使  $RC = 1 \text{ s}$ . 在  $t = 0 \text{ s}$  打开开关时, 代入初始条件. 可观察到运算放大器的输出为  $v(t) = e^{-t}, t > 0$ .

### 5.13 低通滤波器

当正弦输入信号的频率从直流增加到无限大时, 频率选择放大器的增益会从有限值减小到零, 这种放大器叫做低通滤波器. 增益与频率的变化曲线叫做频率响应曲线. 求滤波器的频率响应简易技术将在第 13 章中介绍. 图 5-24 所示有泄漏的积分器是下面例题中要说明的一个低通滤波器.

**例 5.22** 在例题 5.18 中令  $v_1 = \sin \omega t$ , 求在  $\omega = 0, 10, 100, 10^3, 10^4, 10^5 \text{ rad/s}$  时的  $|v_2|$  值. 重复例 5.18 的过程, 求出频率响应, 并在表 5-1 中给出. 响应的幅值随着频率的增加而减少, 这个电路是低通滤波器.

表 5-1 低通滤波器的频率响应

$\omega, \text{rad/s}$	0	10	100	$10^3$	$10^4$	$10^5$
$f, \text{Hz}$	0	1.59	15.9	159	$1.59 \times 10^3$	$15.9 \times 10^3$
$ v_2/v_1 $	1	1	0.995	0.707	0.1	0.01

### 5.14 比较器

图 5-30 所示电路可以将输入电压  $v_1$  与参考电压  $v_o$  进行比较. 因为电路的开环增益非常大, 所以运算放大器输出电压  $v_2$  或者是  $V_{cc}$  (当  $v_1 > v_o$  时) 或者是  $-V_{cc}$  (当  $v_1 < v_o$  时). 可以用  $v_2 = V_{cc} \text{sgn}[v_1 - v_o]$  表示, 其中“sgn”代表“取符号”. 例如  $v_o = 0$ , 有

$$v_2 = V_{cc} \text{sgn}[v_1] = \begin{cases} +V_{cc} & v_1 > 0 \\ -V_{cc} & v_1 < 0 \end{cases}$$

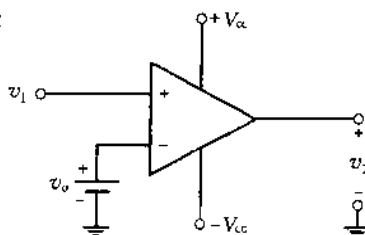


图 5-30

**例 5.23** 图 5-30 中  $V_{cc} = 5 \text{ V}$ ,  $v_o = 0$ ,  $v_1 = \sin \omega t$ , 求  $v_2$ .

$0 < t < \pi/\omega$ ,

$$v_1 = \sin \omega t > 0 \quad v_2 = 5 \text{ V}$$

$\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ ,

$$v_1 = \sin \omega t < 0 \quad v_2 = -5 \text{ V}$$

输出电压  $v_2$  是方波脉冲, 它以  $2\pi/\omega$  为周期在  $+5 \text{ V}$  和  $-5 \text{ V}$  开关变化.  $v_2$  在一个周期的表达式可以写成

$$v_2 = \begin{cases} 5 \text{ V} & 0 < t < \pi/\omega \\ -5 \text{ V} & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

**例 5.24** 图 5-31 电路是一个并联的模拟量-数字量转换器. 为了简单起见, 运放的电源  $+V_{cc}$  和  $-V_{cc}$  没有画出来. 已知:  $V_{cc} = 5 \text{ V}$ ,  $v_o = 4 \text{ V}$ , 当  $0 < t < 4 \text{ s}$  时  $v_i = t \text{ (V)}$ , 求输出  $v_3, v_2, v_1$ , 并解释结果.

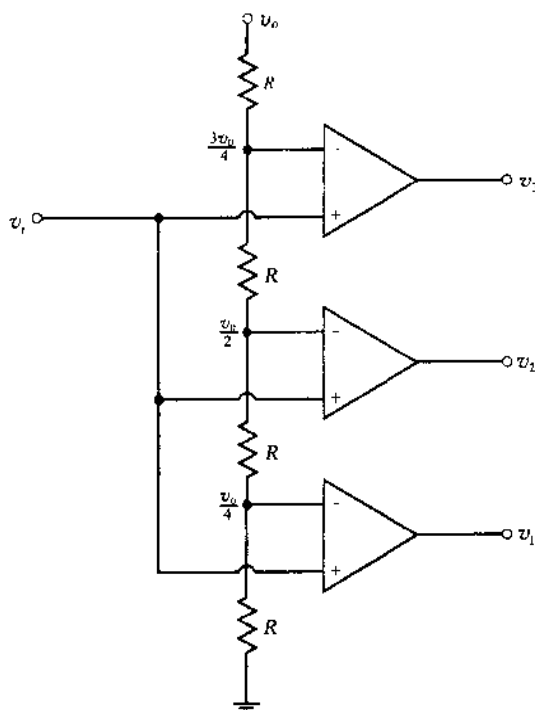


图 5-31

运算放大器没有反馈, 它们作为比较器使用. 表 5-2 给出了  $+5 \text{ V}$  或者  $-5 \text{ V}$  的输出结果.

表 5-2 中二进制序列  $\{v_3, v_2, v_1\}$  是在离散域中表示输入电压的惟一对应值. 然而, 表中的这种形式还不是表示输入量幅值的二进制数. 用二进制编码器可以将

上面的序列转换成与模拟输入量相应的二进制数。

表 5-2

时间[s]	输入电压[V]	输出电压[V]		
$0 < t < 1$	$0 < v_i < 1$	$v_3 = -5$	$v_2 = -5$	$v_1 = -5$
$1 < t < 2$	$1 < v_i < 2$	$v_3 = -5$	$v_2 = -5$	$v_1 = +5$
$2 < t < 3$	$2 < v_i < 3$	$v_3 = -5$	$v_2 = +5$	$v_1 = +5$
$3 < t < 4$	$3 < v_i < 4$	$v_3 = +5$	$v_2 = +5$	$v_1 = +5$

### 习题及解答

- 5.1 在图 5-3 电路中, 已知:  $v_s = 20\text{ V}$ ,  $R_s = 10\ \Omega$ ,  $R_i = 990\ \Omega$ ,  $k = 5$ ,  $R_o = 3\ \Omega$ . 求 (a) 从  $R_i$  两端看入的戴维南等效电路; (b) 当  $R_i = 0.5, 1, 3, 5, 10, 100$  和  $1000\ \Omega$  时,  $v_2$  的值及  $R_i$  上消耗的功率。

解 (a) 在 A-B 端的开路电压及短路电流分别是  $v_{o.c.} = 5v_1$  和  $i_{s.c.} = 5v_1/3$ .

利用  $v_s$  在  $R_s$  和  $R_i$  得分压关系求  $v_1$ , 这样

$$v_1 = \frac{R_i}{R_s + R_i} v_s = \frac{990}{10 + 990} (20) = 19.8\text{ V}$$

所以

$$\begin{aligned} v_{o.c.} &= 5(19.8) = 99\text{ V} & v_{Th} &= v_{o.c.} = 99\text{ V} \\ i_{s.c.} &= 99/3 = 33\text{ A} & R_{Th} &= v_{o.c.}/i_{s.c.} = 3\ \Omega \end{aligned}$$

戴维南等效电路如图 5-32 所示。

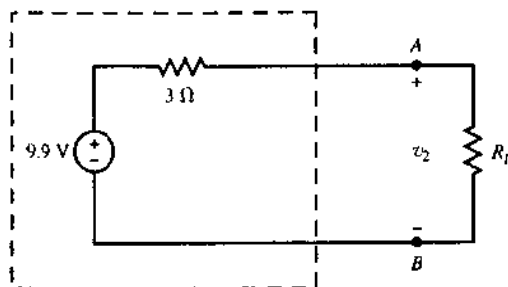


图 5-32

- (b) 连接负载  $R_i$ , 有

$$v_2 = \frac{R_i}{R_i + R_{Th}} v_{Th} = \frac{99R_i}{R_i + 3} \quad \text{以及} \quad p = \frac{v_2^2}{R_i}$$

表 5-3 说明了负载两端的电压和在七个给定的  $R_i$  数值时负载消耗的功率。当  $R_i = \infty$  时负载电压有最大值。然而当  $R_i = \infty$  时消耗的功率是零。在  $R_i = 3\ \Omega$  时负载消耗的功率最大, 这个电阻的数值正好是放大器的输出电阻值。

表 5-3

$R_i, \Omega$	$v_2, \text{V}$	P, W
0.5	14.14	400.04
1	24.75	612.56
3	49.50	816.75
5	61.88	765.70
10	76.15	579.94
100	96.12	92.38
1000	98.70	9.74

- 5.2 在图 5-4 和 5-5 电路中, 已知:  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ , 求图 5-4 中的增益  $G^+ = v_2/v_s$  及图 5-5 中的  $G^- = v_2/v_s$ , 其中,  $k = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1000$  和  $\infty$ . 并比较结果.

解 根据例 5.3 中的(5)式, 代入  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  及  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ , 我们有

$$G^+ = \frac{v_2}{v_s} = \frac{5k}{6-k} \quad (31)$$

在例 5.4 中, 我们有

$$G^- = \frac{v_2}{v_s} = -\frac{5k}{6+k} \quad (32)$$

对表 5-4 中给定的  $k$  的九个数值计算增益  $G$  和  $G^+$ .  $k$  值非常大时,  $G^+$  和  $G^-$  趋近极限增益  $-5 \text{ V}$ , 也就是电阻  $R_2/R_1$  比值的负值, 而与  $k$  无关. 图 5-5 所示电路(负反馈电路)总是稳定的, 它的增益单调的接近极限值. 但是对于图 5-4 所示的电路(正反馈电路)是不稳定的. 随着  $k$  接近 6, 增益  $G^+$  变的非常大. 在  $k = 6$  时,  $G^+ = \infty$ .

表 5-4

$k$	$G^+$	$G^-$
1	1.0	0.71
2	2.5	-1.25
4	10.0	-2.00
6	$\infty$	-2.50
8	-20.0	-2.86
10	-12.5	-3.13
100	-5.32	-4.72
1000	-5.03	-4.97
$\infty$	-5.00	-5.00

- 5.3 在图 5-33 所示电路中, 已知:  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_i = 50 \text{ k}\Omega$ . 求  $k = 1, 10, 100, 1000$  和  $\infty$  时的  $v_2/v_s$ , 并将结果与表 5-4 中的  $G^-$  进行比较.

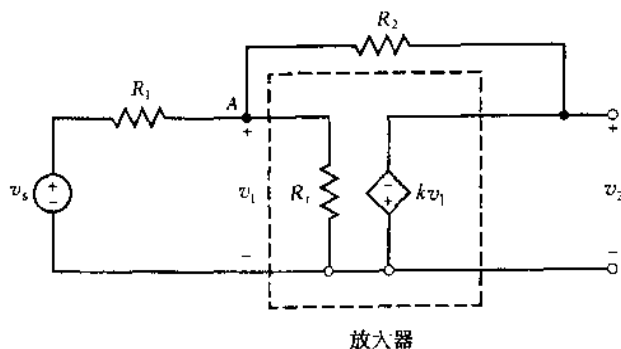


图 5-33

解 这一题可以在节点 A 应用 KCL 进行求解(还可以利用习题 5.30 建议的戴维南等效电路的方法求解). 这样

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{50} = 0 \quad (33)$$

由放大器得到

$$v_2 = -kv_1 \quad \text{或} \quad v_1 = v_2/k \quad (34)$$

将(34)式中的  $v_1$  代入(33)式, 进行整理得出

表 5-5

$k$	$v_2/v_1$
1	-0.704
10	-3.106
100	-4.713
1000	-4.97
$\infty$	-5.00

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-50k}{61 + 10k} = \frac{-5k}{6.1 + k} \quad (35)$$

(35)式中 $\frac{v_2}{v_s}$ 作为 $k$ 的函数在表 5-5 中示出. 比较表 5-4 和表 5-5 可见, 放大器的 50 k $\Omega$  输入电阻对总增益的削弱作用非常微小. 反馈降低了放大器的输入电阻对总增益变化的影响.

5.4 再次假定图 5-33 所示电路中:  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ .

(a) 求  $k$  和  $R_i$  的函数  $v_2/v_s$ .

(b) 假设  $R_i = 1 \text{ k}\Omega$ , 求  $k = 1, 10, 100, 1000$  和  $\infty$  时的  $v_2/v_s$ . 重复求  $R_i = \infty$  的情况.

(c) 讨论  $R_i$  和  $k$  值对总增益的影响. 说明在  $k = \infty$  以及  $R_i \neq 0$  时放大器的总增益与  $R_i$  无关, 等于  $-R_2/R_1$ .

解 (a) 对流出节点 A 的电流应用 KCL, 得到

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{R_i} = 0$$

由放大器关系我们得到:  $v_2 = -kv_1$ , 或  $v_1 = -v_2/k$ . 将  $v_1$  代入 KCL 方程, 经过整理得到

$$\frac{v_2}{v_s} = -5 \frac{ck}{1 + ck}, \quad \text{这里 } c = \frac{R_i}{5 + 6R_i} \quad (36)$$

(b) 将  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $c = 1/11$  代入(36)式, 得到

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{11 + k} \quad (37)$$

因为  $R_i = \infty$ , 有  $c = 1/6$ , 所以

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{6 + k} \quad (38)$$

表 5-6 中给出了(37)和(38)式中的  $v_2/v_s$  相对于  $k$  的值. 请注意(38)式与(32)式一致.

表 5-6

$k$	$v_2/v_s$	
	$R_i = 1 \text{ k}\Omega$	$R_i = \infty$
1	-0.31	-0.71
10	-2.38	-3.12
100	-4.51	-4.72
1000	-4.95	-4.97
$\infty$	-5.00	-5.00

(c) 比较表 5-6 中的两列, 就会发现较小的  $R_i$  会使总的增益值减少. 而随着开环增益  $k$  值的提高,  $R_i$  的影响减弱. 当  $k$  变得非常大且  $R_i \neq 0$  时,  $v_2/v_s$  的数值趋近  $-5 \text{ V}$ .

5.5 再设图 5-33 电路中  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ . 将节点 A 以左的电路, 包括  $v_s$ ,  $R_1$ , 及  $R_i$ , 用戴维南等效电路代替. 然后用(5)式导出(36)式.

解 (a) 戴维南等效电路由下式确定

$$v_{Th} = \frac{R_i v_s}{R_1 + R_i} = \frac{R_i v_s}{1 + R_i}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_i}{R_1 + R_i} = \frac{R_i}{1 + R_i}$$

这里电阻以 k $\Omega$  为单位.

由(5)式可知

$$v_2 = (1 - b) \frac{-k}{1 + bk} v_{Th}$$

这里,  $b = \frac{R_{1b}}{R_{1b} + R_2} = \frac{R_i}{6R_i + 5}$ , 并且  $1 + b = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5}$ .

所以

$$v_2 = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5} \times \frac{-k}{1 + R_i k / (6R_i + 5)} \times \frac{R_i}{1 + R_i} v_1 = \frac{-5R_i k}{6R_i + 5 + R_i k} v_1$$

结果与(36)式一致.

- 5.6 参考图 5-7 和 5-8, 求运算放大器的输出电压. 已知  $A = 10^5$ ,  $V_{cc} = 10 \text{ V}$ ,  $v^- = 0$ ,  $v^+ = \sin t (\text{V})$ .

解 因为运算放大器的增益很大, 则电路很快饱和

$$|v_2| = 10^5 |v_d| = 10 \text{ V} \quad \text{或} \quad |v_d| = 10^{-4} \text{ V}$$

我们可以忽略线性区, 直接写出

$$v_2 = \begin{cases} +10 \text{ V} & v_d > 0 \\ -10 \text{ V} & v_d < 0 \end{cases}$$

这里  $v_d = v^+ - v^- = \sin t (\text{V})$ , 输出电压的一个周期可以写成

$$v_2 = \begin{cases} +10 \text{ V} & 0 < t < \pi \\ -10 \text{ V} & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

为了更精确地描述  $v_2$ , 可以使用图 5-7 的传输特性.

$$v_2 = \begin{cases} -10 & v_d < -10^{-4} \text{ V} \\ 10^5 v_d & -10^{-4} < v_d < 10^{-4} \text{ V} \\ +10 & v_d > 10^{-4} \text{ V} \end{cases}$$

在  $|v_d| = |\sin t| = 10^{-4} \text{ V}$  时, 电路开始饱和. 因为这个范围很小, 可以用  $t$  代替  $\sin t$ , 所以输出电压  $v_2$  为

$$\begin{aligned} v_2 &= 10^5 t & -10^{-4} < t < -10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= 10 & 10^{-4} < t < \pi - 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= -10^5 (t - \pi) & \pi - 10^{-4} < t < \pi + 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= -10 & \pi + 10^{-4} < t < 2\pi - 10^{-4} \text{ s} \end{aligned}$$

为了了解忽略线性区中无意义的误差, 注意, 在  $2\pi \text{ s}$  的一个周期的期间里线性运算的时间仅仅有  $4 \times 10^{-4} \text{ s}$ , 这就给出了  $64 \times 10^{-6}$  的比率.

- 5.7 重新计算 5.6 题, 设  $v^+ = \sin 2\pi t (\text{V})$ ,  $v^- = 0.5 (\text{V})$ .

解 输出电压是

$$\begin{aligned} v_2 &= 10 \text{ V} & v^+ > v^- \\ v_2 &= -10 \text{ V} & v^+ < v^- \end{aligned}$$

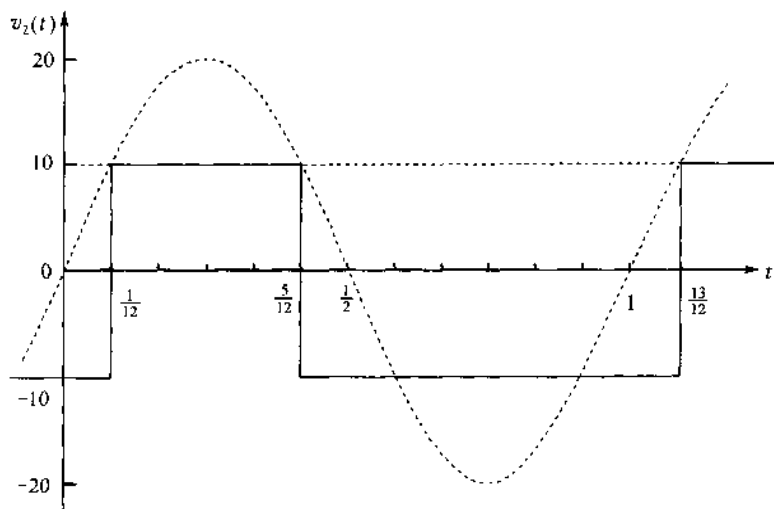


图 5-34

当  $\sin 2\pi t = 1/2$  时发生切换, 切换的时间是  $t = 1/12, 5/12, 13/12$  等等. 所以,  $v_2$  在一个周期的变化是

$$v_2 = 10 \text{ V} \quad 1/12 < t < 5/12 \text{ s}$$

$$v_2 = -10 \text{ V} \quad 5/12 < t < 13/12 \text{ s}$$

图 5-34 说明了  $v^+$ ,  $v^-$  和  $v_2$  的图形.

5.8 图 5-35 电路中,  $v_s = \sin 100t$ , 求  $v_1$  和  $v_2$ .

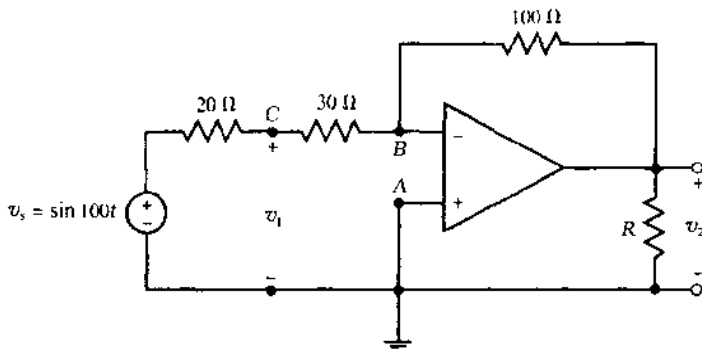


图 5-35

解 在节点 B 和节点 A 有  $v_B = v_A = 0$ , 那么

$$v_1 = \frac{30}{20 + 30} v_s = 0.6 \sin 100t \text{ (V)}$$

$$v_2 = -\frac{100}{30} v_1 = -\frac{100}{30} (0.6 \sin 100t) = -2 \sin 100t \text{ (V)}$$

换一种方法, 得

$$v_2 = -\frac{100}{20 + 30} v_s = -2 \sin 100t \text{ (V)}$$

5.9 图 5-31 所示运算放大器的饱和电平是  $V_{cc} = +5 \text{ V}$ ,  $-V_{cc} = -5 \text{ V}$ . 参考电压是  $v_o = 1 \text{ V}$ . 若输入电压  $v_i$  的值从  $0 \text{ V}$  变到  $1 \text{ V}$ , 步长为  $0.25 \text{ V}$ , 求对应的输出电压序列.

解 见表 5-7, 表中  $L = -5 \text{ V}$ ,  $H = +5 \text{ V}$ .

表 5-7

$v_i$ [V]	$v_1$	$v_2$	$v_1$
0 到 $0.25^-$	L	L	L
$0.25^+$ 到 $0.5^-$	L	L	H
$0.5^+$ 到 $0.75^-$	L	H	H
$0.75^+$ 到 1	H	H	H

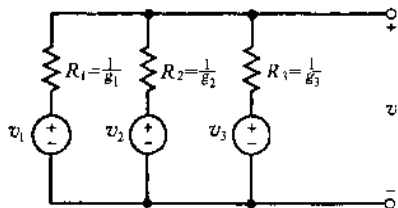


图 5-36

5.10 求图 5-36 所示电路中的输出电压  $v$ .

解 在节点 A 应用 KCL

$$(v - v_1)g_1 + (v - v_2)g_2 + (v - v_3)g_3 = 0$$

则

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_1 g_1 + v_2 g_2 + v_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \\ &= \frac{v_1 R_2 R_3 + v_2 R_1 R_3 + v_3 R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{aligned}$$

5.11 电路如图 5-37 所示, 求  $v_C$  (节点 C 的电压),  $i_1$ ,  $R_{in}$  (由  $9 \text{ V}$  电压源两端看进去的输入



电阻),  $v_2$  和  $i_2$ .

解 在节点 B 和节点 A,  $v_B = v_A = 0$ . 对节点 C 应用 KCL, 可以写出

$$(v_C - 9)/4 + v_C/6 + v_C/3 = 0 \quad \text{由此得出} \quad v_C = 3 \text{ V}$$

那么  $i_1 = (9 - v_C)/4 = 1.5 \text{ A}$  及  $R_{in} = v_1/i_1 = 9/1.5 = 6 \Omega$

由反相放大器电路有

$$v_2 = -(5/3)v_C = -5 \text{ V} \quad \text{以及} \quad i_2 = 5/10 = -0.5 \text{ A}$$

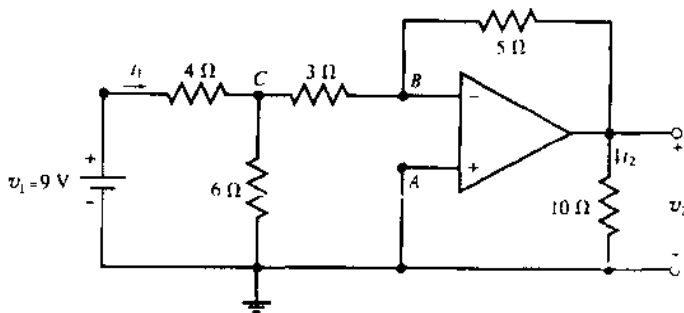


图 5-37

- 5.12 用戴维南等效电路代替图 5-37 中节点 A-B 左半部的电路的方法, 求习题 5.11 中的  $v_2$ .

解

$$R_{Th} = 3 + \frac{(6)(4)}{6+4} = 5.4 \Omega \quad \text{以及} \quad v_{Th} = \frac{6}{4+6}(9) = 5.4 \text{ V}$$

则  $v_2 = -(5/5.4)(5.4) = -5 \text{ V}$ .

- 5.13 求图 5-38 所示电路中的  $v_C$ ,  $i_1$  和  $v_2$  以及从 21 V 电压源两端看进去的输入电阻  $R_{in}$ .

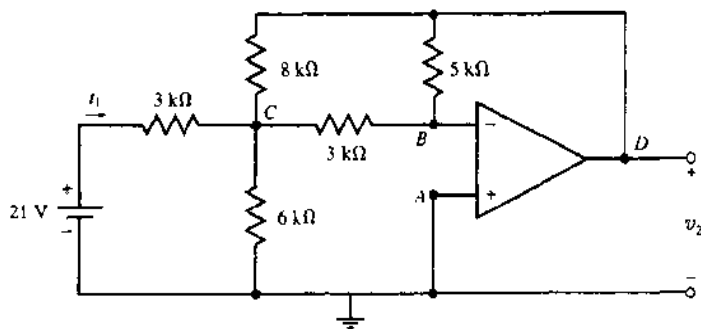


图 5-38

解 从反相放大器的关系, 我们得出

$$v_2 = -(5/3)v_C \quad (39)$$

注意,  $v_A = v_B = 0$ , 所以节点 C 的 KCL 为

$$\frac{v_C - 21}{3} + \frac{v_C}{6} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{3} = 0 \quad (40)$$

将(39)式  $v_C = (3/5)v_2$  代入(40)式, 可以得到  $v_2 = -10 \text{ V}$ . 则

$$v_C = 6 \text{ V}$$

$$i_1 = (21 - v_C)/3000 = 0.005 \text{ A} = 5 \text{ mA}$$

$$R_{in} = 21/i_1 = 21/0.005 = 4200 \Omega = 4.2 \text{ k}\Omega$$

- 5.14 在图 5-38 所示电路中, 用一个  $k$  因子改变 21 V 电压源. 请说明习题 5-13 中的  $v_C$ ,  $i_1$ ,  $v_2$  将随着相同的因数  $k$  变化, 但是输入电阻  $R_{in}$  则保持不变.

解 令  $v_1 = 21k \text{ (V)}$ , 表示一个新的电压源. 根据反相放大器的关系有 [见(39)式]

$$v_2 = -(5/3)v_C$$

对节点 C 应用 KCL 可得[见(40)式]

$$\frac{v_C - v_1}{3} + \frac{v_C}{6} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{8} = 0$$

求解  $v_C$  和  $v_2$ , 得出

$$v_C - (6/21)v_1 = 6k(V) \quad \text{及} \quad v_2 = -(10/21)v_1 = -10k(V)$$

$$i_1 = (v_1 - v_C)/3000 = (21 - 6)k/3000 = 0.005 \text{ kA}$$

$$R_m = v_1/i_1 = 21k/0.005k = 4200 \Omega$$

因为这个电路是线性的, 所得结果是必然的。

- 5.15 用戴维南等效电路代替图 5-38 电路中 C 点以左部分(包括 21 V 电压源和 3 kΩ 及 6 kΩ 电阻器), 求习题 5.13 中的  $v_2$  和  $v_C$ 。

解 首先我们计算戴维南等效电路

$$R_{Th} = \frac{(6)(3)}{6+3} = 2 \text{ k}\Omega \quad \text{以及} \quad v_{Th} = \frac{6}{3+6}(21) = 14 \text{ V}$$

用上面计算的  $R_{Th}$  和  $v_{Th}$  代替节点 C 左部的电路, 然后对节点 C 应用 KCL

$$\frac{v_C - 14}{2} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{8} = 0 \quad (41)$$

由于是反相放大器, 有  $v_2 = -(5/3)v_C$  或  $v_C = -0.6v_2$ , 将结果代入(41)式得出:  $v_2 = -10 \text{ V}$ ,  $v_C = 6 \text{ V}$ 。

- 5.16 (a) 求图 5-39(a)所示电路中节点 A-B 以左电路的戴维南等效电路, 计算当  $R_l = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $10 \text{ k}\Omega$  和  $\infty$  时的电压  $v_2$ ; (b) 对 5-39(c) 电路, 重新计算  $v_2$ , 并将其与(a)中的计算结果进行比较。

解 (a) 图 5-39(a) 电路的戴维南等效电路示于图 5-39(b)。

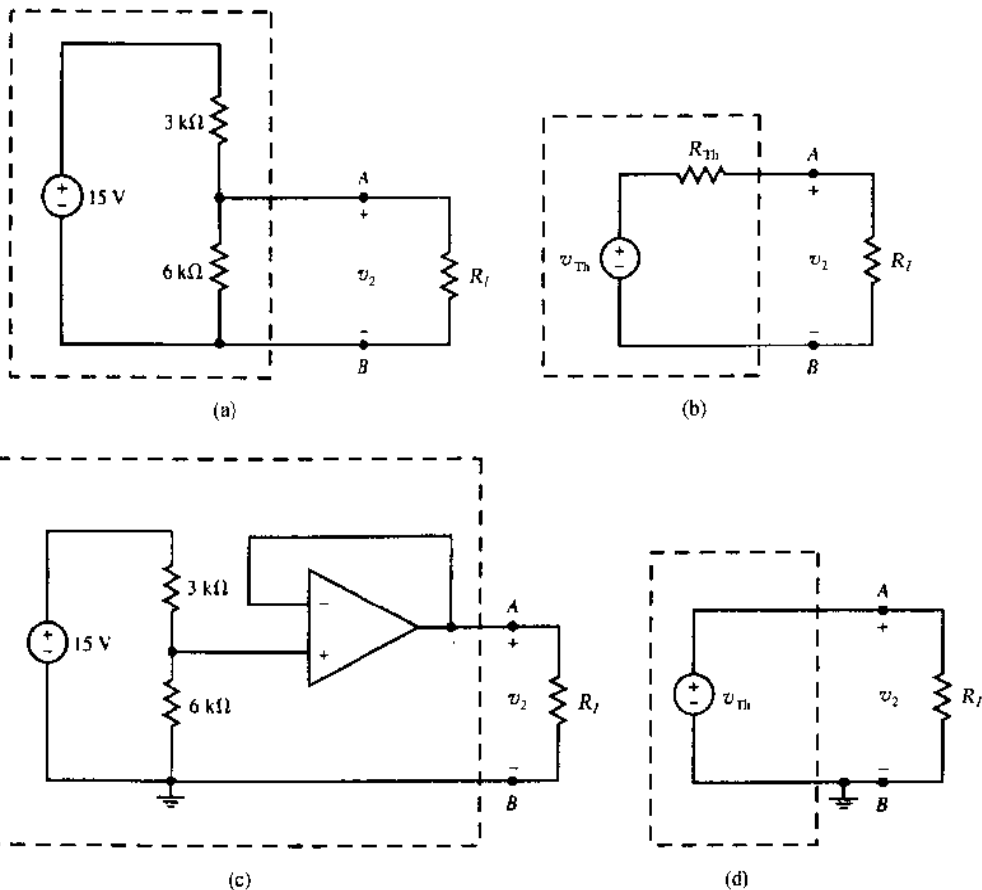


图 5.39

$$v_{Th} = \frac{6}{3+6}(15) = 10 \text{ V} \quad \text{以及} \quad R_{Th} = \frac{(3)(6)}{3+6} = 2 \text{ k}\Omega$$

用  $R_{Th}$  与  $R_l$  对  $v_{Th}$  的分压, 可以得到  $v_2 = \frac{R_l}{R_l+2}(10)$

$$R_l = 1 \text{ k}\Omega: \quad v_2 = 3.33 \text{ V}$$

$$R_l = 10 \text{ k}\Omega: \quad v_2 = 8.33 \text{ V}$$

$$R_l = \infty: \quad v_2 = 10 \text{ V}$$

输出电压  $v_2$  取决于  $R_l$  的值, 分压器的工作也受负载电阻  $R_l$  的影响。

(b) 图 5-39(c) 的戴维南等效电路如图 5-39(d) 所示, 有

$$v_{Th} = 10 \text{ V} \quad \text{以及} \quad R_{Th} = 0$$

对于任何数值的电阻  $R_l$  均有  $v_2 = v_{Th} = 10 \text{ V}$ , 即, 输出电压  $v_2$  仅与  $R_1$ ,  $R_2$  和  $v_s$  有关, 而与  $R_l$  无关。

5.17 求图 5-40(a) 电路中作为  $i_1$  的函数  $v_2$  的值。

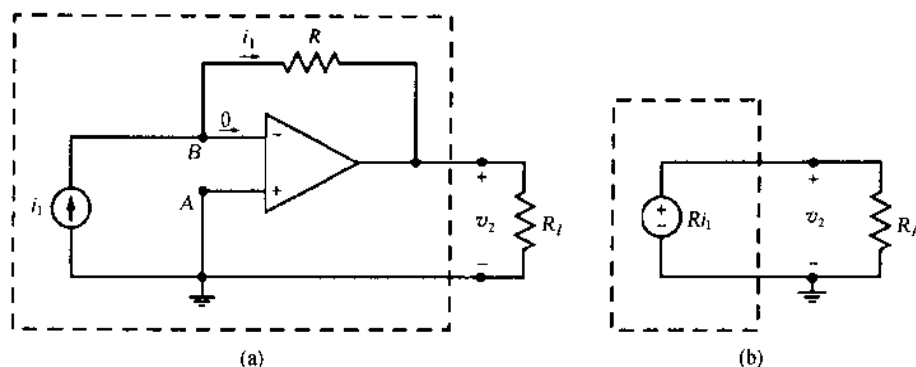


图 5-40

**解** 电流  $i_1$  经过电阻  $R$  产生一个电压  $-Ri_1$ , 方向是从右指向左。因为反相输入端  $B$  是零电位, 所以上面的电压表现在输出端上为  $v_2 = -Ri_1$  [见图 5-40(b)]。因此运算放大器把电流  $i_1$  转换为电压  $v_2$ , 增益为  $|v_2/i_1| = R$ 。因为电流源两端的电压  $v_{AB}$  是零, 所以电流源不提供功率。

5.18 传感器产生一个微弱电流  $i_1$  提供给负载  $R_l$ , 在负载两端产生电压  $v_1$ 。希望  $v_1$  跟随输入信号变化并有恒定的  $10^8$  的增益, 与  $R_l$  的值无关。设计一个电流-电压转换器, 完成上述任务。

**解** 这个传感器通过运算放大器间接与负载连接, 下面的设计产生  $v_1 = 10^8 i_1$ , 而与  $R_l$  无关。

设计 1: 电路如图 5-40 所示, 选择电阻  $R = 100 \text{ M}\Omega$ 。这个电阻的数值太大了, 价格很贵, 不容易实现。

设计 2: 图 5-41 所示电路中转换器的增益是  $10^8 \text{ V/A}$ 。第一个运算放大器接有  $R = 10^6 \Omega$  的电阻, 它把电流  $i_1$  转换成  $v_1 = -10^6 i_1$ , 第二个运算放大器的增益是  $-100$  (即  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  和  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ ), 把电压  $v_1$  放大为  $v_2 = -100 v_1 = 10^8 i_1$ 。这个电路需要两个运算放大器和三个电阻器 ( $1 \text{ M}\Omega$ ,  $100 \text{ k}\Omega$  和  $1 \text{ k}\Omega$ ), 这些元件不贵, 比较容易实现。

设计 3: 见图 5-42 及习题 5.19。

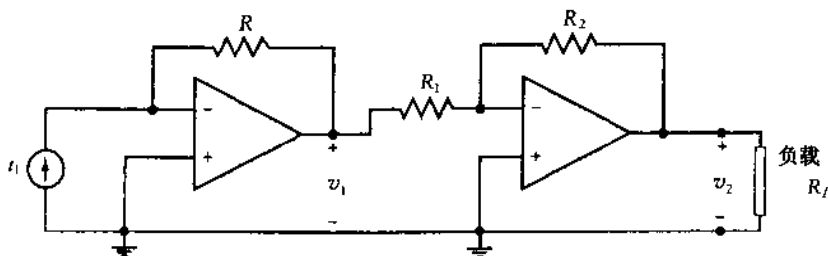


图 5-41

5.19 图 5-42 为电流电压转换器, 转换增益是  $v_2/i_1 = 10^8$  V/A, 试确定电阻器的值.

解 对节点 C 应用 KCL, 并注意到  $v_B = v_A = 0$ , 这样

$$\frac{v_C}{R} + \frac{v_C}{R_1} + \frac{v_C}{R_2} v_2 = 0$$

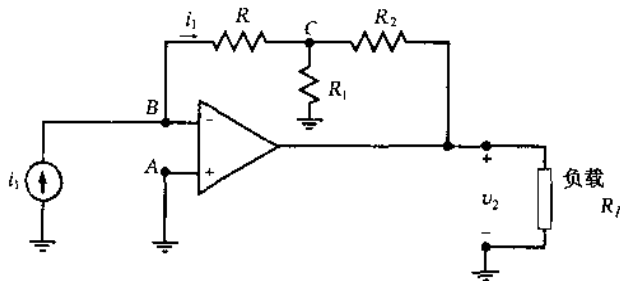


图 5-42

代入  $v_C = -Ri_1$ , 求解  $v_2$  得出

$$v_2 = -R_{eq}i_1, \quad \text{这里} \quad R_{eq} = R\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R}\right)$$

因为转换增益是  $v_2/i_1 = R_{eq} = 10^8$  V/A = 100 MΩ, 我们需要确定电阻值以满足下面的方程

$$R\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R}\right) = 10^8 \Omega$$

其中的一个方案是选择  $R = 1$  MΩ,  $R_1 = 1$  kΩ 和  $R_2 = 99$  kΩ. 图 5-42 电路的设计使用了一个运算放大器和三个电阻器, 这些并不贵, 实现起来也容易.

5.20 求图 5-43 所示电路中作为  $v_1$  函数的  $i_2$ .

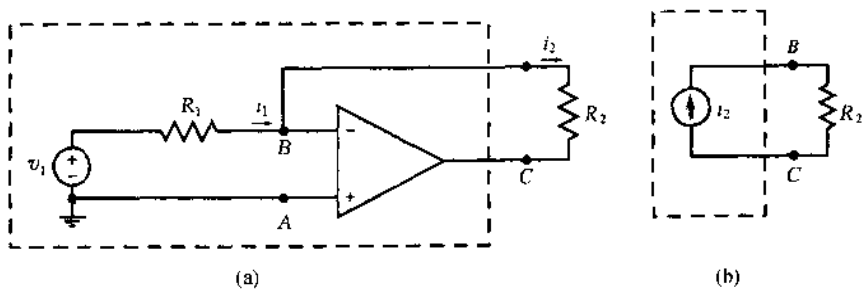


图 5-43

解

$$v_B = v_A = 0 \quad i_1 = v_1/R_1 \quad i_2 = i_1 = v_1/R_1$$

运算放大器把电压源转换为浮动的电流源. 电压-电流转换率是  $R_1$  且与  $R_2$  无关.

5.21 一个实际电流源 ( $i_s$  与内部电阻  $R_s$  并联) 直接向负载供电, 如图 5-44(a) 所示.

(a) 求负载电流  $i_L$ ; (b) 如图 5-44(b) 所示, 在电源和负载之间放置一个运算放大器, 求电流  $i_L$ , 并将其与 (a) 的结果进行比较.

解 (a) 在图 5-44(a) 直接连接的电路中,  $i_L = i_s R_s / (R_s + R_L)$ , 它随  $R_L$  变化.

(b) 在图 5-44(b) 中, 运算放大器迫使  $v_B$  为零, 并使电阻  $R_s$  的电流也变为零. 所以  $i_L = i_s$ , 与  $R_L$  无关. 这个运算放大器电路把实际电流源转换成理想电流源, 见图 5-44(c).

5.22 求图 5-45 所示电路中的输出电压  $v_o$ .

解 第一个运算放大器是具有单位增益的反相放大器,  $v_3 = -v_2$ . 第二个运算放大器是具有

$R_2/R_1$  增益的求和电路, 两个输入是  $v_1$  和  $v_3$ . 电路的输出电压是

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1}(v_1 + v_3) = -\frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$$

此电路是差分放大器。

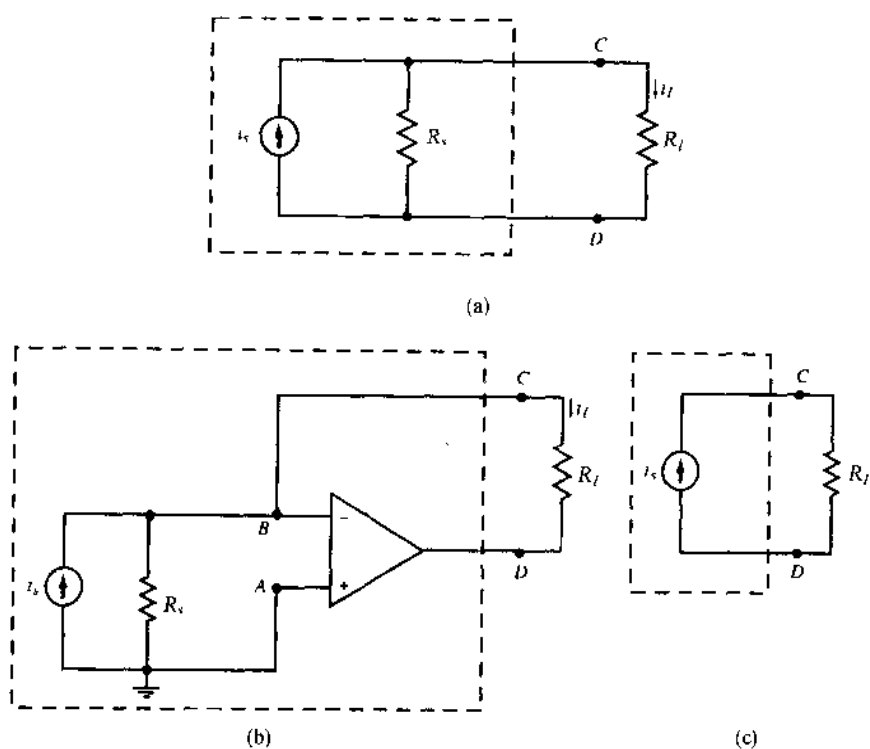


图 5-44

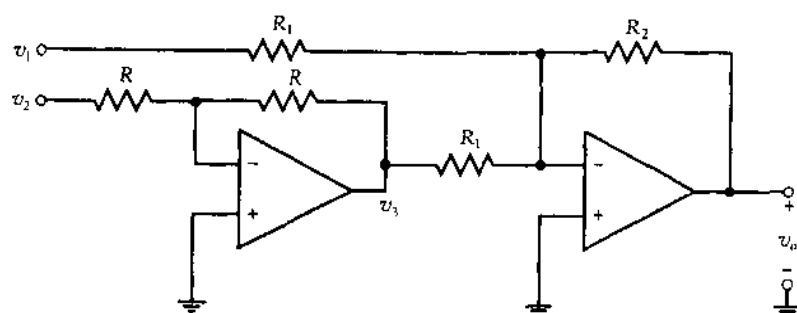


图 5-45

5.23 求图 5-46 所示电路的输出电压  $v_o$ 。

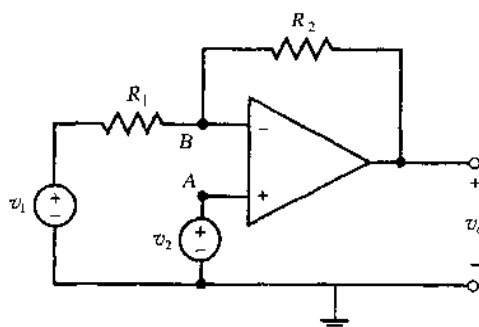


图 5-46

解 对节点 B 应用 KCL. 注意,  $v_B - v_A = v_2$ . 于是有

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_o}{R_2} = 0$$

解出  $v_o$ , 得到  $v_o = v_2 + (R_2/R_1)(v_2 - v_1)$ .

5.24 求图 5-47 所示电路的输出电压  $v_o$ .

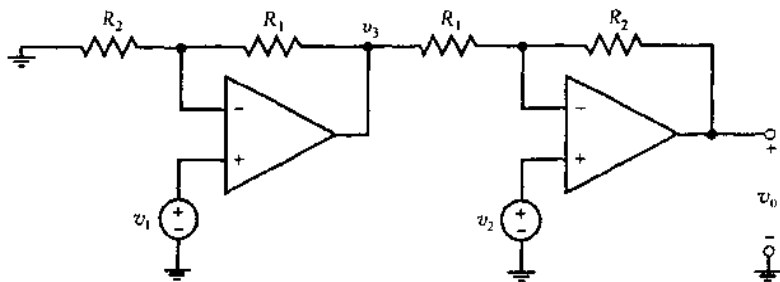


图 5-47

解 电路中左边部分的增益是  $(1 + R_1/R_2)$ , 所以  $v_3 = (1 + R_1/R_2)v_1$ . 利用 5.23 题的结果并代入  $v_3$ , 得出

$$v_o = v_2 + \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_3) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_2 - \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)v_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(v_2 - v_1)$$

5.25 请选择图 5-48 中电路的电阻值, 使得差分增益为  $10^6$ , 即  $v_o = 10^6(v_2 - v_1)$ .

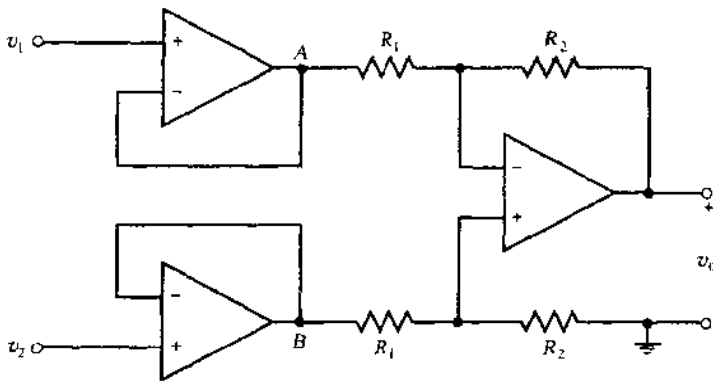


图 5-48

解 前面的两个运算放大器是电压跟随器,

$$v_A = v_1 \quad \text{和} \quad v_B = v_2$$

根据第 5.9 节的(16)式, 可知

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_B - v_A) = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$$

为了获得希望的差分增益  $R_2/R_1 = 10^6$ , 选择电阻  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ M}\Omega$ .

图 5-48 的电路可以有与图 5-45 电路相同的增益, 但是这个电路的输入电阻是无限大, 而电路中使用两个大小相差很远的电阻, 超出了正常使用的范围.

5.26 高阻值和高精度的电阻器是非常贵的. 图 5-49 所示的电路中, 我们可以选择普通范围的电阻器, 使得  $v_o = 10^6(v_2 - v_1)$ .

解 前面的两个运算放大器把输入电压  $v_1$  和  $v_2$  传递到  $R_G$  的两端, 在该电阻上产生向上的电流  $i = (v_2 - v_1)/R_G$ . 这个电流也流过了两个  $R_3$  电阻, 在电阻两端产生电压降  $iR_3$ . 所以

$$v_A = v_1 - R_3 i = v_1 - \frac{R_3}{R_G}(v_2 - v_1) \quad v_B = v_2 + R_3 i = v_2 + \frac{R_3}{R_G}(v_2 - v_1)$$

$$v_B - v_A = \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right)(v_2 - v_1)$$

因此

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_B - v_A) - \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right)(v_2 - v_1)$$

为了得到差分增益是  $10^6$ , 我们须有

$$\frac{v_o}{v_2 - v_1} = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right) = 10^6$$

并选择电阻  $R_1 = R_G = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  及  $R_3 = 5 \text{ M}\Omega$ .

图 5-49 电路的输入电阻为无限大, 使用通常范围内的电阻以及三个运算放大器.

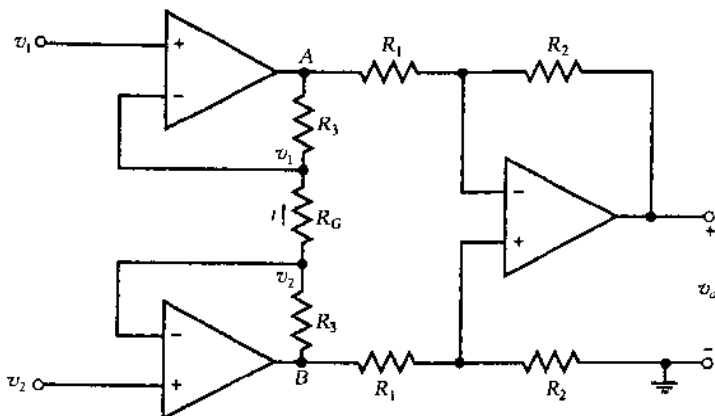


图 5-49

5.27 图 5-50 电路中, 证明  $i_1 = i_2$  与  $N_1$  和  $N_2$  两个电路的结构无关.

**证明** 节点 A 和节点 B 电压相同  $v_A = v_B$ . 因为运算放大器不吸收电流, 因此, 电流  $i_1$  和  $i_2$  流过两个电阻器以及围绕运算放大器 ABC 回路的 KVL 方程为  $Ri_1 - Ri_2 = 0$ . 所以,  $i_1 = i_2$ .

5.28 假设图 5-50 所示电路中  $N_1$  是电压源  $v_1$ ;  $N_2$  是电阻  $R_2$ . 求电路的输入电阻  $R_{in} = v_1 / i_1$ .

**解** 根据运算放大器的关系我们可以得到  $v_A = v_B$  和  $i_1 = i_2$ . 连接  $N_1$  和  $N_2$  分别得出  $v_1 = v_B = v_2 = v_A$  和  $v_2 = -i_2 R_2$ . 输入电阻是  $v_1 / i_1 = -i_2 R_2 / i_2 = -R_2$ , 结果是负载电阻的负数. 这个运算放大器电路是一个负阻抗转换器.

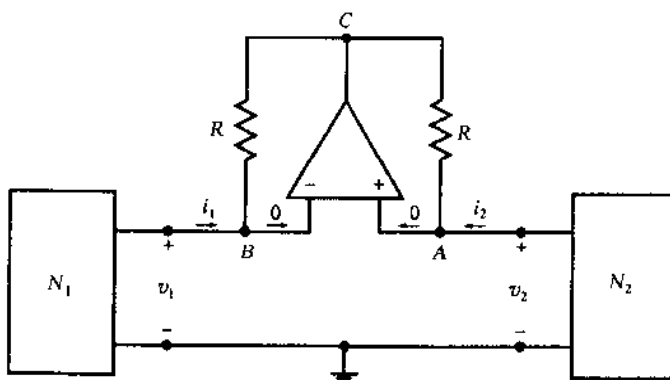


图 5-50

5.29 一个电压跟随器由一个具有有限开环增益  $A$  和  $R_i = \infty$  的运算放大器构成 (见图 5-51). 求电路的增益值  $G_2 = v_2 / v_1$ , 并将灵敏度  $s$  定义为增益  $G$  变化的百分率与开环增益  $A$  变化的百分率的比值, 求  $s$ .

**解** 根据图 5-51, 有  $v_2 = Av_d$ , 围绕运算放大器应用 KVL, 可以写出

$$v_1 = v_d + v_2 = v_d + Av_d = v_d(1 + A) = v_2(1 + A)/A$$

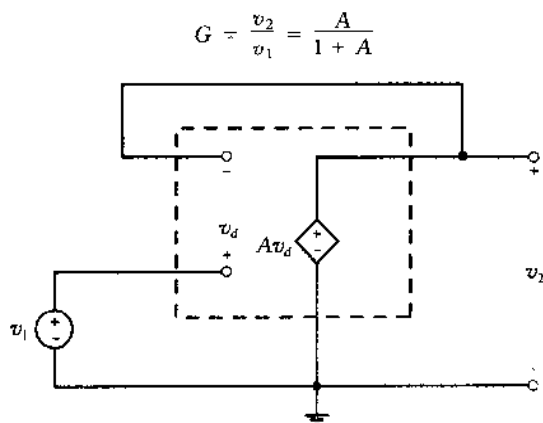


图 5-51

$G$  相对于  $A$  的变化率

$$\frac{dG}{dA} = \frac{1}{(1+A)^2}, \quad \text{由此得} \quad dG = \frac{dA}{(1+A)^2}$$

$G$  产生变化的百分比是  $100(dG/G)$

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{(1+A)^2} \times \frac{1+A}{A} = \frac{1}{1+A} \times \frac{dA}{A}$$

灵敏度  $s$  为

$$s = \frac{dG/G}{dA/A} = \frac{1}{1+A}$$

$G$  的变化量的百分比与开环增益  $A$  有关,  $dG/dA$  和  $s$  关系的例子示于表 5-8.

表 5-8

$A$	$G = v_2/v_1$	$dG/dA$	$s$
10	0.909	0.008	0.091
11	0.917	0.007	0.083
100	0.990	0.0001	0.01
1000	0.999	0	0

当开环增益  $A$  很高时, 闭环增益  $G$  对于  $A$  的变化不灵敏.

### 补充习题

5.30 用戴维南等效电路代替图 5-33 中节点  $B$  左部的电路(包括  $v_s$ ,  $R_1$  和  $R_t$ ), 重做习题 5.3(见图 5-33).

解题时可以利用例 5.4 的结果.

5.31 求图 5-52 中节点  $A$ - $B$  以左电路的戴维南等效电路, 其中,  $k=10$ ; (a)  $R_2=\infty$ ; (b)  $R_2=50 \text{ k}\Omega$ .

答案: (a)  $v_{Th} = -100 \text{ V}$ ,  $R_{Th} = 100 \Omega$ ; (b)  $v_{Th} = -31.22 \text{ V}$ ,  $R_{Th} = 37.48 \Omega$

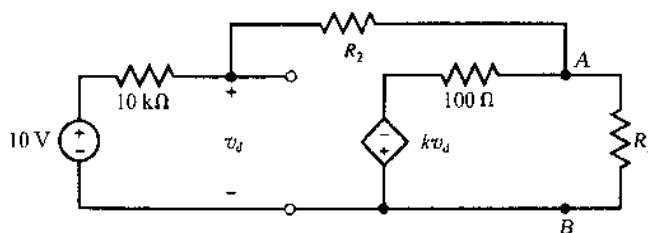


图 5-52

5.32 重新计算 5.31 题,  $R_2=50 \text{ k}\Omega$  和  $k=100$ .

答案:  $v_{Th} = -47.16 \text{ V}$ ,  $R_{Th} = 5.66 \Omega$



5.33 确定图 5-41 电路中  $R$ ,  $R_1$  和  $R_2$  之间的关系, 并使该电路的增益为  $v_2/i_1 = 10^6 \text{ V/A}$ .

答案:  $R R_2/R_1 = 10^6$

5.34 在图 5-13 所示电路中,  $V_{\alpha} = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  及  $v_1 = 1 \text{ V}$ . 求运算放大器饱和前的电阻  $R_2$  的最大值.

答案:  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$

5.35 设图 5-14 所示的求和电路中有两个输入信号  $v_1 = 1 \text{ V}$  和  $v_2 = \sin t (\text{V})$ . 令  $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$  及  $R_f = 8 \text{ k}\Omega$ . 应用叠加原理求  $v_o$ .

答案:  $v_o = -\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{5} \sin t\right)$

5.36 电路如图 5-17 所示, 设  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$ . 用叠加原理求用输入电压表示的  $v_o$ .

答案:  $v_o = v_1 + v_2 + v_3$

5.37 求图 5-19 电路中由  $v_f$  两端看进去的输入电阻.

答案:  $R_m = 2R_1$

5.38 用叠加原理求图 5-20 所示电路的  $v_o$ , 其中:  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = 7$ ,  $R_3 = 10$ ,  $R_4 = 5$  (所有的电阻以  $\text{k}\Omega$  单位).

答案:  $v_o = 1.5v_2 - 3.5v_1$

5.39 图 5-20 所示电路中, 求 (a) 对于  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 3$ ,  $R_3 = 2$ ,  $R_4 = 2$  的  $v_o$  (所有的电阻以  $\text{k}\Omega$  单位); (b) 求从  $v_2$  两端看进去的输入电阻  $R_{2m}$ ; (c) 求作为  $v_1$  和  $v_2$  函数的  $i_1$ , 并证明  $v_1$  看似一个与  $v_2$  有关的可变负载.

答案: (a)  $v_o = 2v_2 - 3v_1$ ; (b)  $R_{2m} = 4 \text{ k}\Omega$ ; (c)  $i_1 = v_1 - v_2/2$

5.40 用一个运算放大器设计一个增益是  $v_2/v_1 = 3/4$  的放大器, 要求电路的输入电阻是  $8 \text{ k}\Omega$ , 输出电阻为零.

答案: 见图 5-53

5.41 当  $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = 0$  时, 证明可将图 5-15 所示同相放大器电路和 (12) 式简化为电压跟随器.

5.42 在图 5-22 所示电路中, 令  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ . (a) 求使  $i_1 = 0$  的  $R_f$ ; (b) 讨论  $R_f$  是否与  $R_1$  无关?

答案: (a)  $40 \text{ k}\Omega$ ; (b) 是

5.43 图 5-23 电路中  $RC = 1$ , 输入电压是  $v_1 = \sin \omega t$ . 写出节点 B 的 KCL 方程并求电压  $v_2$ .

答案:  $v_2 = -(1/\omega) \cos \omega t + C$

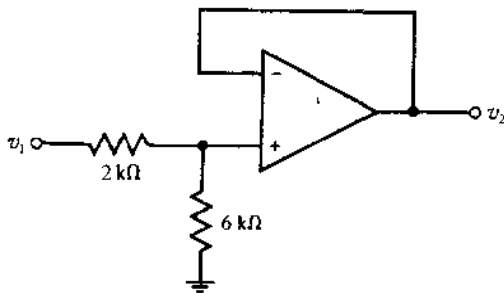


图 5-53

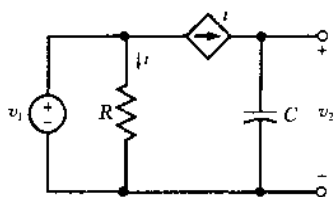


图 5-54

5.44 证明图 5-54 电路中的输出电压  $v_2$  与图 5-23 所示的积分器电路的输出电压相同.

5.45 求图 5-24 的有泄漏的积分器中的  $v_2$ , 已知:  $R_1 = R_f =$

$1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  及  $v_1 = \begin{cases} 1 \text{ V} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ .

答案:  $v_2(t) = \begin{cases} -1 + e^{-1000t} (\text{V}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

5.46 重新计算 5.45 题, 这里  $v_1 = \begin{cases} 1 \text{ V} & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$

答案:  $v_2(t) = \begin{cases} -e^{-1000t} (\text{V}) & t > 0 \\ -1 \text{ V} & t < 0 \end{cases}$

5.47 在微分方程  $10^{-2} dv_2/dt + v_2 = v_1$  中,  $v_1$  是激励函数,  $v_2$  是响应. 设计一个运算放大器电路, 并由  $v_1$  求出  $v_2$ .

答案: 见图 5-24, 其中:  $R_1 = R_f = R$ ,  $RC = 10^{-2}$  及  $v_1 = -v_i$

5.48 设计一个含有运算放大器的电路, 以求解下面的微分方程组:

$$y' + x = v_{s1}$$

$$2y + x' + 3x = -v_{s2}$$

答案: 见图 5-55,  $R_1 C = R_4 C = 1 \text{ s}$ ,  $R_2 C = \frac{1}{3} \text{ s}$ ,  $R_3 C = \frac{1}{2} \text{ s}$

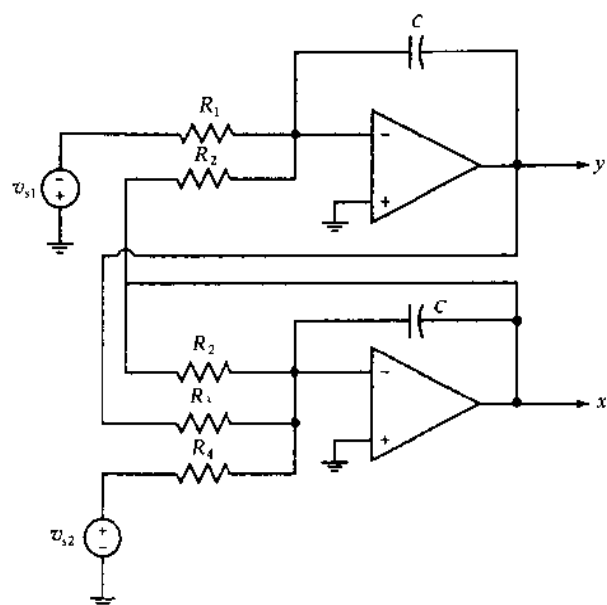


图 5-55

## 第6章 波形和信号

### 6.1 引言

电路中的电压和电流可以用三种类型的时间函数描述.

- (i) 周期函数;
- (ii) 非周期函数;
- (iii) 随机函数.

本章中所有函数的时间域设为  $-\infty < t < \infty$ , 并且函数式、波形及信号可以进行互换.

### 6.2 周期函数

如果一个信号  $v(t)$  对所有  $t$  有

$$v(t) = v(T + t)$$

那么, 它就是周期为  $T$  的周期信号.

下面对四种典型的周期函数在一个周期  $T$  进行了说明并给出了相应的图形.

#### 1. 正弦波

$$v_1(t) = V_0 \sin 2\pi t / T \quad (1)$$

见图 6-1(a)

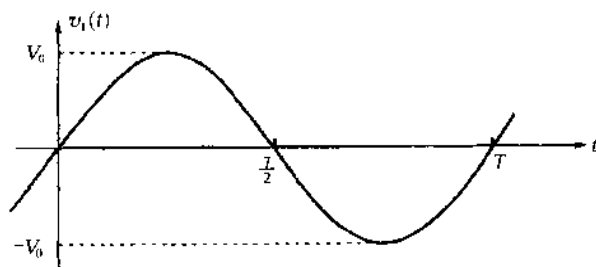


图 6-1(a)

#### 2. 周期脉冲

$$v_2(t) = \begin{cases} V_1 & 0 < t < T_1 \\ -V_2 & T_1 < t < T \end{cases} \quad (2)$$

见图 6-1(b):

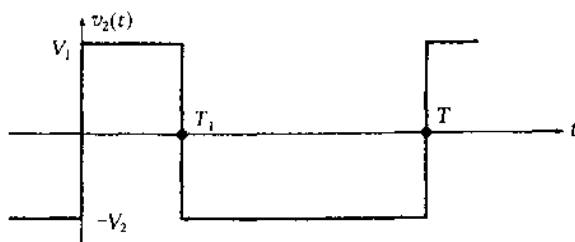


图 6-1(b)

## 3. 周期单音波群

$$v_3(t) = \begin{cases} V_0 \sin 2\pi t / \Lambda & 0 < t < T_1 \\ 0 & T_1 < t < T \end{cases} \quad (3)$$

这里  $T = k\Lambda$ , 并且  $k$  是一个整数, 见图 6-1(c).

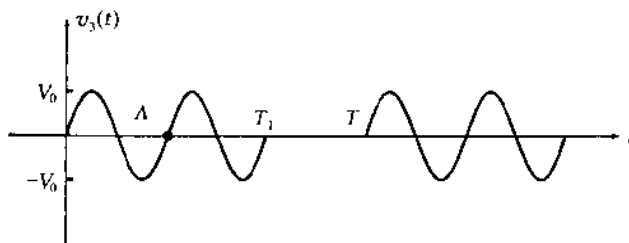


图 6-1(c)

4. 每  $T$  秒记录一次的重复信号

$$v_4(t) \quad (4)$$

见图 6-1(d)

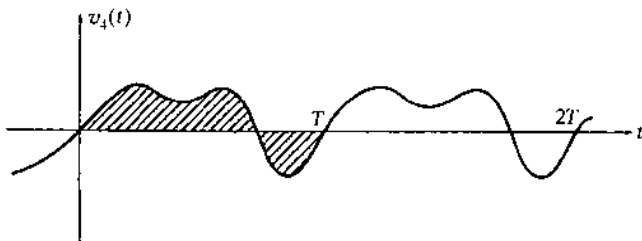


图 6-1(d)

周期函数可能非常复杂. 然而, 在第 17 章可以看到, 它们总可以用多个正弦信号的和来表示. 这些典型函数将在下面各节分析.

## 6.3 正弦函数

一个正弦波电压  $v(t)$  由下式给出

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

这里  $V_0$  是幅值,  $\omega$  是角速度或称为角频率,  $\theta$  是相位角.

角频率  $\omega$  可以用周期  $T$  或频率  $f$  表示, 这里  $f \equiv 1/T$ , 频率以 Hz[赫兹]或[周期/秒]为单位. 因为  $\cos \omega t = \cos(\omega t + 2\pi)$ ,  $\omega$  和  $T$  的关系为  $\omega T = 2\pi$ . 并且由于函数  $v(t)$  经过  $T$  秒之后就会返回到原来的数值, 所以函数在 1 秒钟内经过了  $1/T$  周期.

对正弦函数的关系进行总结, 有

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \quad f = 1/T = \omega/2\pi \quad T = 1/f = 2\pi/\omega$$

**例 6.1** 画出下面函数的图形并指出它们的周期和频率

$$(a) v_1(t) = \cos t; \quad (b) v_2(t) = \sin t; \quad (c) v_3(t) = 2\cos 2\pi t;$$

$$(d) v_4(t) = 2\cos(\pi t/4 - 45^\circ) = 2\cos(\pi t/4 - \pi/4) = 2\cos[\pi(t-1)/4];$$

$$(e) v_5(t) = 5\cos(10t + 60^\circ) = 5\cos(10t + \pi/3) = 5\cos 10(t + \pi/30).$$

$$(a) \text{ 见图 6-2(a), } T = 2\pi = 6.2832 \text{ s} \quad f = 0.159 \text{ Hz}$$

$$(b) \text{ 见图 6-2(b), } T = 2\pi = 6.2832 \text{ s} \quad f = 0.159 \text{ Hz}$$

$$(c) \text{ 见图 6-2(c), } T = 1 \text{ s} \quad f = 1 \text{ Hz}$$

$$(d) \text{ 见图 6-2(d), } T = 8 \text{ s} \quad f = 0.125 \text{ Hz}$$

$$(e) \text{ 见图 6-2(e), } T = 0.2\pi = 0.62832 \text{ s} \quad f = 1.59 \text{ Hz}$$

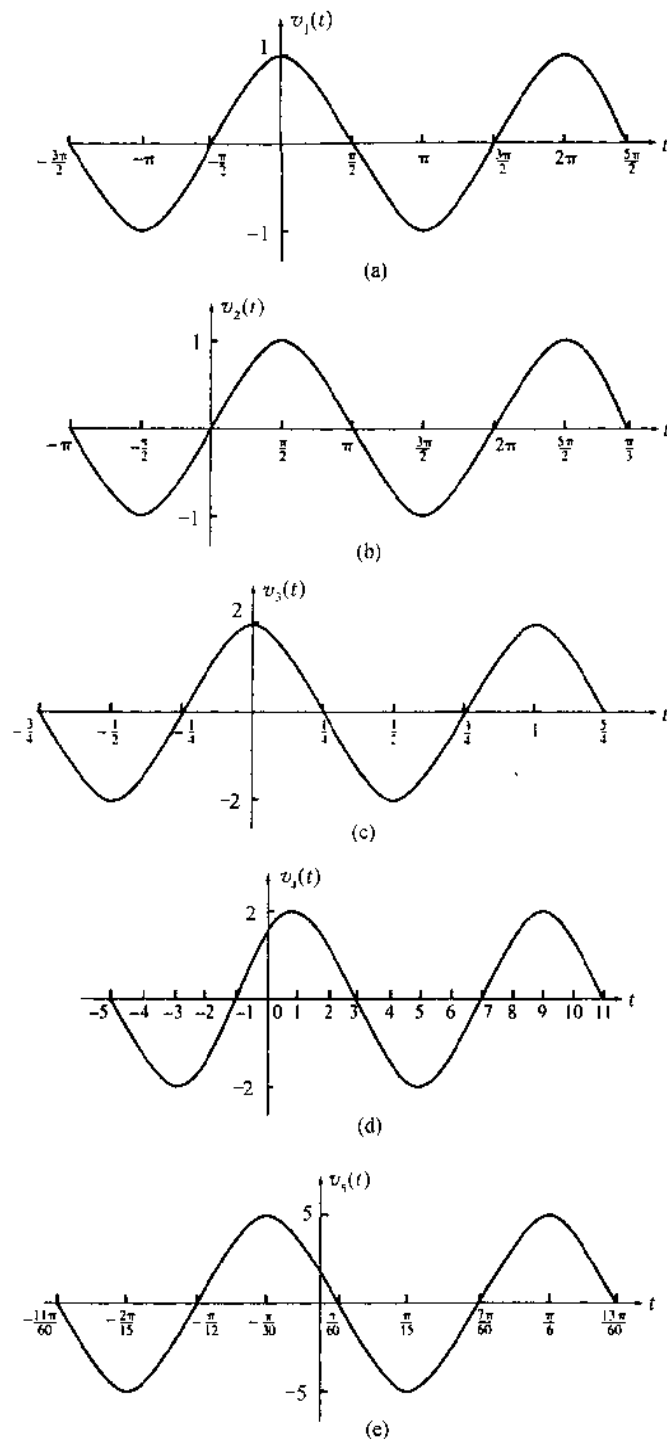


图 6-2

例 6.2 画出  $v(t) = 5 \cos \omega t$  的波形图. 横坐标是  $\omega t$ , 见图 6-3.

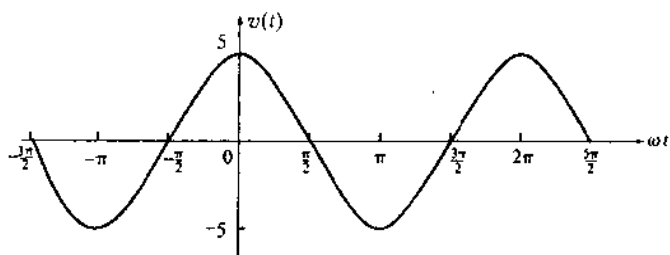


图 6-3

### 6.4 时移与相移

如果将函数  $v(t) = \cos \omega t$  延时  $\tau$  秒, 得到

$$v(t - \tau) = \cos \omega(t - \tau) = \cos(\omega t - \theta)$$

这里  $\theta = \omega\tau$ ,  $v(t)$  的图形向右共延时了  $\tau$  秒, 相当于相位滞后  $\theta = \omega\tau = 2\pi f\tau$ . 如果在图中向左时移  $\tau$  秒, 产生了  $v(t + \tau)$ , 这叫做相位超前.

换句话说, 相位移  $\theta$  相应于  $\tau$  的时移量. 因此, 对于给定的相位移来说频率越高, 需要的时移就越少.

**例 6.3** 画出  $v(t) = 5 \cos(\pi t/6 + 30^\circ)$  的波形图. 横坐标是  $t$  和  $\pi t/6$ .

重新写出下式

$$v(t) = 5 \cos(\pi t/6 + \pi/6) = 5 \cos[\pi(t + 1)/6]$$

这是个周期为 12 s 的余弦函数, 时间超前 1 s, 即图形向左移 1 s 或  $30^\circ$ , 波形如图 6-4 所示.

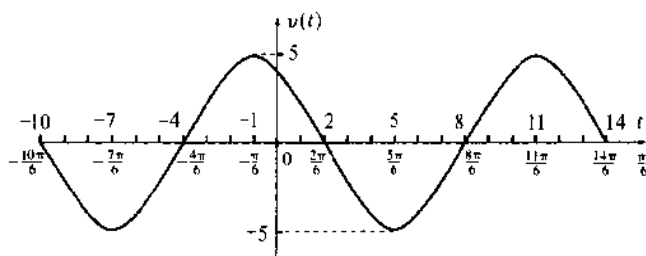


图 6-4

**例 6.4** 考虑一个线性电路对于所有  $\omega$  和  $A$  有以下输入-输出对

输入:  $v_i(t) = A \cos \omega t$       输出:  $v_o(t) = A \cos(\omega t - \theta)$

已知  $v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$ , 求在下面给定条件下的  $v_o(t)$ :

(a)  $\theta = 10^6 \omega$  [相位移与频率成比例, 见图 6-5(a)]

(b)  $\theta = 10^{-6}$  [相位移是常数, 见图 6-5(b)]

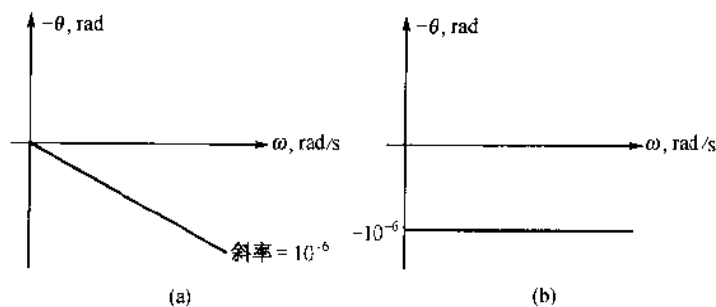


图 6-5

输出电压是  $v_o(t) = \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \cos(\omega_2 t - \theta_2)$

(a)  $\theta_1 = 10^{-6} \omega_1$ ,  $\theta_2 = 10^{-6} \omega_2$ , 那么

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \cos(\omega_1 t - 10^{-6} \omega_1) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6} \omega_2) \\ &= \cos \omega_1(t - 10^{-6}) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}) = v_i(t - 10^{-6}) = v_i(t - \tau) \end{aligned}$$

这里  $\tau = 10^{-6} \text{ s} = 1 \mu\text{s}$ . 这样, 与  $\omega$  成比例的相位移 [图 6-5(a)], 使输入信号中所有成分都延时了 1 s. 输出信号将无失真地跟随输入信号.

(b)  $\theta_1 = \theta_2 = 10^{-6}$ , 那么

$$v_o(t) = \cos(\omega_1 t - 10^{-6}) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6})$$

$$= \cos \omega_1(t - 10^{-6}/\omega_1) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}/\omega_2)$$

从图 6-5(b)可见, 一个常数的相位对输入信号的不同频率分量, 延时不同, 所以输出信号是输入信号的失真形式。

### 6.5 周期信号的合成

如果周期分别为  $T_1$  和  $T_2$  的两个周期函数可以找出公共周期  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ , 其中  $n_1$  和  $n_2$  分别是整数, 则它们的和是一个周期函数。这里要求  $T_1/T_2 = n_2/n_1$  一定是一个有理数。除此以外, 其他函数的和就不是周期函数。

**例 6.5** 求函数  $v(t) = \cos 5t + 3 \sin(3t + 45^\circ)$  的周期。

$\cos 5t$  的周期是  $T_1 = 2\pi/5$ ;  $3\sin(3t + 45^\circ)$  的周期是  $T_2 = 2\pi/3$ 。取  $T = 2\pi = 5T_1 = 3T_2$  为  $T_1$  和  $T_2$  的最小公倍数。经观察得:  $v(t+T) = v(t)$ 。由于

$$v(t+T) = \cos 5(t+2\pi) + 3\sin[3(t+2\pi) + 45^\circ] = \cos 5t + 3\sin(3t + 45^\circ) = v(t)$$

所以  $v(t)$  的周期是  $2\pi$ 。

**例 6.6**  $v(t) = \cos t + \cos 2\pi t$  是周期函数吗? 请讨论。

$\cos t$  的周期是  $T_1 = 2\pi$ ,  $\cos 2\pi t$  的周期是  $T_2 = 1$ 。因为  $T_1/T_2 = 2\pi$  不是有理数, 它们不存在公共周期  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ , 所以  $v(t)$  不是周期函数。

**例 6.7** 给定  $p = 3.14$ , 求  $v(t) = \cos t + \cos 2pt$  的周期是多少?

$\cos t$  的周期是  $T_1 = 2\pi$ ,  $\cos 2pt$  的周期是  $T_2 = \pi/3.14$ ,  $T_1/T_2 = 6.28$  是有理数。整数对  $n_1 = 25$  和  $n_2 = 157$  满足  $n_2/n_1 = T_1/T_2 = 628/100 = 157/25$ 。所以  $v(t)$  是周期为  $T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = 50\pi$  s 的周期函数。

### 三角公式

表 6-1 中所列公式是电路分析中的常用公式。

表 6-1

$\sin a = -\sin(-a)$	(5a)
$\cos a = \cos(-a)$	(5b)
$\sin a = \cos(a - 90^\circ)$	(5c)
$\cos a = \sin(a + 90^\circ)$	(5d)
$\sin 2a = 2\sin a \cos a$	(6a)
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$	(6b)
$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$	(7a)
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$	(7b)
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	(8a)
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	(8b)
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$	(9a)
$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b)$	(9b)
$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$	(9c)
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$	(10a)
$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$	(10b)

**例 6.8** 把函数  $v(t) = \cos 5t \sin(3t + 45^\circ)$  表达为两个余弦函数之和, 并求它的周期.

$$\begin{aligned} v(t) &= \cos 5t \sin(3t + 45^\circ) = [\sin(8t + 45^\circ) - \sin(2t - 45^\circ)]/2 \quad [\text{方程(9b)}] \\ &= [\cos(8t - 45^\circ) + \cos(2t + 45^\circ)]/2 \quad [\text{方程(5c)}] \end{aligned}$$

函数  $v(t)$  的周期是  $\pi$ .

## 6.6 平均值和有效值(均方根值)

一个周期为  $T$  的周期函数  $f(t)$  的平均值  $F_{\text{avg}}$  可以由下式计算

$$F_{\text{avg}} = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (11)$$

同一周期时间内的均方根值或有效值由下面的公式定义

$$F_{\text{eff}} = F_{\text{rms}} = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (12)$$

可见  $F_{\text{eff}}^2 = \langle f^2(t) \rangle$ .

周期函数的平均值和有效值通常可以在一个周期上进行计算.

**例 6.9** 求余弦波  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$  的平均值和有效值.

应用(11)式得

$$V_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cos(\omega t + \theta) dt = \frac{V_m}{\omega T} [\sin(\omega t + \theta)]_0^T = 0 \quad (13)$$

使用(12)式

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] dt = V_m^2/2$$

由此解出

$$V_{\text{eff}} = V_m / \sqrt{2} = 0.707 V_m \quad (14)$$

方程(13)和(14)说明结果的表达式与频率和相位  $\theta$  无关, 即一个余弦波的平均值总是 0, 有效值总是  $0.707 V_m$ .

**例 6.10** 求半波整流正弦波形的  $V_{\text{avg}}$  和  $V_{\text{eff}}$ .

$$v(t) = \begin{cases} V_m \sin \omega t & \sin \omega t > 0 \\ 0 & \sin \omega t < 0 \end{cases} \quad (15)$$

由(11)式

$$V_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin \omega t dt = \frac{V_m}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = V_m / \pi \quad (16)$$

从(12)式得出

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^{T/2} V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) dt = V_m^2/4$$

由此可得

$$V_{\text{eff}} = V_m/2 \quad (17)$$

**例 6.11** 求下面周期函数  $v(t)$  在一个周期  $T$  以内的  $V_{\text{avg}}$  和  $V_{\text{eff}}$

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & 0 < t < T_1 \\ -V_0 & T_1 < t < 3T_1 \end{cases} \quad \text{周期 } T = 3T_1 \quad (18)$$

有

$$V_{\text{avg}} = \frac{V_0}{3T} (T_1 - 2T_1) = -\frac{V_0}{3} \quad (19)$$

及

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{V_0^2}{3T} (T_1 + 2T_1) = V_0^2$$



由此可得

$$V_{\text{eff}} = V_0 \quad (20)$$

上面的计算结果可以作为一般性的结论:如果  $|v(t)| = V_0$  则  $V_{\text{eff}} = V_0$ .

**例 6.12** 计算连接到电压源  $v(t)$  的一个电阻器从  $0 \sim T$  时间内消耗的平均功率. 用恒定电压  $V_{\text{dc}}$  代替  $v(t)$ . 求在这个周期内具有相同平均功率的  $V_{\text{dc}}$ .

$$p = vi = v^2/R$$

$$p_{\text{avg}} = \frac{1}{RT} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{R} V_{\text{eff}}^2 = \frac{V_{\text{dc}}^2}{R} \quad \text{或} \quad V_{\text{dc}} = V_{\text{eff}}$$

**例 6.13** 图 6-6 所示的电流  $i(t)$  通过  $1 \mu\text{F}$  的电容器. 求 (a) 当  $t = 5 \text{ ms}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) 时电容器两端的电压  $v_{\text{ac}}$  (b) 在  $t > 0$  时将恒定电流源  $I_{\text{dc}}$  加在电容器两端, 在  $t = 5 \text{ ms}$  时产生相同电压. 在  $t > 0$  以后  $5 \text{ ms}$  的一个周期里, 将  $I_{\text{dc}}$  与图 6-6 所示电路中  $i(t)$  的平均值  $\langle i(t) \rangle$  进行比较.

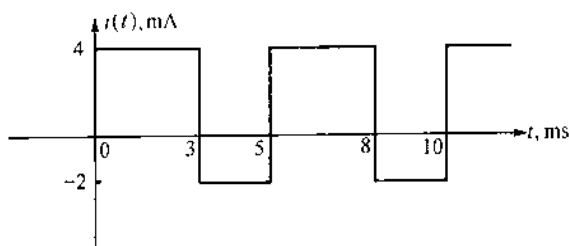


图 6-6

(a) 在  $t = 5 \text{ ms}$  时

$$v_{\text{ac}} = \frac{1}{C} \int_0^{5 \times 10^{-3}} i(t) dt = 10^6 (10^{-3}) \left[ \int_0^{3 \times 10^{-3}} 4 dt - \int_{3 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} 2 dt \right] = 12 - 4 = 8 \text{ V}$$

这是在每  $5 \text{ ms}$  间隔期间电流  $i(t)$  的净充电作用. 每过  $5 \text{ ms}$ , 电容两端电压就加一次上面的数值. 所以, 在  $t = 5k \text{ ms}$  时电容器电压是  $v = 8k \text{ (V)}$

(b) 因为电流  $I_{\text{dc}}$  恒定, 则在  $t = 5k \text{ ms}$  时电容器两端电压  $V_{\text{dc}}$  是

$$v_{\text{dc}} = \frac{1}{C} \int_0^{5k \times 10^{-3}} I_{\text{dc}} dt = 10^6 (I_{\text{dc}}) (5k \times 10^{-3}) = 10^3 (5k) (I_{\text{dc}}) \text{ (V)}$$

因为在  $5k \text{ ms}$  时  $V_{\text{dc}} = v_{\text{ac}}$ , 我们得出

$$10^3 (5k) (I_{\text{dc}}) = 8k \quad \text{或} \quad I_{\text{dc}} = 8k / (5k \times 10^3) = 1.6 \times 10^{-3} \text{ A} = 1.6 \text{ mA}$$

注意, 图 6-6 中的电流  $I_{\text{dc}} = \langle i(t) \rangle$  是对  $t > 0$  后任何  $5 \text{ ms}$  的周期的数值.

## 6.7 非周期函数

非周期函数不能用简单且确定的有限部分去对非周期函数的所有时间段进行描述. 一些非周期函数的例子是

$$(a) \quad v_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$(b) \quad v_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (22)$$

$$(c) \quad v_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$(d) \quad v_4(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t > 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$(e) \quad v_5(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t/\tau} \cos \omega t & t > 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$(f) \quad v_6(t) = e^{-t/\tau} \quad \text{对所有 } t \quad (26)$$

$$(g) \quad v_7(t) = e^{-a|t|} \quad \text{对所有 } t \quad (27)$$

$$(h) \quad v_8(t) = e^{-a|t|} \cos \omega t \quad \text{对所有 } t \quad (28)$$

这些函数中已有几个函数在电路分析和设计中被用作实际信号的数学模型并建立了方块图. 在下面的几节中将对这些例子进行讨论.

## 6.8 单位阶跃函数

无量纲的单位阶跃函数定义为

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (29)$$

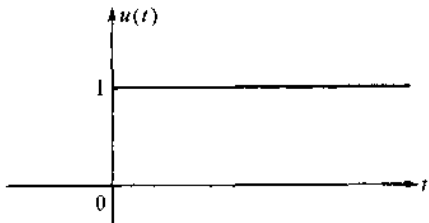


图 6-7

这个函数画于图 6-7 中. 注意, 函数在  $t = 0$  时没有定义.

为了说明  $u(t)$  的使用, 假设图 6-8(a) 所示的电路中有一个开关  $S$ , 在  $t < 0$  时, 开关位于位置 1, 而在  $t = 0$  的时刻开关移到位置 2.  $A-B$  两端的电压可以用  $v_{AB} = V_0 u(t)$  表示. 电压阶跃的等效电路如图 6-8(b) 所示.

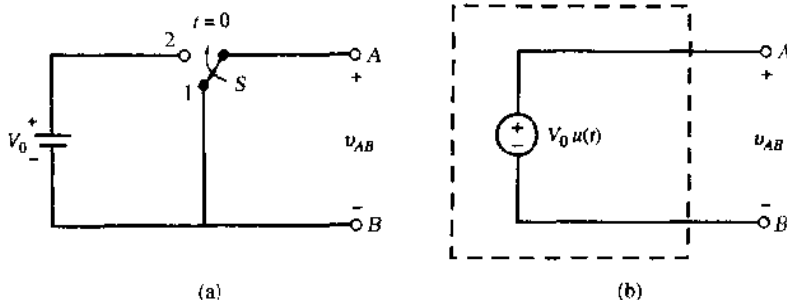


图 6-8

**例 6.14** 图 6-8(a) 所示电路中的开关在  $t = t_0$  时移动到位置 2. 用阶跃函数表示  $v_{AB}$ . 一直到  $t = t_0$  时刻, 在  $A-B$  两端才出现电压  $V_0$ . 用  $t - t_0$  代替阶跃函数中的  $t$ , 得到  $v_{AB} = V_0 u(t - t_0)$ .

**例 6.15** 如果图 6-8(a) 所示电路中的开关在  $t = 0$  时移动到位置 2, 然后在  $t = 5$  s 时又返回到位置 1, 用阶跃函数表示  $v_{AB}$ .

$$v_{AB} = V_0 [u(t) - u(t - 5)]$$

**例 6.16** 用阶跃函数表示图 6-9 所示的波形  $v(t)$ .

$$v(t) = [u(t) - u(t - 2\pi)] \sin t$$

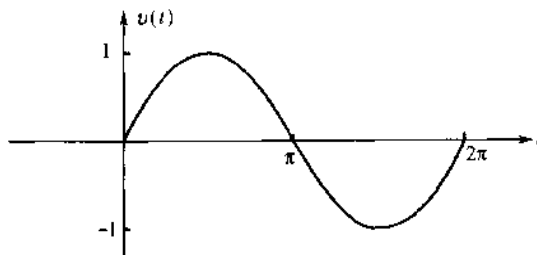


图 6-9

### 6.9 单位冲激函数

考虑图 6-10(a)所示的函数  $s_T(t)$ , 该函数在  $t < 0$  时为零, 在  $T$  秒内函数又从 0 均匀地增加到 1. 它的导数  $d_T(t)$  是持续时间为  $T$ 、高度为  $1/T$  的脉冲, 见图 6-10(b)所示.

$$d_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (30)$$

如果减少转换时间, 图 6-10(b)的这个脉冲将变窄变高, 但是这个脉冲下的面积将保持为 1. 如果令  $T$  接近 0, 在这种限制下函数  $s_T(t)$  则变为一个单位阶跃函数  $u(t)$ , 并且它的导数  $d_T(t)$  就变为零宽度和无限高度的单位冲激函数  $\delta(t)$ . 单位冲激函数的波形示于图 6-10(c). 单位冲激函数或单位  $\delta$  函数由下式定义

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad \text{及} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (31)$$

一个面积为  $A$  的幅值有限的窄脉冲的冲激函数可以表示为  $A\delta(t)$ . 有时把幅值  $A$  叫做冲激强度. 在  $t = t_0$  时刻出现的单位冲激表示为  $\delta(t - t_0)$ .

**例 6.17** 一个 100 nF 的电容器的端电压从 0 V 线性增长到 10 V, 取图 6-10(a)中函数  $s_T(t)$  的形状. 求: (a) 在  $t = T$  时, 电容两端的电荷量; (b) 当  $T = 1$  s、 $T = 1$  ms 以及  $T = 1$   $\mu$ s 时的电容电流  $i_C(t)$ .

(a) 当  $t = T$ ,  $v_C = 10$  V. 电容两端的电荷是  $Q = Cv_C = 10^{-7} \times 10 = 10^{-6}$ .

(b)

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

根据图 6-10 可知

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 = 10^{-6}/T & (A) \quad 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (32)$$

对于  $T = 1$  s,  $I_0 = 10^{-6}$  A; 对于  $T = 1$  ms,  $I_0 = 10^{-3}$  A; 对于  $T = 1$   $\mu$ s,  $I_0 = 1$  A.

在上述所有的情况下, 转换周期结束时电容器两端累积的电荷是

$$Q = \int_0^T i_C(t) dt = I_0 T = 10^{-6} C$$

在  $t = T$  时, 电荷总量与  $T$  无关. 电容器两端的电压一般是 10 V.

**例 6.18** 假定  $d_T(t - t_0)$  表示在时间  $t = t_0$  处开始, 宽度为  $T$  高度为  $1/T$  的窄脉冲. 考虑函数  $f(t)$  在时间  $t_0$  和  $t_0 + T$  之间是连续的, 如图 6-11(a)所示. 求当  $T$  趋于零时 (33) 式中电流  $I$  积分的极限值.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d_T(t - t_0) f(t) dt \quad (33)$$

$$d_T(t - t_0) = \begin{cases} 1/T & t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

将  $d_T$  代入 (33) 式中, 我们得到

$$I = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{S}{T} \quad (34a)$$

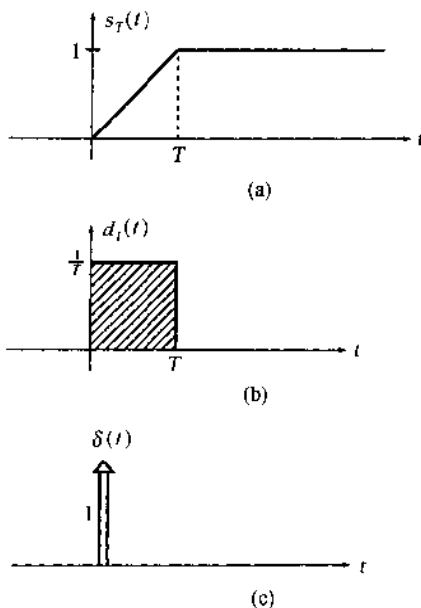


图 6-10

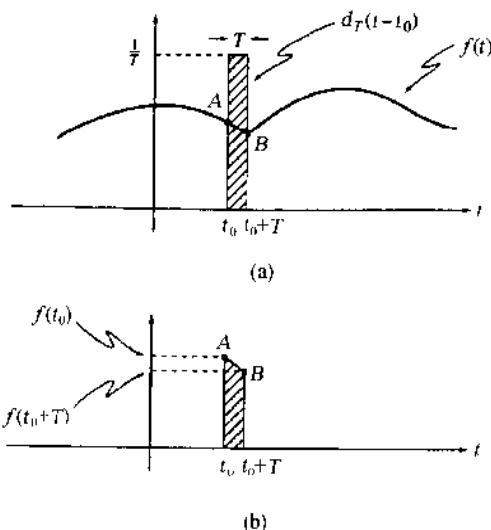


图 6-11

这里  $S$  是图 6-11 中函数  $f(t)$  在  $t_0 \sim t_0 + T$  期间阴影部分的面积. 假设  $T$  值较小, 函数  $f(t)$  可以用一条连接  $A$ 、 $B$  两点的直线近似.  $S$  表示形成的梯形面积.

$$S = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] T \quad (34b)$$

$$I = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] \quad (34c)$$

当  $T \rightarrow 0$ ,  $d_T(t - t_0) \rightarrow \delta(t - t_0)$ , 且  $f(t_0 + T) \rightarrow f(t_0)$ , 由 (34c) 式, 有

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] \quad (34d)$$

我们假设  $f(t)$  在  $t_0$  到  $t_0 + T$  之间是连续的. 所以

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = f(t_0) \quad (34e)$$

但是

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt \quad (34f)$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (34g)$$

等式 (34g) 叫做冲激函数的过滤性质. 也可以作为  $\delta(t)$  的另一个定义.

## 6.10 指数函数

具有复数常数  $s$  的函数  $f(t) = e^{st}$  叫做指数函数. 如果  $s$  的实数部分是负值, 则该函数是随时间衰减的, 如果  $s$  的实数部分是正值则该函数是随时间增长的. 我们将要讨论指数函数  $e^{at}$ , 其中常数  $a$  是实数.

常数  $a$  的倒数具有时间的量纲, 叫做时间常数  $\tau = 1/a$ . 图 6-12 以  $t$  为轴画出了一个衰减的指数函数  $e^{-t/\tau}$ . 该函数从  $t=0$  时的 1 衰减到  $t=\infty$  时的 0. 经过  $\tau$  秒以后函数减少到  $e^{-1} = 0.368$ . 当  $\tau=1$  时, 函数  $e^{-t}$  叫作归一化指数, 在以  $t/\tau$  为横轴绘制图形时, 该函数图与  $e^{-t/\tau}$  相同.

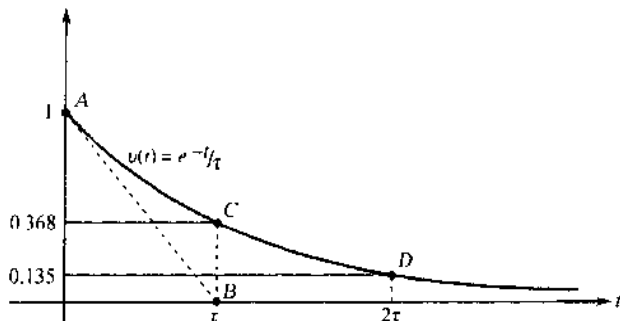


图 6-12

**例 6.19** 在图 6-12 中, 试证明在  $t=0$  点  $e^{-t/\tau}$  函数曲线的切线与  $t$  轴在  $t=\tau$  处相交.

这条切线自  $A$  点开始 ( $v=1, t=0$ ), 斜率为  $dv/dt|_{t=0} = -1/\tau$ . 这条斜线的方程是  $v_{\text{tan}}(t) = -t/\tau + 1$ . 与  $t$  轴的交点是  $B$ , 该点坐标为  $t=\tau$ . 如例 6-20 所描述的

那样,这里的观察结果提供了一种方便的绘制指数函数曲线的近似方法.

**例 6.20** 画出  $v(t) = e^{-t/\tau}$  在  $t > 0$  时的近似曲线.

确定曲线的初始点  $A(t=0, v=1)$  和曲线与  $t$  轴上  $t=\tau$  的交点  $B$ . 画出切线  $AB$ . 两个辅助点  $C, D$  位于  $t=\tau$  和  $t=2\tau$  处, 高度值分别是  $0.368$  和  $0.368^2=0.135$ , 这两点也在曲线上. 利用这个标记, 绘制的曲线近似性更好(见图 6-12).

**例 6.21** (a) 证明指数函数  $v = Ae^{st}$  的关于时间变化率在任意时刻与该时刻函数的值成正比;  
(b) 证明指数函数的任意线性组合和它的  $n$  阶导数与函数本身成正比. 求比例系数.

(a) 函数的变化率等于函数的导数, 对于给定的指数函数, 有

$$\frac{dv}{dt} = sAe^{st} = sv$$

(b) 利用(a)得出的结论, 我们写出

$$\frac{d^n v}{dt^n} = s^n Ae^{st} = s^n v$$

$$a_0 v + a_1 \frac{dv}{dt} + \cdots + a_n \frac{d^n v}{dt^n} = (a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n) v = H v \quad (35)$$

这里

$$H = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n \quad (36)$$

**详细说明并画图**  $f(t) = Ae^{-at} + B$

我们经常遇到这样的函数

$$f(t) = Ae^{-at} + B \quad (37)$$

用三个参数  $A, B$  和  $a$  完整地说明这个函数, 其定义为

$$A = \text{初值} - \text{终值} \quad B = \text{终值} \quad a = \text{时间常数的倒数}$$

或者, 用另一种形式:

$$\text{初始值 } f(0) = A + B \quad \text{终值 } f(\infty) = B \quad \text{时间常数} = 1/a$$

**例 6.22** 求一个函数  $v(t)$ , 该函数从  $t=0$  时的  $5\text{ V}$  按指数衰减到  $t=\infty$  的  $1\text{ V}$ , 时间常数为  $3\text{ s}$ . 应用例 6.20 的方法画出  $v(t)$  曲线.

根据(37)式, 有  $v(t) = Ae^{-t/\tau} + B$ . 现在  $v(0) = A + B = 5$ ,  $v(\infty) = B = 1$ ,  $A = 4$  和  $\tau = 3$ . 这样

$$v(t) = 4e^{-t/3} + 1$$

根据上面的结果, 可以采用下面一般化的形式

$$v(t) = (\text{初始值} - \text{终值})e^{-t/\tau} + (\text{终值})$$

曲线图画于图 6-13 中.

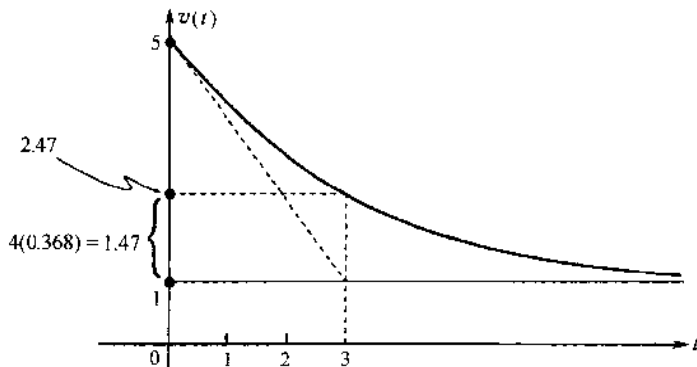


图 6-13

**例 6.23** 电容器两端接入电压为  $v = V_0 e^{-t/\tau}$ , 其中  $\tau > 0$ . 求电容器中的电流  $i$ , 并画出当  $V_0 = 10 \text{ V}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  和  $\tau = 1 \text{ ms}$  时  $v$  和  $i$  的图形.

应用  $i = Cdv/dt$  可得

$$t < 0 \quad v = V_0 e^{t/\tau} \quad \text{以及} \quad i = I_0 e^{t/\tau}$$

$$t > 0 \quad v = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{以及} \quad i = -I_0 e^{-t/\tau}$$

这里  $I_0 = CV_0/\tau$ .

由  $V_0 = 10 \text{ V}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  和  $\tau = 10^{-3} \text{ s}$ , 我们得到  $I_0 = 10 \text{ mA}$ .  $v$  和  $i$  的图形分别画于图 6-14(a), (b).

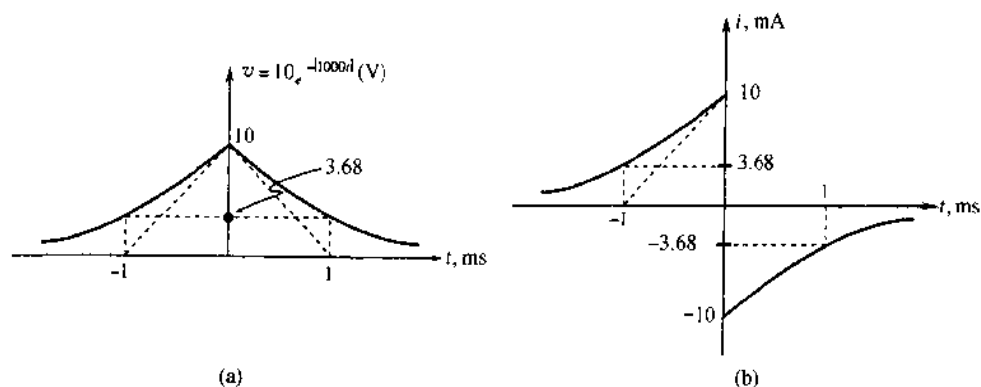


图 6-14

### 6.11 带阻尼的正弦波

一个幅值按指数规律衰减的阻尼正弦波的形式如下

$$v(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t + \theta) \quad (38)$$

这个函数将在第 8 章进行更详细的讨论.

**例 6.24** 电流  $i = I_0 e^{-at} \cos \omega t$  通过一个串联的  $RL$  电路. (a) 求这个电路两端的电压  $v_{RL}$ ; (b) 计算当  $I_0 = 3 \text{ A}$ ,  $a = 2$ ,  $\omega = 40 \text{ rad/s}$ ,  $R = 5 \Omega$  以及  $L = 0.1 \text{ H}$  时的  $v_{RL}$ , 画出作为时间函数的  $i$  的曲线.

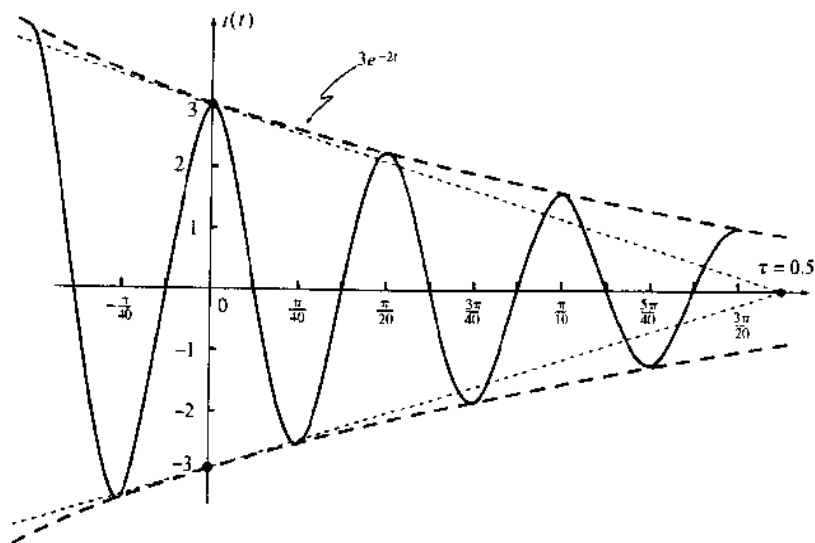


图 6-15

(a) 我们有

$$v_R = Ri = RI_0 e^{-at} \cos \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = -LI_0 e^{-at} (a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

$$v_{RL} = v_R + v_L = I_0 e^{-at} [(R - La) \cos \omega t - L\omega \sin \omega t] = V_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

$$\text{这里 } V_0 = I_0 \sqrt{(R - La)^2 + L^2 \omega^2} \text{ 以及 } \theta = \tan^{-1} [L\omega / (R - La)] \quad (39)$$

(b) 将给定的参数代入(39)式, 得出  $V_0 = 18.75 \text{ V}$ ,  $\theta = 39.8^\circ$ . 电流  $i$  和电压  $v_{RL}$  为

$$i = 3e^{-2t} \cos 40t \quad \text{和} \quad v_{RL} = 18.75e^{-2t} \cos(40t + 39.8^\circ)$$

图 6-15 画出了电流  $i$  的波形.

## 6.12 随机信号

到目前为止, 我们对完全确定的信号进行了论述. 例如, 对于一个像线电压这样的正弦波, 如果它的幅值、频率和相位都已知的話, 我们便可以确定这个波形在所有时刻的数值. 这种信号叫做确定性信号.

还存在有另一种信号, 这种信号只能通过时间平均值部分地说明, 例如它的平均值、均方根值和频率范围. 这些信号都叫做随机信号. 随机信号可以传输信息, 而且不会由于信息内容通常混有噪声而造成错误.

由于说话音调在麦克风端子记录的电压和通过天线调节广播电台及电视台采集到的信号就是随机信号的例子. 对这样信号未来的趋势和数值只能以平均值的方式预测但并不精确. 其他随机信号的例子, 如在数字计算机中的二进制波形, 图像在整个区域内的清晰度, 在 AM 系统中经载波和幅度调制后的语言或音乐信号.

对于仅仅用平均值来说明的随机信号的讨论似乎是无用的, 而通过谐波信号分析我们会发现许多在电路中这样的信号平均值的作用.

**例 6.25** 在表 6-2 中给出了每 1 ms 对随机信号的采样, 用  $x(n)$  表示. 根据给出的信息近似估计  $x(t)$  平均值和均方根值.

表 6-2

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x(n)$	2	4	11	5	7	6	9	10	3	6	8	4	1	3	5	12

$x(t)$  和  $x^2(t)$  的时间平均值可以近似地表示为  $x(n)$  的形式.

$$X_{\text{avg}} = (2 + 4 + 11 + 5 + 7 + 6 + 9 + 10 + 3 + 6 + 8 + 4 + 1 + 3 + 5 + 12) / 16 = 6$$

$$\begin{aligned} X_{\text{eff}}^2 &= (2^2 + 4^2 + 11^2 + 5^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 3^2 + 6^2 + 8^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 \\ &\quad + 12^2) / 16 \\ &= 46 \end{aligned}$$

$$X_{\text{eff}} = 6.78$$

**例 6.26** 一个二进制信号  $v(t)$  是 0.5 V 或 -0.5 V. 它可以在 1 ms 的时间间隔里变化符号, 事先不知道符号的变化, 但是它的正值和负值的变化机会相等. 所以, 如果对这个信号进行长时间的测量, 它在 0.5 V 和 -0.5 V 的时间总和是相等的. 确定这个函数在 10 s 的周期内的平均值和有效值.

$$v_{\text{avg}} = (0.5 \times 5000 - 0.5 \times 5000) / 10\,000 = 0$$

$v(t)$  的有效值是

$$V_{\text{eff}}^2 = [(0.5)^2 \times 5000 + (-0.5)^2 \times 5000] / 10\,000 = (0.5)^2 \quad \text{或者} \quad V_{\text{eff}} = 0.5 \text{ V}$$

$V_{\text{eff}}$  的值是准确的并与符号变化的次数无关.

## 习题及解答

- 6.1 求  $v = 1 + 2\sin(\omega t + \theta)$  的最大值和最小值, 已知  $\omega = 1000 \text{ s}$  和  $\theta = 3 \text{ rad}$ . 如果  $v$  是周期函数, 求它的频率  $f$  和周期  $T$ . 说明它的相位角(用度数表示).

解

$$V_{\max} = 1 + 2 = 3 \quad V_{\min} = 1 - 2 = -1$$

函数  $v$  是周期性的. 为了求出它的频率和周期, 我们知道  $\omega = 2\pi f = 1000 \text{ rad/s}$ . 于是,  $f = 1000/2\pi = 159.15 \text{ Hz}$  以及  $T = 1/f = 2\pi/1000 = 0.00628 \text{ s} = 6.28 \text{ ms}$

$$\text{相位角 } 3\text{rad} - 180^\circ \times 3/\pi = 171.9^\circ$$

- 6.2 在微波波程测量系统中, 传送的是电磁信号为  $v_1 = A\sin 2\pi ft$ ,  $f = 100 \text{ MHz}$ , 从目标端记录下它的回波为  $v_2(t)$ . 波程用  $\tau$  来计算,  $\tau$  是信号和回波之间的延迟时间. (a) 写出  $v_2(t)$  的表达式, 并计算出当延迟时间为  $\tau_1 = 515 \text{ ns}$  和  $\tau_2 = 555 \text{ ns}$  时的相位角; (b) 能够根据  $v_2(t)$  的相位角准确地计算出两个波之间的距离吗? 如果不能, 请确定需要补充的信息.

解 (a) 设  $v_2(t) = B\sin 2\pi f(t - \tau) = B\sin(2\pi ft - \theta)$

对于  $f = 100 \text{ MHz} = 10^8 \text{ Hz}$ ,  $\theta = 2\pi f\tau = 2 \times 10^8 \pi \tau = 2\pi k + \phi$ , 这里  $0 < \phi < 2\pi$ .

$\tau_1 = 515 \times 10^{-9}$ ,  $\theta_1 = 2\pi \times 10^8 \times 515 \times 10^{-9} = 103\pi = 51 \times 2\pi + \phi_1$  或  $k_1 = 51$  及  $\phi_1 = \pi$ .

$\tau_2 = 555 \times 10^{-9}$ ,  $\theta_2 = 2\pi \times 10^8 \times 555 \times 10^{-9} = 111\pi = 55 \times 2\pi + \phi_2$  或  $k_2 = 55$  及  $\phi_2 = \pi$

(b) 因为相位角  $\phi_1$  与  $\phi_2$  相等, 则不能根据每一个相应的相位角  $\phi_1$  与  $\phi_2$  而区别出延时时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$ . 为了准确的确定两个波之间的距离, 还需要  $k$  和  $\phi$  的数值.

- 6.3 证明: 如果两个周期函数  $v_1(t)$  和  $v_2(t)$  的周期  $T_1$ ,  $T_2$  有公倍数, 则这两个函数的和  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$  也是周期函数, 并且  $v(t)$  的周期是  $T_1$  与  $T_2$  的最小公倍数. 在这种情况下说明  $V_{\text{avg}} = V_{1,\text{avg}} + V_{2,\text{avg}}$

证明 如果可以找出两个整数  $n_1$  和  $n_2$  使得  $T = n_1 T_1 + n_2 T_2$ , 那么有  $v_1(t) = v_1(t + n_1 T_1)$  和  $v_2(t) = v_2(t + n_2 T_2)$ . 则

$$v(t + T) = v_1(t + T) + v_2(t + T) = v_1(t) + v_2(t) = v(t)$$

所以  $v(t)$  是周期为  $T$  的周期函数.

平均值是

$$V_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T [v_1(t) + v_2(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_2(t) dt = V_{1,\text{avg}} + V_{2,\text{avg}}$$

- 6.4 证明  $\cos^2(\omega t + \theta)$  的平均值是  $1/2$ .

证明 使用等式  $\cos^2(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\omega t + \theta)]$ , 记号  $\langle f \rangle = F_{\text{avg}}$ , 以及 6.3 题的结果, 有

$$\langle 1 + \cos 2(\omega t + \theta) \rangle = \langle 1 \rangle + \langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle$$

但是  $\langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle = 0$ , 所以,  $\langle \cos^2(\omega t + \theta) \rangle = 1/2$ .

- 6.5 设  $v(t) = V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)$ . 证明:  $V_{\text{eff}}^2 = V_{\text{dc}}^2 + \frac{1}{2} V_{\text{ac}}^2$ .

证明

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac}}^2 \cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{\text{dc}} V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)] dt \\ &= V_{\text{dc}}^2 + \frac{1}{2} V_{\text{ac}}^2 \end{aligned}$$

用另一种方法, 可以写出

$$V_{\text{eff}}^2 = \langle v^2(t) \rangle = \langle [V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)]^2 \rangle$$



$$\begin{aligned}
 &= \langle V_{dc}^2 + V_{ac}^2 \cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{dc}V_{ac} \cos(\omega t + \theta) \rangle \\
 &= V_{dc}^2 + V_{ac}^2 \langle \cos^2(\omega t + \theta) \rangle + 2V_{dc}V_{ac} \langle \cos(\omega t + \theta) \rangle \\
 &= V_{dc}^2 + \frac{1}{2} V_{ac}^2
 \end{aligned}$$

- 6.6 假设  $f_1$  和  $f_2$  是  $f_0$  的两个不同的谐波. 试证明  $v(t) = V_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$  的有效值是  $\sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}$ .

证明

$$\begin{aligned}
 v^2(t) &= V_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \\
 &\quad + 2V_1 V_2 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \\
 V_{eff}^2 &= \langle v^2(t) \rangle = V_1^2 \langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle + V_2^2 \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle \\
 &\quad + 2V_1 V_2 \langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle
 \end{aligned}$$

但是,  $\langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle = \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle = 1/2$  (见习题 6.4), 并且

$$\begin{aligned}
 &\langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle \\
 &= \langle \cos[2\pi(f_1 + f_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] \rangle + \langle \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + (\theta_1 - \theta_2)] \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

所以,  $V_{eff}^2 = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)$  即  $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}$ .

- 6.7 图 6-16 所示的信号  $v(t)$  是正弦波信号. 求信号的周期和频率. 把它表示为  $v(t) = A + B \cos(\omega t + \theta)$ , 并求出它的平均值和有效值.

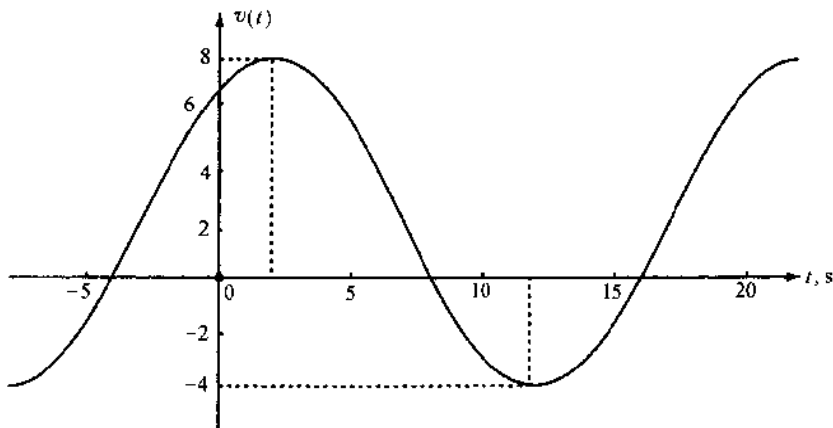


图 6-16

解 两个正峰值之间的时间为一个周期,  $T = 20$  s, 相当于  $f = 0.05$  Hz. 这个信号是具有幅值  $B$  加上一项常数  $A$  的余弦函数.

$$B = \frac{1}{2}(V_{\max} - V_{\min}) = \frac{1}{2}(8 + 4) = 6 \quad A = V_{\max} - B = V_{\min} + B = 2$$

余弦波形向右移动 2 s, 相当于相位滞后  $(2/20)360^\circ = 36^\circ$ . 因此这个信号可以表示为

$$v(t) = 2 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 36^\circ\right)$$

平均值和有效值可以由  $A$  和  $B$  求出

$$V_{avg} = A = 2 \quad V_{eff}^2 = A^2 + B^2/2 = 2^2 + 6^2/2 = 22 \quad \text{或} \quad V_{eff} = \sqrt{22} = 4.69$$

- 6.8 设  $v_1 = \cos 200\pi t$ ,  $v_2 = \cos 202\pi t$ . 证明  $v = v_1 + v_2$  是周期函数. 求函数的周期,  $V_{\max}$  和  $v$  达到最大值的时间.

解  $v_1$  和  $v_2$  的周期分别是  $T_1 = 1/100$  s 和  $T_2 = 1/101$  s.  $v = v_1 + v_2$  的周期是  $T_1$  和  $T_2$  的最小公倍数, 为  $T = 100T_1 = 101T_2 = 1$  s.  $v_1$  和  $v_2$  都达到最大值是在  $t = k$  点, 其中  $k$  为整数, 所以  $v$  的最大值是  $V_{\max} = 2$ .

6.9 将  $v(t) = 3\cos 100t + 4\sin 100t$  转换为  $A\sin(100t + \theta)$ .

解 注意到,  $3/\sqrt{3^2+4^2} = 3/5 = \sin 36.87^\circ$  以及  $4/\sqrt{3^2+4^2} = 4/5 = \cos 36.87^\circ$ , 则

$$\begin{aligned} v(t) &= 3\cos 100t + 4\sin 100t = 5(0.6\cos 100t + 0.8\sin 100t) \\ &= 5(\sin 36.87^\circ \cos 100t + \cos 36.87^\circ \sin 100t) = 5\sin(100t + 36.87^\circ) \end{aligned}$$

6.10 求图 6-12(b)中  $v_2(t)$  的平均值和有效值, 已知  $V_1 = 2$ ,  $V_2 = 1$ ,  $T = 4T_1$ .

解

$$\begin{aligned} V_{2,\text{avg}} &= \frac{V_1 T_1 - V_2(T - T_1)}{T} = \frac{V_1 - 3V_2}{4} = -0.25 \\ V_{2,\text{eff}}^2 &= \frac{V_1^2 T_1 + V_2^2(T - T_1)}{T} = \frac{7}{4} \quad \text{或者} \quad V_{2,\text{eff}} = \sqrt{7}/2 = 1.32 \end{aligned}$$

6.11 求图 6-1(c)中的  $V_{3,\text{avg}}$  和  $V_{3,\text{eff}}$ , 已知  $T = 100T_1$ .

解 从图 6-1(c)可知  $V_{3,\text{avg}} = 0$ . 为了求出  $V_{3,\text{eff}}$ , 观察到,  $v_3^2$  的一个周期的积分是  $V_0^2 T_1/2$ . 所以, 在  $T = 100T_1$  的期间里  $v_3^2$  的平均值是

$$\langle v_3^2(t) \rangle = V_{3,\text{eff}}^2 = V_0^2 T_1/200T_1 = V_0^2/200 \quad \text{或者} \quad V_{3,\text{eff}} = V_0\sqrt{2}/20 = 0.0707V_0$$

因子  $\sqrt{T/T_1} = 10$  使音调波群的有效值减少.

6.12 参考图 6-1(d), 设  $T = 6$  并设  $v_4(t)$  正的和负的两部分面积分别是  $+5$  和  $-3$ . 求  $v_4(t)$  的平均值和有效值.

解

$$V_{4,\text{avg}} = (5 - 3)/6 = 1/3$$

有效值不能从给定的数据确定.

6.13 求图 6-17(a)中半波整流的余弦波  $v_1(t)$  的平均值和有效值.

解

$$\begin{aligned} V_{1,\text{avg}} &= \frac{V_m}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m T}{2\pi T} \left[ \sin \frac{2\pi t}{T} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m}{\pi} \\ V_{1,\text{eff}}^2 &= \frac{V_m^2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m^2}{2T} \int_{-T/4}^{T/4} \left( 1 + \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt \\ &= \frac{V_m^2}{2T} \left[ t + \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m^2}{2T} \left( \frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right) = \frac{V_m^2}{4} \end{aligned}$$

由此可得  $V_{1,\text{eff}} = V_m/2$ .

6.14 求图 6-17(b)所示的全波整流的余弦波  $v_2(t) = V_m |\cos 2\pi t/T|$  的平均值和有效值.

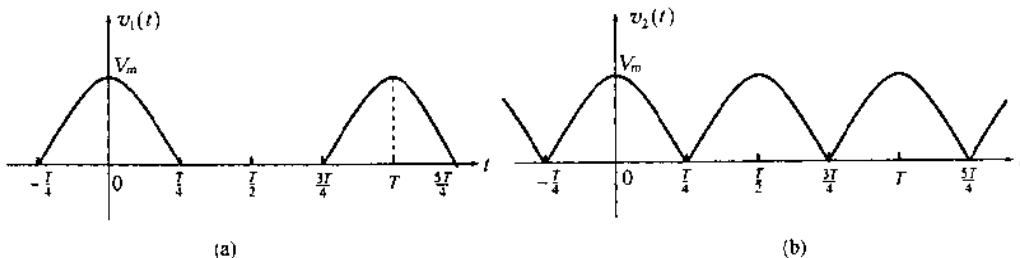


图 6-17

解 使用 6.3 题和 6.13 题的结果求  $V_{2,\text{avg}}$ , 这样

$$v_2(t) = v_1(t) + v_1(t - T/2) \quad \text{及} \quad V_{2,\text{avg}} = V_{1,\text{avg}} + V_{1,\text{avg}} = 2V_{1,\text{avg}} = 2V_m/\pi$$

使用 6.5 题和 6.13 题的结果求  $V_{2,\text{eff}}$ , 为

$$V_{2,\text{eff}}^2 = V_{1,\text{eff}}^2 + V_{1,\text{eff}}^2 = 2V_{1,\text{eff}}^2 = V_m^2/2 \quad \text{或} \quad V_{2,\text{eff}} = V_m/\sqrt{2}$$

$v_2(t)$  的均方根值也可以直接推导出. 因为进行了平方运算, 全波整流余弦函数与余弦函数本身的均

方根值相同,均为  $V_m/\sqrt{2}$ .

- 6.15 一个  $100\text{ mH}$  的电感器与  $20\ \Omega$  的电阻器串联[图 6-18(a)],通过的电流  $i$  见图 6-18(b)求  $R, L$  和  $RL$  的端电压并画出波形.

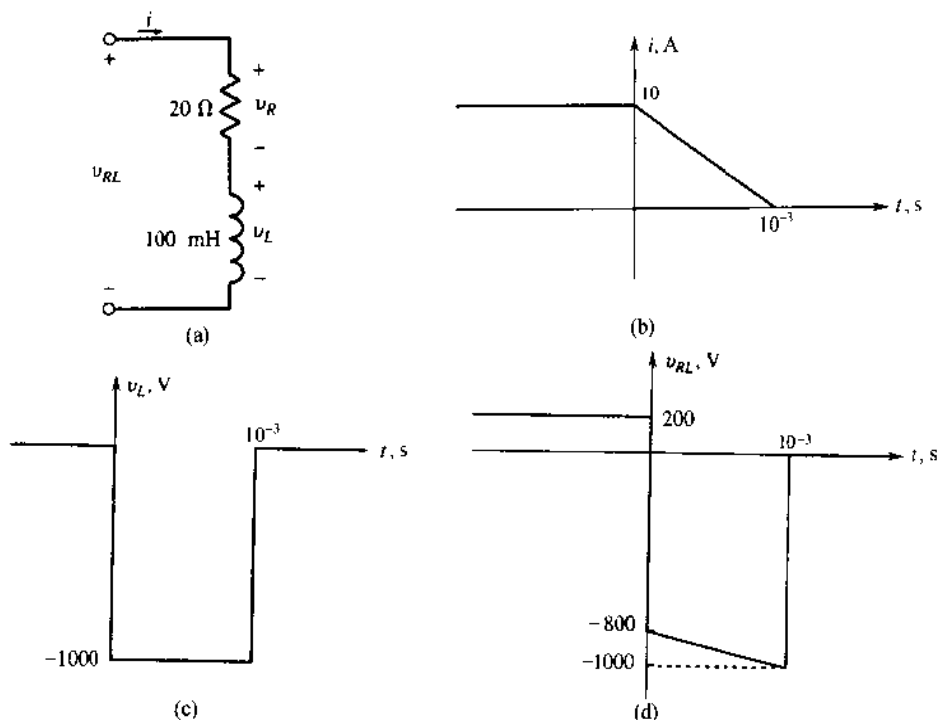


图 6-18

解

$$i = \begin{cases} 10 \\ 10(1 - 10^3 t) \quad (\text{A}) \\ 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -10^4 \text{ A/s} & 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

$$v_R = Ri = \begin{cases} 200 \text{ V} \\ 200(1 - 10^3 t) \quad (\text{V}) \\ 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad v_L = L \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -1000 \text{ V} & 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

因为是无源元件串联,  $v_{RL} = v_R + v_L$ , 所以

$$v_{RL} = \begin{cases} 200 \text{ V} & t < 0 \\ -2(10^5 t) - 800 \text{ (V)} & 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ 0 & t > 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

$v_L$  和  $v_{RL}$  的波形分别为图 6-18(c)和 6-18(d)所示. 电阻电压  $v_R$  的图形除了标尺乘上了一个因子  $+20$  以外与电流的波形相同[见图 6-18(b)].

- 6.16 一个峰值为  $V_m = 100\text{ V}$  的雷达信号  $s(t)$ , 由多重音波群组成. 每个音波群的持续时间为  $T_b = 50\ \mu\text{s}$ , 每间隔  $T_s = 1\text{ ms}$  重复一次. 求  $s(t)$  的  $S_{\text{eff}}$  和平均功率.

解 设  $V_{\text{eff}} = V_m/\sqrt{2}$  是一个波群中正弦信号的有效值, 一组信号波群中包含的能量是  $W_b = T_b V_{\text{eff}}^2$ .  $s(t)$  在一个周期所包含的能量是  $W_s = T_s S_{\text{eff}}^2$ . 因为  $W_b = W_s = W$ , 我们可以得到

$$T_b V_{\text{eff}}^2 = T_s S_{\text{eff}}^2 \quad S_{\text{eff}}^2 = (T_b/T_s) V_{\text{eff}}^2 \quad S_{\text{eff}} = \sqrt{T_b/T_s} V_{\text{eff}} \quad (40)$$

将  $T_b, T_s$  和  $V_{\text{eff}}$  代入式(40)中, 得到

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{(50 \times 10^{-6})/(10 \times 10^{-3})} (100/\sqrt{2}) = 5\text{ V}$$

则  $W = 10^{-2}(25) = 0.25\text{ J}$ .  $s(t)$  的平均功率是

$$P = W/T_s = T_s S_{\text{eff}}^2/T_s = S_{\text{eff}}^2 = 25\text{ W}$$

$s(t)$  的平均功率用  $S_{\text{eff}}^2$  表示, 而它的峰值功率用  $V_{\text{eff}}^2$  表示. 峰值功率与平均功率的比是  $\sqrt{T_s/T_b}$ . 在本题中平均功率和峰值功率分别是 25 W 和 5000 W.

- 6.17 一个装置使用 60 Hz,  $V_{\text{eff}} = 120$  V 的电源, 吸收电流为  $I_{\text{eff}} = 10$  A, 并且有  $60^\circ$  相位滞后. 将  $v, i, p = vi$  表示为时间函数, 并证明功率是具有直流分量的周期函数. 求频率和  $p$  的平均值, 最大值和最小值.

解 6.17

$$\begin{aligned} v &= 120\sqrt{2}\cos\omega t & i &= 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 60^\circ) \\ p &= vi = 2400\cos\omega t \cos(\omega t - 60^\circ) = 1200\cos 60^\circ + 1200\cos(2\omega t - 60^\circ) \\ &= 600 + 1200\cos(2\omega t - 60^\circ) \end{aligned}$$

这个功率函数是个周期函数. 频率是  $f = 2 \times 60 = 120$  Hz, 并且  $P_{\text{avg}} = 600$  W,  $P_{\text{max}} = 600 + 1200 = 1800$  W,  $P_{\text{min}} = 600 - 1200 = -600$  W.

- 6.18 如图 6-19 所示, 峰值为 1 A, 宽度为  $1 \mu\text{s}$  的窄脉冲在  $t = 0$  时刻作用于  $1 \mu\text{F}$  的电容器. 该电容中没有初始电荷. 求电容器两端的电压.

解 6.18 电容器两端的电压是

$$V_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10^6 t \text{ (V)} & 0 < t < 1 \mu\text{s} \text{ (充电周期)} \\ 1 \text{ V} & t > 1 \mu\text{s} \end{cases}$$

如果电容器存储相同的电荷量不需要时间, 就会有  $v = u(t)$  (V) 和  $i(t) = 10^{-6}\delta(t)$  (A).

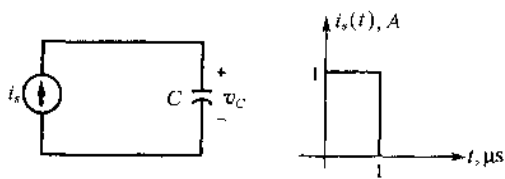


图 6-19

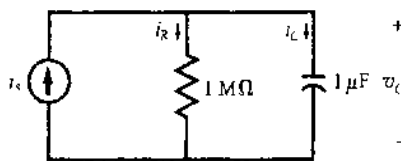


图 6-20

- 6.19 习题 6-18 中的窄脉冲  $i_s$  作用于  $1 \mu\text{F}$  电容器和  $1 \text{ M}\Omega$  电阻的并联电路(图 6-20). 假设脉冲在  $t = 0$  时刻结束, 电容器中没有初始电荷. 求 RC 并联电路的端电压.

解 6.19 假设  $v$  是 RC 并联电路的端电压. 电阻  $R$  中的电流是  $i_R = v/R = 10^{-6}v$ . 在脉冲作用期间, 由于电压  $v$  不会超过 1 V, 并且  $i_R$  保持在  $1 \mu\text{A}$  以下, 这时  $i_R$  可以忽略不计, 因此可以假设在脉冲作用期间,  $i_C = 1$  A, 进而可知  $v(0^+) = 1$  V. 对于  $t > 0$  时的情况, 在 RC 回路中应用 KVL 定律可得

$$v + \frac{dv}{dt} = 0 \quad v(0^+) = 1 \text{ V} \quad (41)$$

(41) 式的惟一答案是当  $t > 0$  时,  $v = e^{-t}$ , 或对所有时间  $t$  都有  $v(t) = e^{-t}u(t)$ . 对于所有实际情况,  $i_s$  可以被看作是大小为  $10^{-6}$  A 的冲激函数, 而  $v = e^{-t}u(t)$  (V) 叫做 RC 组合电路对电流冲激的响应.

- 6.20 画出函数  $v(t)$  的曲线. 该函数按指数规律从  $t = 0$  时的 5 V 变化到  $t = \infty$  时的 12 V. 时间常数是 2 s. 写出  $v(t)$  的方程式.

解 6.20 标出初始点  $A(t = 0, v = 5)$  以及渐近线  $v = 12$  V (如图 6-21 所示). 在  $t = 2$  处 A 点的切线与渐近线相交, 交点为渐近线上的 B 点. 画出切线 AB. 标出在  $t = 2$  处曲线上的点 C. 为了更准确地绘制曲线, 在  $t = 4$  处标出 D 点. 画出的曲线如图所示. 方程式是  $v(t) = Ae^{-t/2} + B$ . 由初始条件和终止条件, 我们可以得出  $v(0) = A + B = 5$  以及  $v(\infty) = B = 12$  或  $A = -7$ , 以及  $v(t) = -7e^{-t/2} + 12$ .

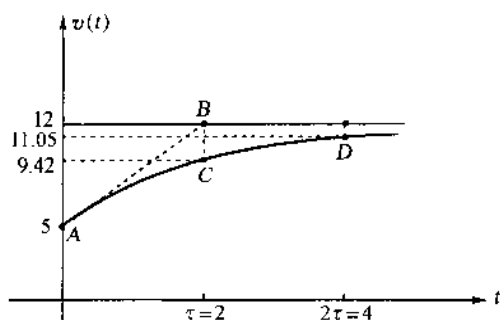


图 6-21

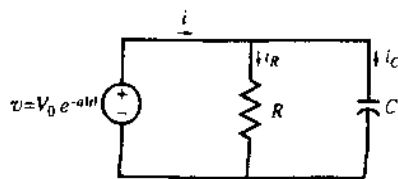
**6.21** 如图 6-22(a)所示, 将电压  $v = V_0 e^{-a|t|}$  连接到一个电阻器和一个电容器并联的电路, 其中,  $a > 0$ . (a) 求电流  $i_C$ ,  $i_R$ , 和  $i = i_C + i_R$ . (b) 设  $v_0 = 10 \text{ V}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $R = 1 \text{ M}\Omega$ , 及  $a = 1$ , 计算  $v$ ,  $i_C$ ,  $i_R$  和  $i$  并画出波形图.

**解** (a) 见表 6-3, 其中(a)即为所求的电流.

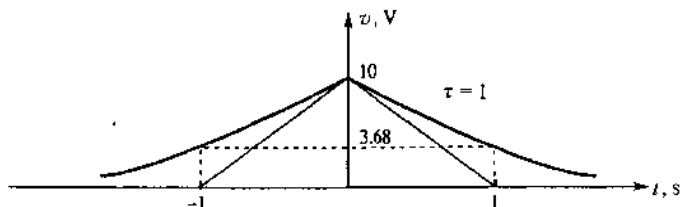
表 6-3

时间		$v$	$i_C = Cdv/dt$	$i_R = v/R$	$i = i_C + i_R$
(a)	$t < 0$	$v = V_0 e^{at}$	$i_C = CV_0 a e^{at}$	$i_R = (V_0/R) a e^{at}$	$i = V_0(Ca + 1/R) e^{at}$
	$t > 0$	$v = V_0 e^{-at}$	$i_C = -CV_0 a e^{-at}$	$i_R = (V_0/R) a e^{-at}$	$i = V_0(-Ca + 1/R) e^{-at}$
(b)	$t < 0$	$v = 10e^t$	$i_C = 10^{-5}e^t$	$i_R = 10^{-5}e^t$	$i = 2(10^{-5}e^t)$
	$t > 0$	$v = 10e^{-t}$	$i_C = -10^{-5}e^{-t}$	$i_R = 10^{-5}e^{-t}$	$i = 0$

(b) 见表 6-3 中的(b)项. 图 6-22(b)~(e)分别表示了给定参数下  $v$ ,  $i_C$ ,  $i_R$  和  $i$  的波形. 当  $t > 0$  时  $i = 0$ , 电压源不向 RC 组合电路提供任何电流. 由电容器提供电阻电流以维持两端的指数电压.



(a)



(b)

图 6-22

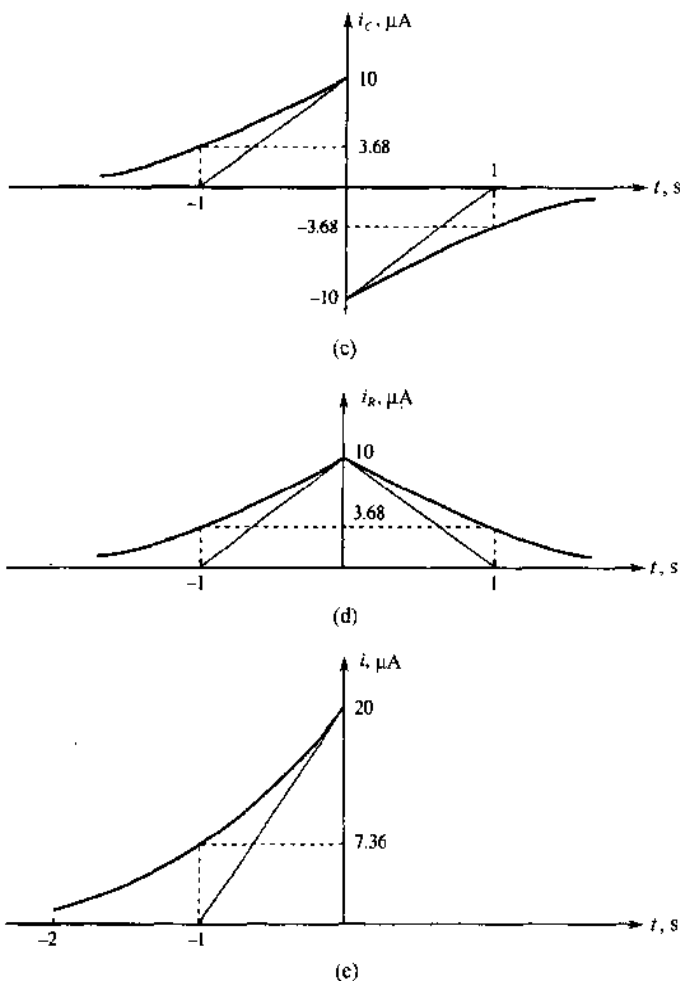


图 6-22(续)

## 补充习题

- 6.22 设  $v_1 = 8 \sin 100\pi t$  和  $v_2 = 6 \sin 99\pi t$ . 证明  $v = v_1 + v_2$  是周期函数. 求出  $v$  的周期、最大值、平均值和有效值.  
 答案:  $T = 2$ ,  $V_{\max} = 14$ ,  $V_{\text{avg}} = 0$ ,  $V_{\text{eff}} = 5\sqrt{2}$
- 6.23 求  $v(t) = 2 + 6\cos(10\pi t + \pi/6)$  的周期、频率、以度数表示的相位角、最大值、最小值、平均值和有效值.  
 答案:  $T = 0.2$  s,  $f = 5$  Hz, 相位  $= 30^\circ$ ,  $V_{\max} = 8$ ,  $V_{\min} = -4$ ,  $V_{\text{avg}} = 2$ ,  $V_{\text{eff}} = \sqrt{22}$
- 6.24 将  $v(t) = 2\cos(\omega t + 30^\circ) + 3\cos\omega t$  化简为  $v(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ .  
 答案:  $A = 4.84$ ,  $\theta = 102^\circ$
- 6.25 求图 6-1(b) 的曲线当  $V_1 = V_2 = 3$  以及  $T = 4T_1/3$  时的  $V_{2,\text{avg}}$  和  $V_{2,\text{eff}}$ .  
 答案:  $V_{2,\text{avg}} = 1.5$ ,  $V_{2,\text{eff}} = 3$
- 6.26 重复习题 6.25,  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 4$  和  $T = 2T_1$ .  
 答案:  $V_{2,\text{avg}} = -2$ ,  $V_{2,\text{eff}} = 2\sqrt{2}$
- 6.27 求图 6-1(c) 中图形的  $V_{3,\text{avg}}$  和  $V_{3,\text{eff}}$ , 设  $V_0 = 2$  以及  $T = 200 T_1$ .  
 答案:  $V_{3,\text{avg}} = 0$ ,  $V_{3,\text{eff}} = 0.1$
- 6.28 图 6-23 中的波形是正弦波. 用  $v = A + B\sin(\omega t + \theta)$  表示, 并求出它的平均值和均方根值.  
 答案:  $v(t) = 1 + 6\sin(\pi t/12 + 120^\circ)$ ,  $V_{\text{avg}} = 1$ ,  $V_{\text{eff}} = \sqrt{19}$

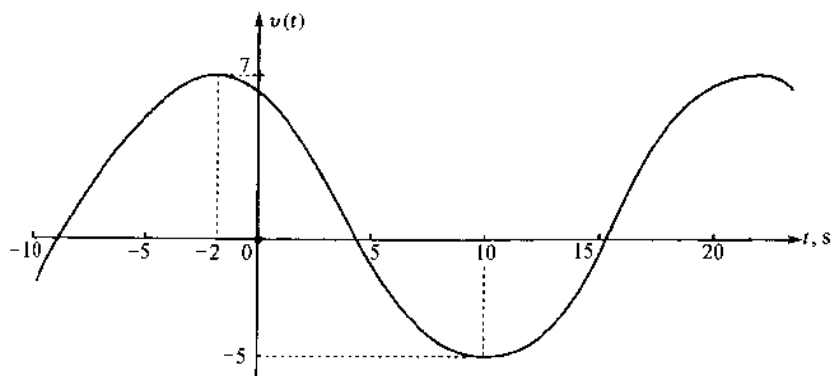


图 6-23

6.29 求图 6-24(a)中的  $v_1(t)$  和图 6-24(b)中的  $v_2(t)$  的平均值和有效值。

答案:  $V_{1,\text{avg}} = -\frac{1}{3}$ ,  $V_{1,\text{eff}} = \sqrt{\frac{17}{3}}$ ;  $V_{2,\text{avg}} = -\frac{1}{2}$ ,  $V_{2,\text{eff}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

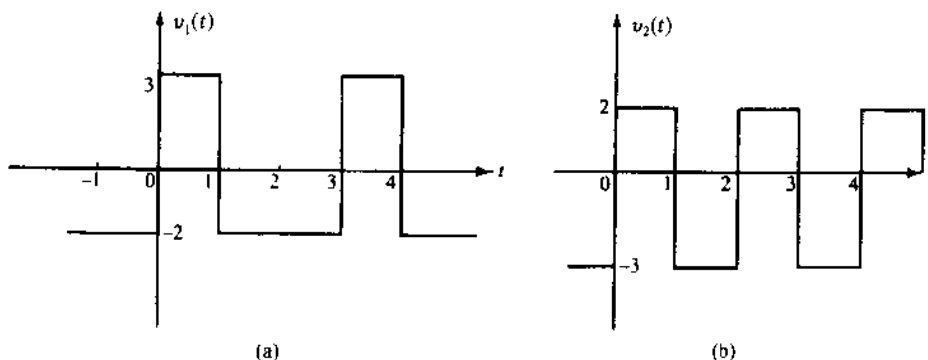


图 6-24

6.30 通过  $R = 5\Omega$  和  $L = 10\text{ H}$  的  $LR$  串联电路的电流在图 6-10(a)中给出, 其中  $T = 1\text{ s}$ . 求  $RL$  两端的电压。

答案: 
$$v = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10 + 5t & 0 < t < 1 \\ 5 & t > 1 \end{cases}$$

6.31 求习题 6-19(图 6-20)中对所有  $t$  的电容电流。

答案:  $i_c = 10^{-6}[\delta(t) - e^{-t}u(t)]$

6.32 一个  $1\text{ H}$  电感器两端的电压  $v$  是由图 6-25(a)中所示的一个周期的正弦波构成。(a)写出  $v(t)$  的方程式;(b)求通过电感器的电流,并画出波形图;(c)求电感器中能量的最大值和最大值时间。

答案:(a)  $v = [u(t) - u(t - T)]\sin\frac{2\pi t}{T}(\text{V})$

(b)  $i = (T/2\pi)[u(t) - u(t - T)]\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\right)(\text{A})$ , 见图 6-25(b)

(c) 在  $t = T/2$  时  $W_{\text{max}} = \frac{1}{2\pi^2}T^2(\text{J})$

6.33 写出函数  $v(t)$  的表达式。 $v(t)$  按指数规律从  $t = 0$  时的 7 衰减到  $t = \infty$  时的 3, 时间常数是  $200\text{ ms}$ 。

答案:  $v(t) = 3 + 4e^{-5t}$ ,  $t > 0$

6.34 写出函数  $v(t)$  的表达式,  $v(t)$  以指数规律从  $t = -\infty$  时的 0 增长到  $t = 0$  时的 9, 时间常数是  $0.8\text{ s}$ 。

答案:  $v(t) = 9e^{5t/4}$ ,  $t < 0$

6.35 用阶跃函数表示图 6-6 的电流。

答案:  $i(t) = 4u(t) + 6\sum_{k=1}^{\infty}[u(t - 5k) - u(t - 5k + 2)]$

6.36 在图 6-10(a)中, 设  $T = 1\text{ s}$ , 并称这个波形是  $s_1(t)$ 。用阶跃函数和冲激函数表示  $s_1(t)$  以及这个函数的一阶和二阶导数  $ds_1/dt$  和  $d^2s_1/dt^2$ 。

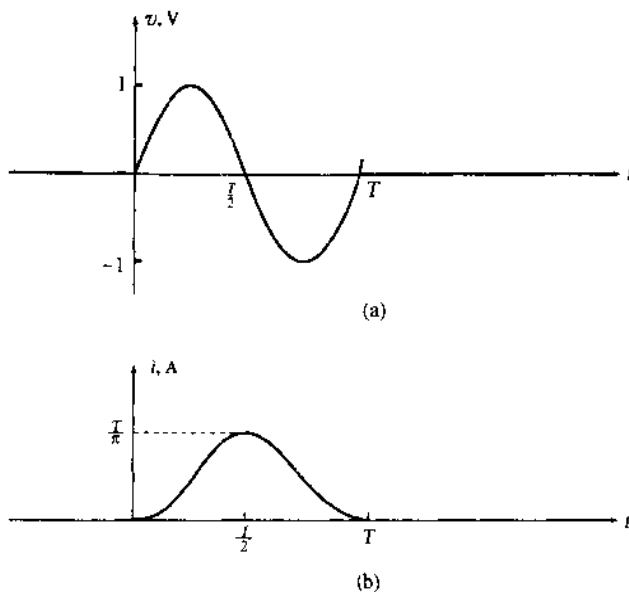


图 6-25

答案:  $s_1(t) = [u(t) - u(t-1)]t + u(t-1)$ ,  $ds_1/dt = u(t) - u(t-1)$ ,  $d^2s_1/dt^2 = \delta(t) - \delta(t-1)$

6.37 当施加在 10 mH 电感器两端一个冲激电压时, 会在  $t=0$  时刻产生一个 1 A 的跳变电流, 求冲激电压.

答案:  $v(t) = 10^{-2}\delta(t)$  (V)

6.38 (a) 给定  $v_1 = \cos t$ ,  $v_2 = \cos(t + 30^\circ)$  以及  $v = v_1 + v_2$ , 把  $v$  写成用单一余弦函数  $v = A\cos(t + \theta)$  表示的形式; (b) 求  $v_1$ ,  $v_2$  和  $v$  的有效值. 讨论为什么  $v_{\text{eff}}^2 > (v_{1,\text{eff}}^2 + v_{2,\text{eff}}^2)$ .

答案: (a)  $v = 1.93\cos(t + 15^\circ)$ ; (b)  $v_{1,\text{eff}} = v_{2,\text{eff}} = 0.707$ ,  $v_{\text{eff}} = 1.366$ .  $v_{\text{eff}}$  是由下面关系导出的:

$$v_{\text{eff}}^2 = \langle v^2 \rangle = \langle (v_1 + v_2)^2 \rangle = \langle v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle + 2\langle v_1v_2 \rangle$$

因为  $v_1$  和  $v_2$  具有相同的频率, 而且相位都超前  $30^\circ$ , 我们得到  $\langle v_1v_2 \rangle = \frac{1}{2}\cos 30^\circ = \sqrt{3}/4$ , 其数值为正, 所以  $v_{\text{eff}}^2 > (v_{1,\text{eff}}^2 + v_{2,\text{eff}}^2)$ .

6.39 (a) 证明  $v_1 = \cos t + \cos\sqrt{2}t$  不是周期函数; (b) 用 1.4 代替  $\sqrt{2}$ , 然后证明  $v_2 = \cos t + \cos 1.4t$  是周期函数并求出它的周期  $T_2$ ; (c) 用 1.41 代替  $\sqrt{2}$ , 然后求出  $v_3 = \cos t + \cos 1.41t$  的周期  $T_3$ ; (d) 用 1.4142 代替  $\sqrt{2}$ , 然后求出  $v_4 = \cos t + \cos 1.4142t$  的周期  $T_4$ .

答案: (a) 因为  $\sqrt{2}$  不是有理数, 所以  $v_1$  不是周期函数; (b)  $T_2 = 10\pi$  s; (c)  $T_3 = 200\pi$  s; (d)  $T_4 = 10000\pi$  s

6.40 一个均方根值为 5 V 的随机信号  $s(t)$  中含有 2 V 直流分量. 求  $s_0(t) = s(t) - 2$  的均方根值, 即消除直流分量以后的值.

答案:  $S_{0,\text{eff}} = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21} = 4.58$  V



## 第7章 一阶电路

### 7.1 引言

无论何时,激励电源的变化或电路元件的变化都会使电路从一种状态切换到另一种状态,支路电流和元件电压从原来的值变化到新的值都有一个过渡周期.这个周期被称做暂态过程.在暂态过去后,电路就处于稳定状态.现在,描述电路的线性微分方程有两部分解,互补函数(或齐次解)和特定解.互补函数对应于暂态,特定解对应于稳态.

在这一章,我们将求出给定变量初始条件和电源的一阶电路的响应.我们将引出一种直觉方法去得到相同的响应,而不必通过微分方程正式解.我们也提出和解决关于自然的、强制的、阶跃和冲激响应的一些重要问题,包括直流稳态和电感电容的换路行为.

### 7.2 通过一个电阻使电容放电

假设一个电容器在它的两极板有电压差  $V_0$ .当提供了一个传导通道电阻时,存储的电荷通过电容从一个极板到另一极板,形成一个电流  $i$ .这样,电容电压  $v$  逐渐的减小到零,这时电流也变为零.在图 7-1(a) 的 RC 电路中,  $Ri = v$  和  $i = -Cdv/dt$ .在方程中消去  $i$  得到

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \quad (1)$$

这个与自己的微分线性组合是零的函数是一个  $Ae^{st}$  形式的指数函数.在(1)式中用  $Ae^{st}$  代替  $v$ ,用  $sAe^{st}$  代替  $dv/dt$ ,得到

$$sAe^{st} + \frac{1}{RC}Ae^{st} = A\left(s + \frac{1}{RC}\right)e^{st} = 0$$

由此得

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \quad \text{或} \quad s = -\frac{1}{RC} \quad (2)$$

给定  $v(0) = A = V_0$ ,求得  $v(t)$  和  $i(t)$ :

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad t > 0 \quad (3)$$

$$i(t) = -C \frac{dv}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad t > 0 \quad (4)$$

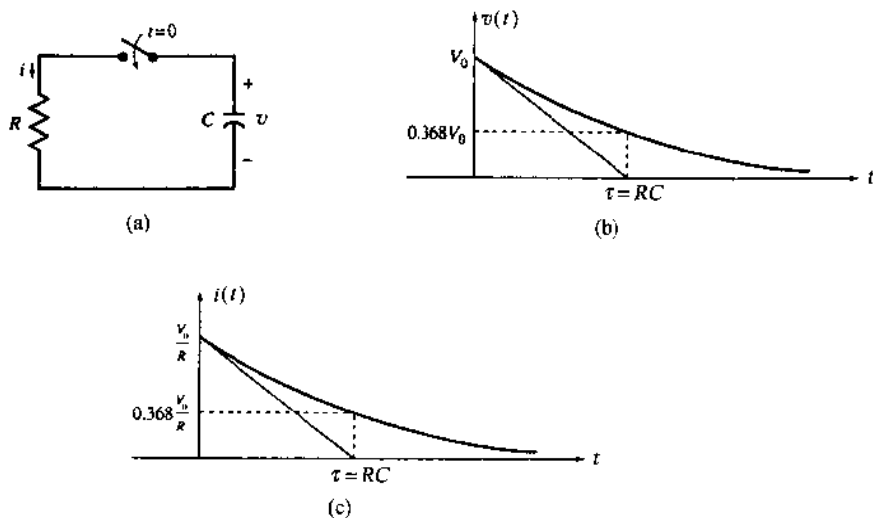


图 7-1

电容器的电压和电流分别是有初始值  $V_0$  和  $V_0/R$  的指数. 随着时间增加, 电压和电流以时间常数  $\tau = RC$  减小到零. 见图 7-1(b) 和 (c).

**例 7.1** 一个  $1\mu\text{F}$  的电容器两端的电压在  $t < 0$  时是  $10\text{V}$ . 当  $t = 0$  时, 将  $1\text{M}\Omega$  的电阻接在电容器的两端. 求时间常数  $\tau$ , 电压  $u(t)$  及其在  $t = 5\text{s}$  时的值.

$$\tau = RC = 10^6(10^{-6})\text{s} = 1\text{s}$$

$$v(t) = 10e^{-t}(\text{V}), t > 0 \quad v(5) = 10e^{-5} = 0.067\text{V}$$

**例 7.2** 一个有  $4\text{V}$  初始电压的  $5\mu\text{F}$  电容器, 与一个  $3\text{k}\Omega$  电阻和一个  $6\text{k}\Omega$  电阻并联的电路相连接(见图 7-2). 求  $6\text{k}\Omega$  电阻中通过的电流  $i$ .

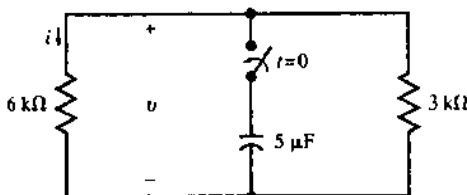


图 7-2

两个并联电阻的等效电阻是  $R = 2\text{k}\Omega$ , 电路的时间常数是  $RC = 10^{-2}\text{s}$ ,  $6\text{k}\Omega$  电阻的电压和电流分别是

$$v = 4e^{-100t}(\text{V}) \quad \text{及} \quad i = v/6000 = 0.67e^{-100t}(\text{mA})$$

### 7.3 在电容器两端建立直流电压

在  $t = 0$  时刻将一个没有初始电荷的电容器通过一个电阻连接到一个电压是  $V_0$  的电池上. 电路如图 7-3(a) 所示.

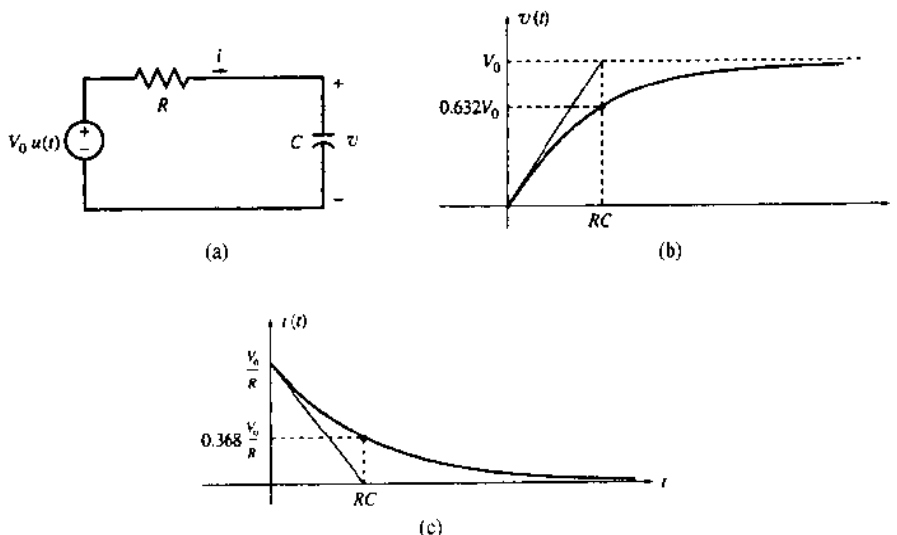


图 7-3

对于  $t > 0$ , 回路的 KVL 为  $Ri + v = V_0$ , 将  $i = C(dv/dt)$  代入, 方程变为

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{1}{R}V_0 \quad t > 0 \quad (5a)$$

初始条件为

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 \quad (5b)$$

答案应该满足 (5a) 式和 (5b) 式. 特定解(或强迫响应)  $v_p(t) = V_0$  满足 (5a) 式但不满足

(5b)式,可以加上齐次解(或自然响应) $v_h(t) = Ae^{-t/RC}$ 并且可以调整它的幅值 $A$ 使得全解(6a)满足(5a)式和(5b)式.

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_0 + Ae^{-t/RC} \quad (6a)$$

根据初始条件,  $v(0^+) = V_0 + A = 0$  或  $A = -V_0$ , 全解为

$$v(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})u(t) \quad [\text{见图 7-3(b)}] \quad (6b)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}u(t) \quad [\text{见图 7-3(c)}] \quad (6c)$$

**例 7.3** 一个有初始电压  $v(0^-) = 2V$  的  $4\mu F$  电容经过一个  $R = 5k\Omega$  的电阻在  $t = 0$  时连接到一个  $12V$  电池上, 求  $t > 0$  时电容两端的电压和流过的电流.

电路的时间常数是  $\tau = RC = 0.02s$ . 根据例 7.2 的分析, 得到

$$v(t) = 12 + Ae^{-50t}$$

由初始条件, 有

$$v(0^-) = v(0^+) = 12 + A = 2 \text{ 或 } A = -10. \text{ 因此对于 } t > 0,$$

$$v(t) = 12 - 10e^{-50t} (V)$$

$$i(t) = (12 - v)/5000 = 2 \times 10^{-3}e^{-50t} A = 2e^{-50t} (mA)$$

电流也可以通过  $i = C(dv/dt)$  计算出. 因此电压从初始值  $2V$  到最终值  $12V$  以  $20ms$  的时间常数呈指数规律增加, 如图 7-4(a) 所示. 而电流从  $2mA$  减少到零如图 7-4(b) 所示.

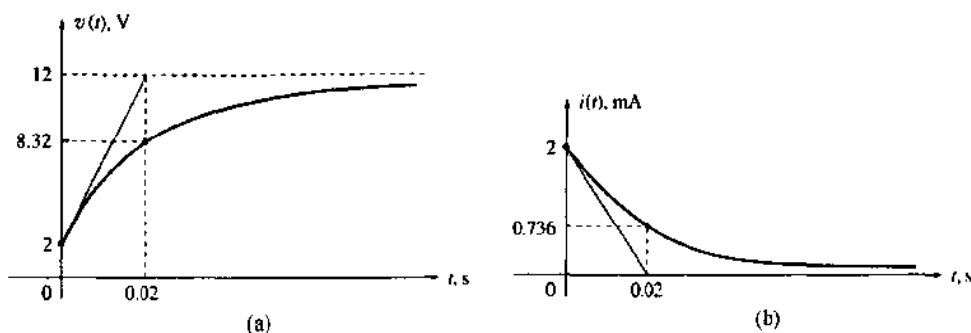


图 7-4

#### 7.4 无电源的 RL 电路

图 7-5 所示  $RL$  电路中, 假设在  $t = 0$  时电流为  $I_0$ .  $t > 0$  时  $i$  应该满足  $Ri + L(di/dt) = 0$ , 它的解是  $i = Ae^{st}$ . 用替换法求  $A$  和  $s$ .

$$A(R + Ls)e^{st} = 0, \quad R + Ls = 0, \quad s = -R/L$$

初始条件  $i(0) = A = I_0$ . 那么

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad t > 0 \quad (7)$$

电路的时间常数是  $L/R$

**例 7.4** 图 7-6(a) 中的  $12V$  电池在  $t = 0$  时是断开的, 求所有  $t$  时电感电流和电压.

假设开关  $S$  已经闭合了很长时间, 电感电流是常数, 电压是零. 在  $t = 0^-$  时电流为  $i(0^-) = 12/4 = 3A$ , 电路如图 7-6(b) 所示.  $t > 0$  电源断开后的电路如图 7-6(c) 所示. 对于  $t > 0$  电流以指数形式从  $3A$  减少到零. 电路时间常数为  $L/R = (1/100)s$ . 用例 7.3 的结果,  $t > 0$  时电感电流和电压分别是

$$i(t) = 3e^{-100t} (A)$$

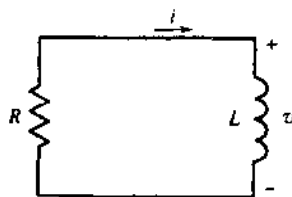


图 7-5

$$v(t) = L(di/dt) = -30e^{-100t} (\text{V})$$

$i(t)$  和  $v(t)$  分别画于图 7-6(d) 和 (e).

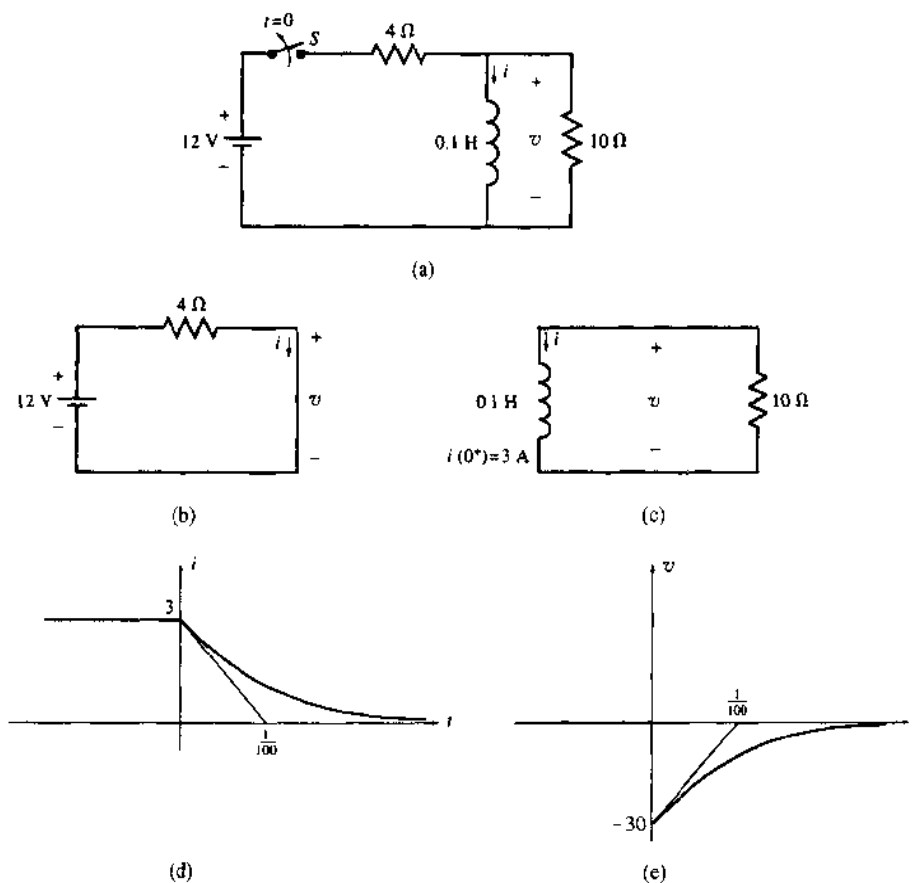


图 7-6

### 7.5 在电感中建立一个直流电流

如图 7-7(a) 所示, 如果一个直流电源突然加到一个初始值为零的  $RL$  电路, 电流将从零以指数形式增长到一个定值, 时间常数为  $L/R$ . 上面的结论是一阶微分方程式(8) 解答, 这可

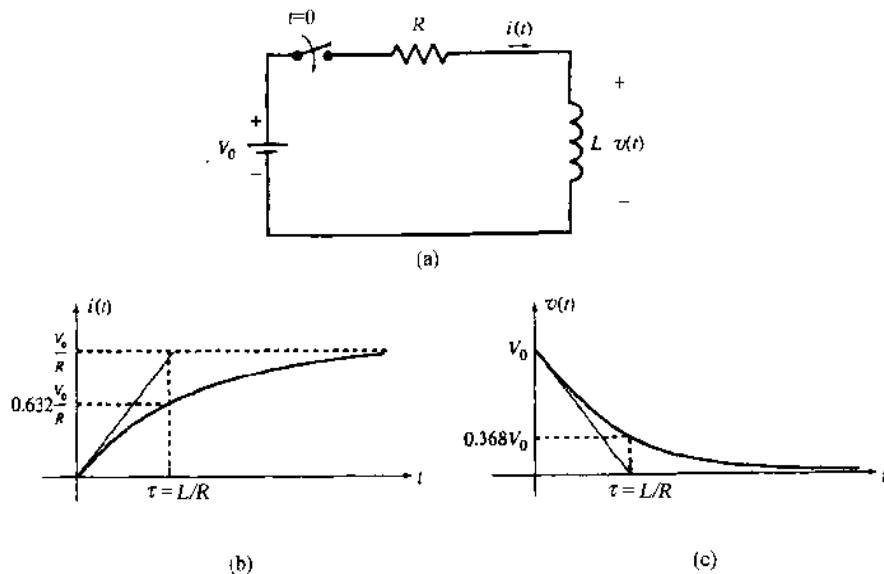


图 7-7

以对回路应用 KVL 求得, 解答如下

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 \quad t > 0, i(0^+) = 0 \quad (8)$$

由于  $i = i_h(t) + i_p(t)$ , 此处  $i_h(t) = Ae^{-Rt/L}$ ,  $i_p(t) = V_0/R$ , 有

$$i = Ae^{-Rt/L} + V_0/R$$

系数  $A$  从  $i(0^+) - A + V_0/R = 0$  或  $A = -V_0/R$  求得. 电感中的电流和它两端的电压由 (9) 和 (10) 式得出并分别画于图 7-7(b) 和图 (c).

$$i(t) = V_0/R(1 - e^{-Rt/L}) \quad t > 0 \quad (9)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = V_0 e^{-Rt/L} \quad t > 0 \quad (10)$$

## 7.6 再论指数函数

指数衰减函数可以写成  $e^{-t/\tau}$ , 这里  $\tau$  是时间常数(以 s 为单位). 对于第 7.2 节的 RC 电路,  $\tau = RC$ ; 对于第 7.4 节的 RL 电路,  $\tau = L/R$ . 一般衰减函数是

$$f(t) = Ae^{-t/\tau} \quad (t > 0)$$

画于图 7-8 中, 具有  $\tau$  的多个时间测量值. 可见

$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0.368A$$

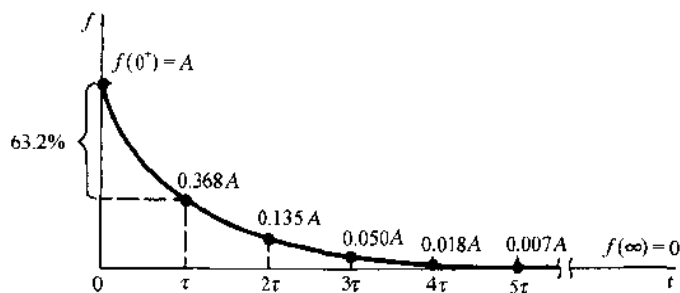


图 7-8

即在  $t = \tau$  时, 函数值是初始值的 36.8%. 也可以说函数值下降到从  $f(0^+)$  到  $f(\infty)$  变化值的 63.2%. 在  $t = 5\tau$  时, 函数值是 0.0067A, 比初始值的 1% 还小. 从实践观点看, 在  $t = 5\tau$  后就认为暂态结束了.

指数函数曲线在  $t = 0^+$  时刻的正切值常用来估计时间常数. 实际上因为

$$\text{斜率} = f'(0^+) = -\frac{A}{\tau}$$

切线一定交于水平轴的  $t = \tau$  点(如图 7-9). 更一般的, 在  $t = t_0$  时正切线具有水平截距

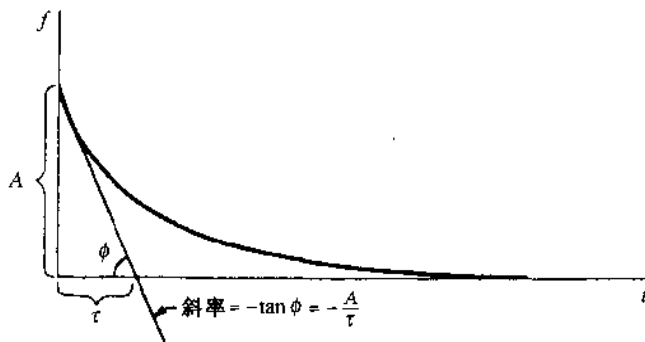


图 7-9

$t_0 + \tau$ . 这样, 如果知道了两个值  $f(t_0)$  和  $f'(t_0)$ , 就可以构造整个曲线.

有时一个暂态只能用特定方法显示(在图纸或示波器的屏幕上), 就不能用上面的方法得到函数瞬时值和所需要的斜率. 在这种情况下, 也许从仪器上读到的任意一对数据点可以用来求得暂态方程, 参见图 7-10.

$$f_1 = Ae^{-t_1/\tau} \quad f_2 = Ae^{-t_2/\tau}$$

联立求解可以得到

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln f_1 - \ln f_2}$$

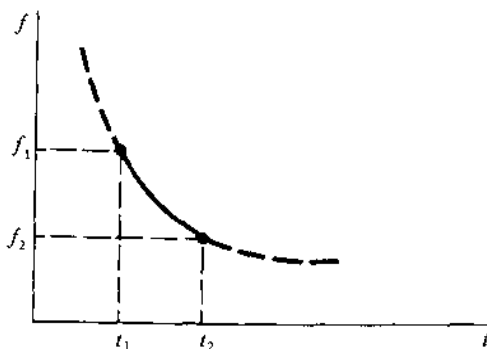


图 7-10

## 7.7 复杂的一阶 RL 电路和 RC 电路

包含电阻、电源和一个储能元件的一个更复杂的电路可以转换成从电感或电容两端看进去的戴维南或诺顿等效电路. 这就将复杂电路简化为一个简单的 RC 电路或 RL 电路, 它可以根据前面章节介绍的方法求解.

如果电路中一个电源突然切换到一个直流值, 引起的电流和电压是指数型的, 有相同的时间常数, 可能具有不同的初始值和终止值. 电路的时间常数是  $RC$  或  $L/R$ , 这里,  $R$  是从电容器或电感器看去的戴维南等效电路中的等效电阻.

例 7.5 求图 7-11(a) 中的  $i$ ,  $v$  和  $i_1$ .

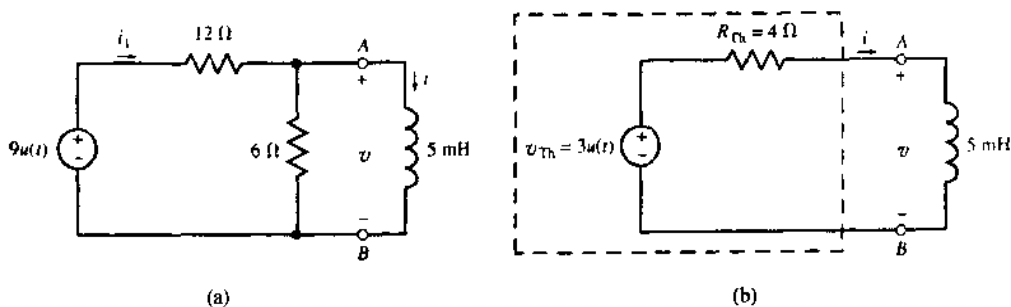


图 7-11

电感左方的戴维南等效电路示于图 7-11(b), 其中  $R_{Th} = 4\Omega$  和  $v_{Th} = 3u(t)$  (V). 电路的时间常数是  $\tau = L/R_{Th} = 5(10^{-3})/4s = 1.25ms$ . 电感电流初始值是零, 终值是

$$i(\infty) = \frac{v_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3V}{4\Omega} = 0.75 A$$

因此

$$i = 0.75(1 - e^{-800t})u(t) (A) \quad v = L \frac{di}{dt} = 3e^{-800t}u(t) (V)$$

$$i_1 = \frac{9-v}{2} = \frac{1}{4}(3-e^{-800t})u(t) \quad (\text{A})$$

$v$  也可以从下列条件直接推导出: 它的初始值是  $v(0^+) = (9 \times 6)/(12+6) = 3\text{V}$ , 终值是  $v(\infty) = 0$  以及电路的时间常数。

**例 7.6** 图 7-12 中一个  $9\mu\text{F}$  的电容在  $t=0$  时刻接在电路中. 此时电容电压是  $V_0 = 17\text{V}$ . 求  $t > 0$  时的  $v_A, v_B, v_C, i_{AB}, i_{AC}$  和  $i_{BC}$ .

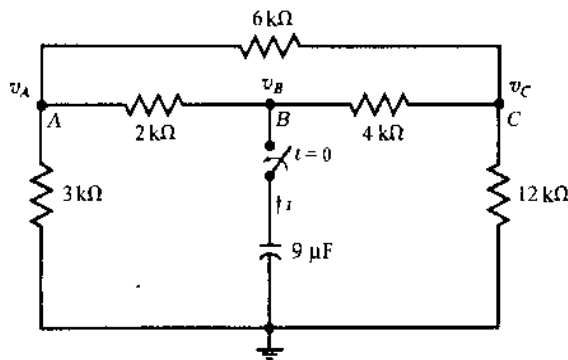


图 7-12

对  $t > 0$  时刻, 在节点  $A, B, C$  使用 KCL, 求用  $i$  表示的电压

$$\text{节点 } A: \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)v_A - \frac{1}{2}v_B - \frac{1}{6}v_C = 0 \quad \text{或者} \quad 6v_A - 3v_B - v_C = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{节点 } B: -\frac{1}{2}v_A + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)v_B - 10^3i - \frac{1}{4}v_C &= 0 \quad \text{或者} \\ -2v_A + 3v_B - v_C &= 4 \times 10^3i \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{节点 } C: -\frac{1}{6}v_A - \frac{1}{4}v_B + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)v_C &= 0 \quad \text{或者} \\ -2v_A - 3v_B + 6v_C &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

联立求解(11), (12)和(13)式得

$$v_A = \frac{7}{3}(10^3)i \quad v_B = \frac{34}{9}(10^3)i \quad v_C = \frac{8}{3}(10^3)i$$

可见, 电路中的电容器等效为一个电阻  $R = v_B/i = 34/9\text{k}\Omega$ . 电容器将初始电压  $V_0$  以指数形式放电, 时间常数为  $\tau = RC = \frac{34}{9}(10^3)(9 \times 10^{-6}) = 0.034\text{s}$ . 在  $t > 0$  时电压和电流是

$$v_B = V_0 e^{-t/\tau} = 17e^{-1000t/34} (\text{V})$$

$$i = -C \frac{dv_B}{dt} = (9 \times 17 \times 10^{-3}/34)e^{-1000t/34} = (4.5 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} (\text{A})$$

$$v_A = \frac{7}{3}(10^3)i = 10.5e^{-1000t/34} (\text{V})$$

$$v_C = \frac{8}{3}(10^3)i = 12e^{-1000t/34} (\text{V})$$

$$v_{AB} = v_A - v_B = -6.5e^{-1000t/34} (\text{V})$$

$$i_{AB} = v_{AB}/2000 = (-3.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} (\text{A})$$

$$v_{AC} = v_A - v_C = -1.5e^{-1000t/34} (\text{V})$$

$$i_{AC} = v_{AC}/6000 = (-0.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} (\text{A})$$

$$v_{BC} = v_B - v_C = 5e^{-1000t/34} (\text{V})$$

$$i_{BC} = v_{BC}/4000 = (1.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} (\text{A})$$

所有的电压和电流都是指数函数并且具有相同的时间常数. 为简单起见, 对于电

压、电流、电阻和时间习惯上分别采用 V, mA, k $\Omega$  和 ms 做单位, 所以可以从方程中省略乘以 1000 和  $10^{-3}$  的系数, 如以下总结的那样.

$$\begin{aligned} v_A &= 10.5e^{-t/34}(\text{V}) & v_{AB} &= -6.5e^{-t/34}(\text{V}) & i_{AB} &= -3.25e^{-t/34}(\text{mA}) \\ v_B &= 17e^{-t/34}(\text{V}) & v_{AC} &= -1.5e^{-t/34}(\text{V}) & i_{AC} &= -0.25e^{-t/34}(\text{mA}) \\ v_C &= 12e^{-t/34}(\text{V}) & v_{BC} &= 5e^{-t/34}(\text{V}) & i_{BC} &= 1.25e^{-t/34}(\text{mA}) \\ i &= 4.5e^{-t/34}(\text{mA}) \end{aligned}$$

## 7.8 电感和电容的直流稳态

正如第 7.1 节所述,  $RL$  和  $RC$  电路对于阶跃输入的响应中的自然指数成分随时间而减小, 在  $t = \infty$  时, 电路达到了稳定状态并且响应只由强迫的直流成分组成.

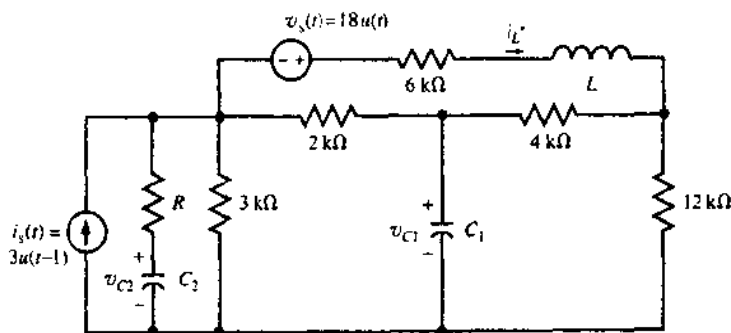
理论上, 对于  $RL$  或  $RC$  电路需要无限长的时间才能达到直流稳态. 然而, 在  $t = 5\tau$  时, 暂态成分减少到初始值的 0.67%. 在 10 倍的时间常数后, 暂态成分等于初始值的 0.0045%, 小于十万分之五, 此时对于所有实际目的都可以假设已达到了稳定状态.

在  $RLC$  电路的直流稳态中, 假设在电路中不存在持续的振荡, 电路中所有电压和电流都是常数. 当一个电容两端的电压是常数时, 通过它的电流为零. 因此, 在直流稳态电路中所有的电容器就像开路情况. 类似地, 当电感中通过的电流是常数时, 它两端的电压为零. 因此, 在直流稳态电路中所有的电感好像短路. 电路将简化为直流阻性电路, 由此可以很容易求出电容器两端的电压和通过电感的电流, 因为所有的电流和电压都是常数并且在分析中不包括微分方程.

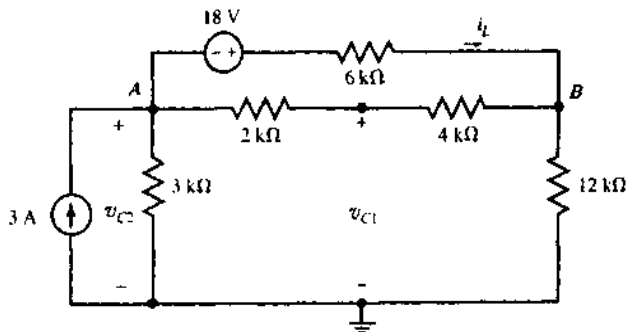
上面所述的直流稳态的性质适用于包含任意数量的电感, 电容和直流电源的电路.

**例 7.7** 求图 7-13(a) 电路中  $i_L$ ,  $v_{C1}$  和  $v_{C2}$  的稳态值.

当达到稳态时, 电路如图 7-13(b) 所示. 在图 7-13(b) 中节点  $A, B$  应用 KCL 可



(a)



(b)

图 7-13



以求得电感电流和电容电压。

$$\text{节点 A: } \frac{v_A}{3} + \frac{v_A - v_B}{6} + \frac{v_A + 18 - v_B}{6} = 3 \quad \text{或} \quad 2v_A - v_B = 0$$

$$\text{节点 B: } \frac{v_B}{12} + \frac{v_B - v_A}{6} + \frac{v_B - 18 - v_A}{6} = 0 \quad \text{或} \quad -4v_A + 5v_B = 36$$

求解  $v_A$  和  $v_B$ , 得到  $v_A = 6\text{V}$ ,  $v_B = 12\text{V}$ . 观察图 7-13(b) 有  $i_I = 2\text{mA}$ ,  $v_{C1} = 8\text{V}$ ,  $v_{C2} = 6\text{V}$ .

**例 7.8** 求图 7-14 电路中的  $i$  和  $v$ .

在  $t = 0$  时刻, 电容两端电压是零. 它的终值从直流分析求得是  $-2\text{V}$ . 正如在例 7.6 中推导出的, 图 7-14 的电路时间常数是  $0.034\text{s}$ . 因此,

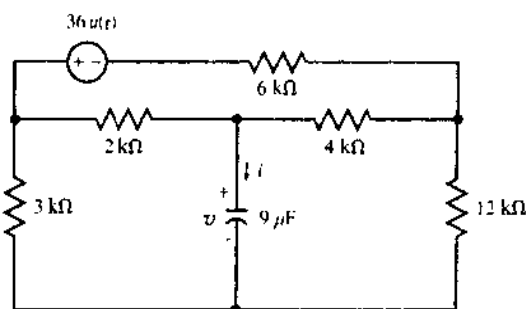


图 7-14

$$v = -2(1 - e^{-1000t/34})u(t) (\text{V})$$

$$\begin{aligned} i &= C \frac{dv}{dt} = -\frac{(9 \times 10^{-6})(2 \times 10^3)}{34} e^{-1000t/34} u(t) (\text{A}) \\ &= -0.53 e^{-1000t/34} u(t) (\text{mA}) \end{aligned}$$

## 7.9 开关切换时间的暂态过程

电源突然闭合或电源幅值的跳变都可能引起电路中电压或电流的突然跳变. 电容电压的跳变要求有一个冲激电流. 同样, 电感电流的跳变要求有一个冲激电压. 如果不存在这样的冲激, 电容电压和电感电流将保持连续. 因此,  $L$  和  $C$  的开关切换后的情况可以由它们的切换前情况推导出.

**例 7.9** 在图 7-15(a) 中, 开关  $S$  在  $t = 0$  时闭合, 求所有  $t$  时的  $i$  和  $v$ .

在  $t = 0^-$  时, 电路处于稳态并且电感中  $v(0^-) = 0$ , 其作用像短路 [见图 7-15(b)]. 电感中电流很容易求出为  $i(0^-) = 2\text{A}$ .  $S$  在  $t = 0$  时闭合后, 电路如图 7-15(c) 所示. 在  $t > 0$  时, 电流是一个时间常数为  $\tau = L/R = 1/30\text{s}$  的指数, 初值为  $i(0^+) = i(0^-) = 2\text{A}$ , 终值是  $12/3 = 4\text{A}$ . 电感电压和电流是

$$t < 0 \text{ 时, } i = 2\text{A} \quad v = 0$$

$$t > 0 \text{ 时, } i = 4 - 2e^{-30t} (\text{A}) \quad v = L \frac{di}{dt} = 6e^{-30t} (\text{V})$$

画于图 7-15(d) 和 (e) 中.

**例 7.10** 求图 7-16 电路中在  $t = 0^-$  和  $t = 0^+$  时的  $i$  和  $v$ , 其中  $R = 5\Omega$ ,  $L = 10\text{mH}$  和

$$v_s = \begin{cases} 5\text{V} & t < 0 \\ 5\sin\omega t (\text{V}) & t > 0 \end{cases}$$

在  $t = 0^-$  时,  $i(0^-) = 5/5 = 1\text{A}$  和  $v(0^-) = 0$ . 在从  $t = 0^-$  到  $t = 0^+$  瞬间, 由于不存在产生间断点的电压冲激, 电感电流是连续的. 因此,  $i(0^+) = i(0^-) = 1\text{A}$ . 为了

求  $v(0^+)$ , 写出在  $t=0^+$  时的 KVL 方程:  $v_s = RI + v$ , 并注意到  $v_s(0^+) = 0$ . 因此  $v(0^+) = v_s(0^+) - Ri(0^+) = -5\text{V}$ .

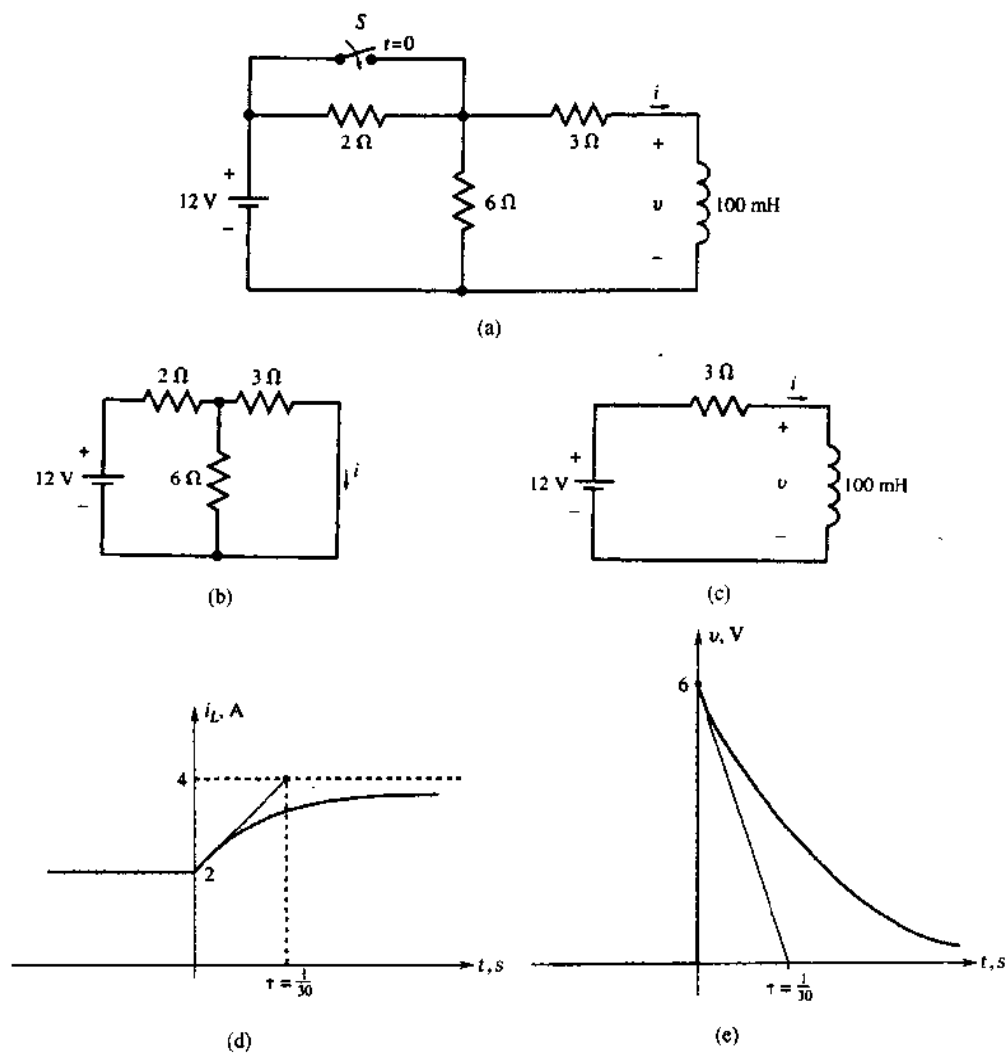


图 7-15

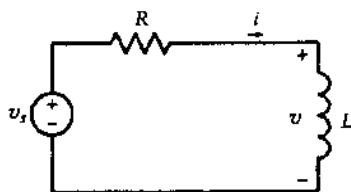


图 7-16

### 7.10 一阶电路的脉冲响应

在这一节中我们将推导一阶电路对矩形脉冲的响应. 这个推导用于输入为电流或电压的  $RC$  或  $RL$  电路. 举个例子, 如图 7-17(a) 的串联  $RC$  电路中, 电压源提供了一个持续时间为  $T$ , 高度为  $V_0$  的脉冲.  $t < 0$  时,  $v$  和  $i$  是零. 在脉冲持续期间, 我们使用 7.3 节的 (6b) 和 (6c) 式

$$v = V_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (0 < t < T) \quad (14a)$$

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (0 < t < T) \quad (14b)$$

当脉冲结束时, 电路是电容具有初始电压为  $V_T$  的无源电路.

$$V_T = V_0(1 - e^{-T/RC}) \quad (14c)$$

使用 7.2 节的(3)和(4)式, 并注意到时移  $T$ , 有

$$v = V_T e^{-(t-T)/RC} \quad (t > T) \quad (15a)$$

$$i = -(V_T/R) e^{-(t-T)/RC} \quad (t > T) \quad (15b)$$

电容电压和电流画于图 7-17(b)和(c)中.

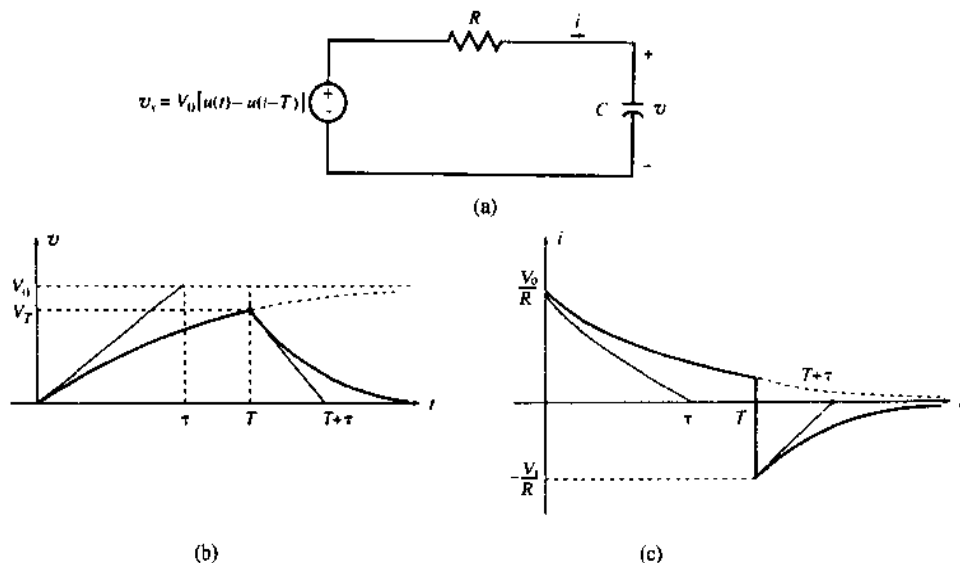


图 7-17

**例 7.11** 在图 7-17(a) 电路中, 设  $R = 1k\Omega$ ,  $C = 1\mu F$ , 电压源是一个高度为  $V_0$  持续时间为  $T$  的脉冲. 求当 (a)  $V_0 = 1V$ ,  $T = 1ms$ ; (b)  $V_0 = 10V$ ,  $T = 0.1ms$ ; (c)  $V_0 = 100V$ ,  $T = 0.01ms$  时的  $i$  和  $v$ .

我们使用(14)和(15)式, 时间常数  $\tau = RC = 1ms$ . 为了方便, 时间以  $ms$  为单位, 电压单位是  $V$ , 电流单位是  $mA$ . 当  $t \ll 1$  时我们使用近似值  $e^{-t} = 1 - t$ .

(a)  $V_0 = 1V$ ,  $T = 1ms$

当  $0 < t < 1ms$

$$v = (1 - e^{-t}), \quad i = e^{-t} \quad \text{并且} \quad V_T = (1 - e^{-1}) = 0.632V$$

当  $t > 1ms$

$$v = 0.632e^{-(t-1)} = 1.72e^{-t} \quad \text{并且} \quad i = -1.72e^{-t}$$

(b)  $V_0 = 10V$ ,  $T = 0.1ms$

当  $0 < t < 0.1ms$

$$v = 10(1 - e^{-t}), \quad i = 10e^{-t}, \quad V_T = 10(1 - e^{-0.1}) = 0.95V$$

当  $t > 0.1ms$

$$v = 0.95e^{-(t-0.1)} = 1.05e^{-t} \quad \text{并且} \quad i = -1.05e^{-t}$$

(c)  $V_0 = 100V$ ,  $T = 0.01ms$

当  $0 < t < 0.01ms$

$$v = 100(1 - e^{-t}) \approx 100t \quad i = 100e^{-t} \approx 100(1 - t)$$

$$V_T = 100(1 - e^{-0.01}) = 0.995V$$

当  $t > 0.01ms$

$$v = 0.995e^{-(t-0.01)} = 1.01e^{-t} \quad \text{并且 } i = -1.01e^{-t}$$

随着输入脉冲电压接近于一个冲激, 电容电压和电流接近于  $v = e^{-t}u(t)$  (V) 和  $i = \delta(t) - e^{-t}u(t)$ .

### 7.11 RC 和 RL 电路的冲激响应

一个窄的脉冲可以作为一个冲激函数的模型, 脉冲下的面积表示它的强度. 冲激响应在电路分析和综合中是一个有用的工具. 有几种方法推导出冲激响应: 取窄脉冲响应的极限, 称为极限接近法, 在例 7-11 和 7-12 中说明; 取阶跃响应的导数; 直接求解微分方程. 冲激响应经常用  $h(t)$  表示.

**例 7.12** 求图 7-17(a) 电路的单位面积的电压脉冲持续时间减小到零时  $i$  和  $v$  的极限.

我们使用(14)和(15)式的脉冲响应, 其中  $V_0 = 1/T$ , 求  $T$  接近零时它们的极限. 从(14c)式得到

$$\lim_{T \rightarrow 0} V_T = \lim_{T \rightarrow 0} (1 - e^{-T/RC})/T = 1/RC$$

根据(15)式我们得到

$$\text{当 } t < 0: \quad h_v = 0 \quad \text{及} \quad h_i = 0$$

$$\text{当 } 0^- < t < 0^+: \quad 0 \leq h_v \leq \frac{1}{RC} \quad \text{及} \quad h_i = \frac{1}{R}\delta(t)$$

$$\text{当 } t > 0: \quad h_v(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC} \quad \text{及} \quad h_i(t) = -\frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}$$

因此

$$h_v(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) \quad \text{及} \quad h_i(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

**例 7.13** 用求取单位阶跃响应导数的方法求图 7-17(a) 中 RC 电路的冲激响应.

单位冲激可以认为是单位阶跃的导数. 基于常系数线性微分方程的性质, 我们可以取阶跃响应的时间导数来求冲激响应. 一个 RC 电路的单位阶跃响应已在(6)式中求出:

$$v(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \quad \text{及} \quad i(t) = (1/R)e^{-t/RC}u(t)$$

我们通过求取阶跃响应的导数求单位冲激响应.

$$h_v(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) \quad \text{及} \quad h_i(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

**例 7.14** 用求取单位阶跃响应导数的方法求图 7-11(a) 所示 RL 电路的冲激响应  $h_i(t)$ ,  $h_v(t)$  和  $h_{i1}(t)$ .

电路对幅值为 9 的阶跃信号的响应已经在例 7.5 中求出来了. 求取它们的导数并用 1/9 对它们进行标定, 求出单位冲激响应是

$$h_i(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [0.75(1 - e^{-800t})u(t)] = \frac{200}{3}e^{-800t}u(t)$$

$$h_v(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [3e^{-800t}u(t)] = -\frac{800}{3}e^{-800t}u(t) + \frac{1}{3}\delta(t)$$

$$h_{i1}(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{4}(3 - e^{-800t})u(t) \right] = \frac{200}{9}e^{-800t}u(t) + \frac{1}{18}\delta(t)$$

### 7.12 RC 和 RL 电路中的阶跃响应和冲激响应的总结

RC 和 RL 电路对阶跃和冲激输入信号的响应在表 7-1(a), (h) 中进行了总结. 前面各节已经推导了表中的部分内容. 其余的部分将在习题解答中推导.

表 7-1(a) RC 电路的阶跃和冲激响应

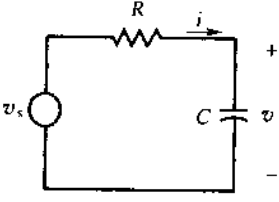
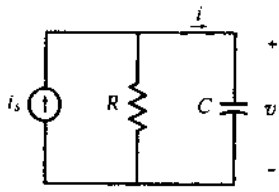
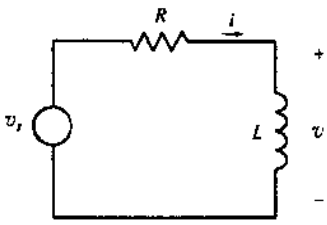
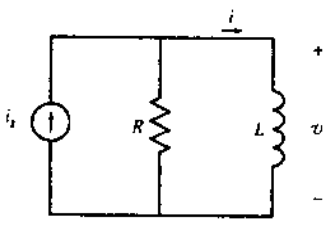
RC 电路	单位阶跃响应	单位冲激响应
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = (1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = (1/R)e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/RC)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/R^2C)e^{-t/RC}u(t) + (1/R)\delta(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = R(1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/C)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/RC)e^{-t/RC}u(t) + \delta(t) \end{cases}$

表 7-1(b) RL 电路的阶跃和冲激响应

RL 电路	单位阶跃响应	单位冲激响应
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = e^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1/R)(1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) + \delta(t) \\ h_i = (1/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = Re^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = -(R^2/L)e^{-Rt/L}u(t) + R\delta(t) \\ h_i = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$

### 7.13 RC 和 RL 电路对突然加上的指数函数激励的响应

考虑一个从如图 7-18 所示的, 具有指数电压源  $v_s = V_0 e^{st} u(t)$  的 RL 串联电路推导出的一个一阶微分方程. 电路在  $t < 0$  时初始为零. 应用 KVL 得到

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t) \quad (16)$$

$t > 0$  时解答是

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad \text{和} \quad i(0^+) = 0 \quad (17a)$$

自然响应  $i_h(t)$  是  $Ri + L(di/dt) = 0$  的解. 即, 具有零强迫函数的情况. 下面的讨论类似于 7.4 节, 求得

$$i_h(t) = Ae^{-Rt/L} \quad (17b)$$

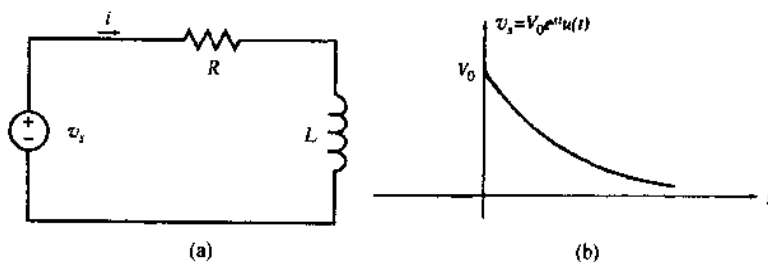


图 7-18

强迫响应  $i_p(t)$  是在  $t > 0$  满足(16)式的函数. 只能是这样的函数:

$$i_p(t) = I_0 e^{st} \quad (17c)$$

在(16)式中代入  $i = i_h + i_p$  后, 求出  $I_0$  为  $I_0 = V_0 / (R + Ls)$ . 选择  $A = -V_0 / (R + Ls)$ , 边界条件  $i(0^+) = 0$  也可以满足. 因此

$$i(t) = \frac{V_0}{R + Ls} (e^{st} - e^{-Rt/L}) u(t) \quad (17d)$$

**特殊情况:** 如果强迫函数和自然响应具有相同的指数 ( $s = -R/L$ ), 强制响应必须是  $i_p(t) = I_0 t e^{-Rt/L}$ . 这可以代入(16)式中得到验证, 也可以得出  $I_0 = V_0 / L$ . 自然响应和(17b)式相同. 总的响应是

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = (I_0 t + A) e^{-Rt/L}$$

从  $i(0^-) = i(0^+) = 0$  我们得到  $A = 0$ , 因此  $i(t) = I_0 t e^{-Rt/L} u(t)$ , 这里  $I_0 = V_0 / L$ .

#### 7.14 RC 和 RL 电路对突加正弦激励的响应

当一个串联 RL 电路突然接到交流电压  $v_s = V_0 \cos \omega t$  (图 7-19) 时, 人们感兴趣的方程是

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 (\cos \omega t) u(t) \quad (18)$$

其解是

$$i(t) = i_h + i_p, \quad \text{其中} \quad i_h(t) = Ae^{-Rt/L} \quad i_p(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta)$$

在(18)式中插入  $i_p$ , 可求出  $I_0$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \quad \text{和} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{L\omega}{R}$$

那么

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + I_0 \cos(\omega t - \theta) \quad t > 0$$

从  $i(0^+) = 0$ , 我们得到  $A = -I_0 \cos \theta$ , 因此

$$i(t) = I_0 [\cos(\omega t - \theta) - \cos \theta (e^{-Rt/L})]$$

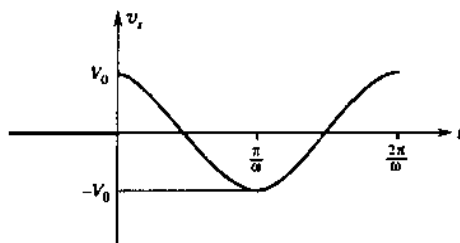


图 7-19

## 7.15 一阶电路中强迫响应的总结

考虑下面的微分方程

$$\frac{dv}{dt}(t) + av(t) = f(t) \quad (19)$$

强迫响应  $v_p(t)$  由强迫函数  $f(t)$  决定. 在前面章节已经给了几个例子. 表 7-2 总结了一些常用的强迫函数和对  $v_p(t)$  的推测. 这些响应可以通过代入微分方程求出. 用表 7-2 中这些函数加权的线性组合以及它们的时间延迟, 可以推导出对新的函数的强迫响应.

表 7-2

	$f(t)$	$v_p(t)$
	1	$\frac{1}{a}$
$n$	$t$	$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$
$n$	$e^{st}, (s \neq -a)$	$\frac{e^{st}}{s+a}$
	$e^{-at}$	$te^{-at}$
$n$	$\cos \omega t$	$A \cos(\omega t - \theta)$ 其中 $A = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$ 及 $\tan \theta = \frac{\omega}{a}$
$n$	$e^{-bt} \cos \omega t$	$Ae^{-bt} \cos(\omega t - \theta)$ 其中 $A = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + \omega^2}}$ 及 $\tan \theta = \frac{\omega}{a-b}$

## 习题与解答

7.1 在  $t = 0^-$  时刻, 图 7-20 中的开关刚刚闭合,  $v_C = 100 \text{ V}$ . 求出暂态电流和电荷.

解 极性如图所示, 当  $t > 0$  时,  $v_R = v_C$ ,  $1/RC = 62.5 \text{ s}^{-1}$ ,

$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 100 \text{ V}$ . 因此

$$v_R = v_C = 100e^{-62.5t} (\text{V}) \quad i = \frac{v_R}{R} = 0.25e^{-62.5t} (\text{A}) \quad q = C v_C = 4000e^{-62.5t} (\mu\text{C})$$

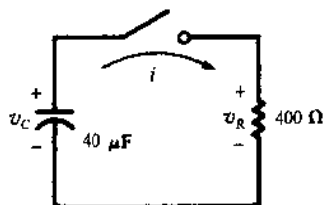


图 7-20

7.2 在题 7.1 中, 求电阻中的功率和能量, 并将后者与电容器中存储的初始能量进行比较.

解

$$p_R = v_R i = 25e^{-125t} (\text{W})$$

$$w_R = \int_0^t p_R dt = \int_0^t 25e^{-125t} dt = 0.20(1 - e^{-125t}) (\text{J})$$

初始的储能是:

$$W_0 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} (40 \times 10^{-6}) (100)^2 \text{ J} = 0.20 = w_R(\infty)$$

即, 电容器中储存的所有能量都在电阻中消耗了, 转变成了热.

7.3 一个与题 7.1 和 7.2 相同的 RC 暂态电路具有瞬时功率  $p_R = 360e^{-t/0.00001} (\text{W})$ , 如果  $R = 10 \Omega$ , 求初始电荷  $Q_0$ .

解

$$p_R = p_0 e^{-2t/RC} \quad \text{或} \quad \frac{2}{RC} = 10^5 \quad \text{或} \quad C = 2 \mu\text{F}$$

$$w_R = \int_0^t p_R dt = 3.6(1 - e^{-t/0.00001}) (\text{mJ})$$

则:  $w_R(\infty) = 3.6 \text{ mJ} = Q_0^2 / 2C$ , 由此得:  $Q_0 = 120 \mu\text{C}$ .

7.4 图 7-21 所示  $RL$  电路中, 开关在  $t = 0$  时刻从位置 1 移动到位置 2. 求  $v_R$  和  $v_L$ , 极性如图所示所示.

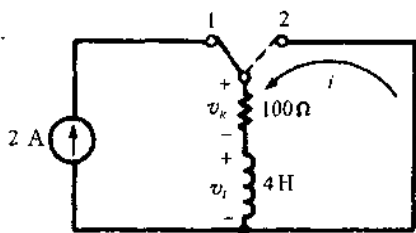


图 7-21

解 恒流源驱动一个电流流过电感, 电流方向与暂态电流  $i$  的方向相同. 则在  $t > 0$  时,

$$i = I_0 e^{-Rt/L} = 2e^{-25t} (\text{A})$$

$$v_R = Ri = 200e^{-25t} (\text{V})$$

$$v_L = -v_R = -200e^{-25t} (\text{V})$$

7.5 求题 7.4 中暂态响应的  $p_R$  和  $p_L$ .

解

$$p_R = v_R i = 400e^{-50t} (\text{W})$$

$$p_L = v_L i = -400e^{-50t} (\text{W})$$

电感的负功率符合能量离开元件的实际. 由于能量传输到电阻上, 因此  $p_R$  是正的.

7.6 一个串联  $RC$  电路中  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 20 \mu\text{F}$ , 在  $t = 0$  时刻加上  $100\text{V}$  的恒压源; 电容没有初始电荷. 求在  $t > 0$  时的  $i$ ,  $v_R$ ,  $v_C$  和  $q$ .

解 电容充电, 因此  $v_C$  在  $t = 0$  时刻是连续的.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

当  $t \rightarrow \infty$ ,  $v_C \rightarrow 100\text{V}$  (所加电压). 电路的时间常数是  $\tau = RC = 100^{-1}\text{s}$ . 因此, 从 6.10 节中:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = -100e^{-10t} + 100 (\text{V})$$

由此还有另外的函数. 如果元件电压都是正的, 电流是由正极流入,  $v_R + v_C = 100\text{V}$ , 所以:

$$v_R = 100e^{-10t} (\text{V})$$

$$i = \frac{v_R}{R} = 20e^{-10t} (\text{mA})$$

$$q = Cv_C = 2000(1 - e^{-10t}) (\mu\text{C})$$

7.7 图 7-22(a) 所示电路中开关在  $t = 0$  时刻闭合. 此时, 电容的电荷是  $Q_0 = 500 \mu\text{C}$ , 极性如图所示. 求在  $t > 0$  时刻的  $i$  和  $q$ , 并画出  $q$  的草图.

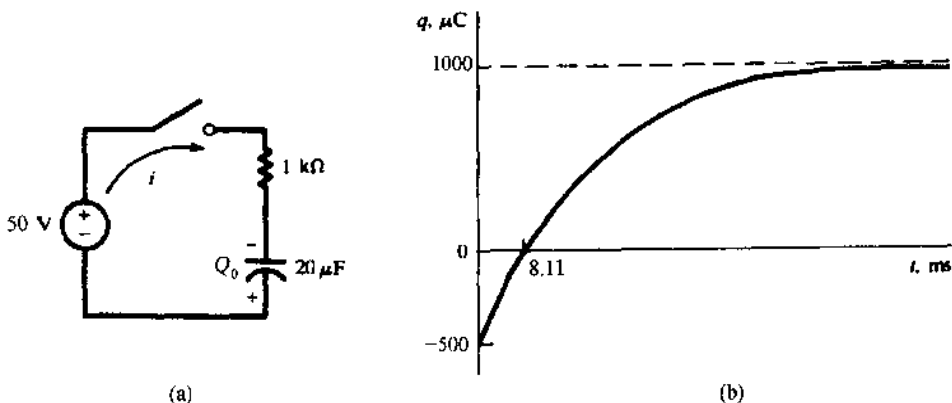


图 7-22

解 电容上的初始电荷使其具有相应的电压  $V_0 = Q_0/C = 25\text{V}$ , 由此  $v_C(0^+) = -25\text{V}$ , 这里的符号是负的是因为电容电压将是上极板为+, 与电流的正方向一致. 还有  $v_C(\infty) = +50\text{V}$ ,  $\tau = 0.02\text{s}$ . 因此, 如同在题 7.6 中那样有,

$$v_C = -75e^{-50t} + 50 (\text{V})$$

由此得

$$q = Cv_C = -1500e^{-50t} + 1000 (\mu\text{C}) \quad i = \frac{dq}{dt} = 75e^{-50t} (\text{mA})$$



如图 7-22(b) 所示, 充电电荷从一个极性的  $500\mu\text{C}$  变到了相反极性的  $1000\mu\text{C}$ .

7.8 求图 7-23 所示电路中, 在所有时间  $t$  的电流  $i$ .

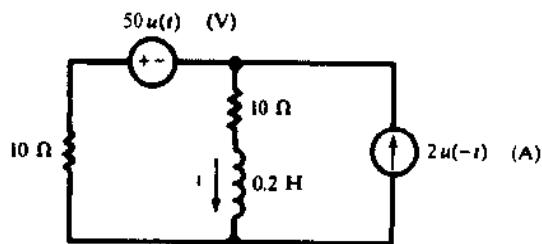


图 7-23

解 当  $t < 0$  时, 电压源短路, 电流源把 2A 的电流平均分给两个  $10\Omega$  的电阻:

$$i(t) = i(0^-) = i(0^+) = 1\text{ A}$$

当  $t > 0$ , 电流源断开,  $50\text{V}$  电压接入串联  $RL$  电路. ( $R = 20\Omega$ ). 随着  $t \rightarrow \infty$ ,  $i \rightarrow -50/20 = -2.5\text{ A}$ . 这样, 根据 6.10 和 7.3 节,

$$i(t) = [i(0^+) - i(\infty)]e^{-Rt/L} + i(\infty) = 3.5e^{-100t} - 2.5(\text{A})$$

根据单位阶跃函数的含义, 对于所有的  $t$ , 两个公式可以合成一个公式

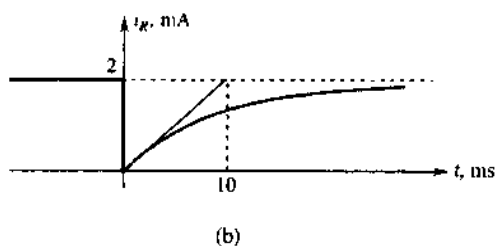
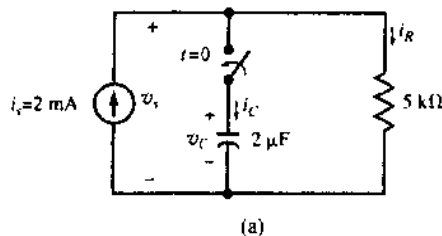
$$i(t) = 1u(-t) + (3.5e^{-100t} - 2.5)u(t)(\text{A})$$

7.9 在图 7-24 (a) 中, 开关在  $t = 0$  时刻闭合. 在  $t < 0$  时, 电容没有电荷. 如果所有时间都有  $i_s = 2\text{mA}$ , 求  $i_R$ ,  $i_C$ ,  $v_C$ .

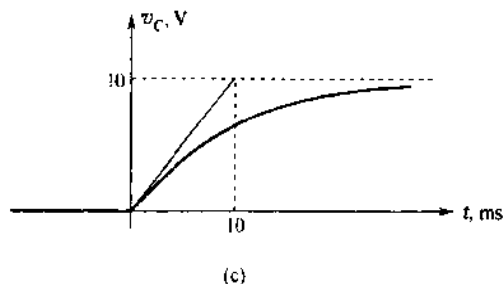
解 当  $t < 0$   $i_R = 2\text{mA}$ ,  $i_C = v_C = 0$ ,  $v_s = (2\text{mA})(5000\Omega) = 10\text{V}$

当  $t > 0$  时间常数是  $\tau = RC = 10\text{ms}$ , 并且

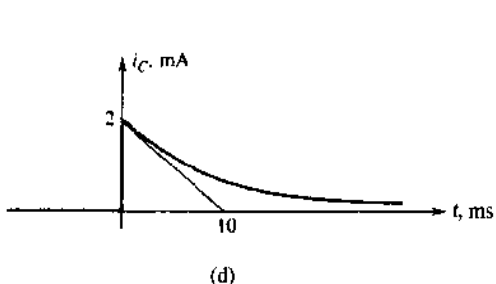
$$i_R(0^+) = 0, i_R(\infty) = 2\text{mA} \text{ 和 } i_R = 2(1 - e^{-100t})(\text{mA}) \text{ [见图 7-24(b)]}$$



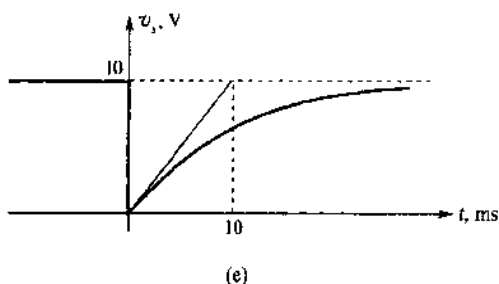
(b)



(c)



(d)



(e)

图 7-24

$$v_C(0^+) = 0, v_C(\infty) = (2\text{mA})(5\text{k}\Omega) = 10\text{V} \text{ 和 } v_C = 10(1 - e^{-100t})(\text{V}) \text{ [见图 7-24(c)]}$$

$$i_C(0^+) = 2\text{mA}, i_C(\infty) = 0 \text{ 和 } i_C = 2e^{-100t}(\text{mA}) \text{ [见图 7-24(d)]}$$

$$v_s(0^+) = 0, v_s(\infty) = (2\text{mA})(5\text{k}\Omega) = 10\text{V}, v_s = 10(1 - e^{-100t})(\text{V}) \text{ [见图 7-24(e)]}$$

7.10 在图 7-25 中, 开关在  $t=0$  时刻打开, 求  $i_R$ ,  $i_C$ ,  $v_C$  和  $v_s$ .

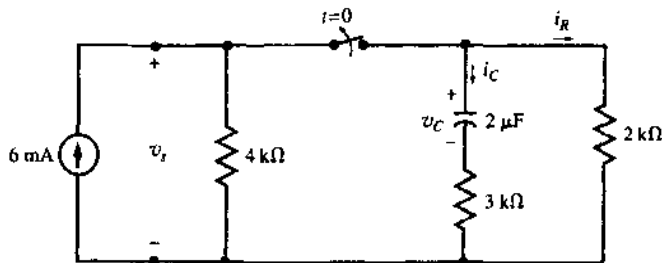


图 7-25

**解** 当  $t < 0$  时, 电路处于稳定状态, 有  $i_R = 6(4)/(4+2) = 4\text{mA}$ ,  $i_C = 0$ , 以及  $v_C = v_s = 4(2) = 8\text{V}$ . 当  $t = 0$  时刻开关切换时, 电容电压保持不变. 在  $t = 0^+$ , 开关断开后, 电容具有相同的电压  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 8\text{V}$ .

$t > 0$ , 电容通过  $5\text{k}\Omega$  电阻放电, 这个电阻是  $2\text{k}\Omega$  和  $3\text{k}\Omega$  电阻的串联组合. 电路的时间常数是  $\tau = (2+3)(10^3)(2 \times 10^{-6}) = 0.01\text{s}$ . 则电流和电压是

$$v_C = 8e^{-100t}(\text{V})$$

$$i_R = -i_C = v_C/5000 = (8/5000)e^{-100t} = 1.6e^{-100t}(\text{mA})$$

$$v_s = (6\text{mA})(4\text{k}\Omega) = 24\text{V}$$

对于  $t > 0$  时, 全部  $6\text{mA}$  电流都流过  $4\text{k}\Omega$  的电阻.

7.11 图 7-26 的电路中, 在  $t = 0$  时刻开关在位置 1 闭合, 然后在一个时间常数后移到位置 2,  $t = \tau = 250\mu\text{s}$ . 求  $t > 0$  的电流.

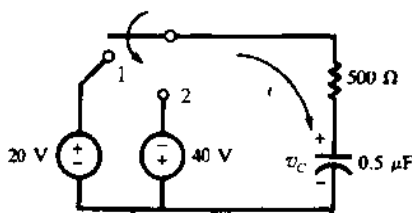


图 7-26

**解** 由于已知电容上的电荷在  $(t=0)$  和  $(t=\tau)$  是连续的, 所以能很容易求出电容器的电荷, 然后对它求导数得到电流.

对于  $0 \leq t \leq \tau$ ,  $q$  必定有

$$q = Ae^{-t/\tau} + B$$

根据  $q(0) = 0$  的假设和条件

$$i(0^+) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{0^+} = \frac{25\text{V}}{500\Omega} = 40\text{mA}$$

可以求出  $A = -B = -10\mu\text{C}$ , 或者

$$q = 10(1 - e^{-4000t})(\mu\text{C}) \quad (0 \leq t \leq \tau) \quad (20)$$

从(20)式得  $q(\tau) = 10(1 - e^{-1})\mu\text{C}$ ; 我们知道  $q(\infty) = (0.5\mu\text{F})(-40\text{V}) = -20\mu\text{C}$ .

因此在  $t \geq \tau$  时,  $q$  可以被确定为

$$q = [q(\tau) - q(\infty)]e^{-(t-\tau)/\tau} + q(\infty) = 71.55e^{-4000(t-\tau)} - 20(\mu\text{C}) \quad (21)$$

对(20)和(21)求导数

$$i = \frac{dq}{dt} = \begin{cases} 40e^{-4000t}(\text{mA}) & (0 < t < \tau) \\ -286.2e^{-4000t}(\text{mA}) & (t > \tau) \end{cases}$$

见图 7-27.

7.12 在  $t = 0$  时, 一个  $RL$  串联电路加上一个恒定电压  $V$ . 问在什么时候  $v_R = v_L$ ?

**解**  $RL$  电路中的电流是连续函数, 该电流在这种情况下从零开始, 并到达终值  $V/R$ . 因此在  $t > 0$  时,

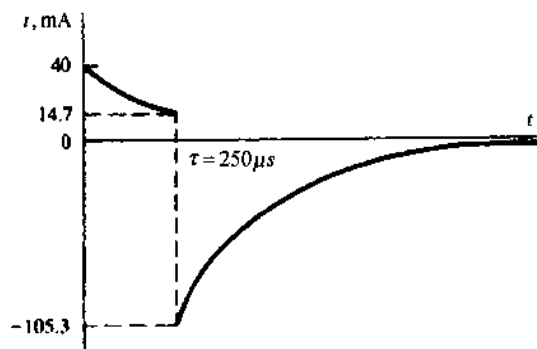


图 7-27

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{及} \quad v_R = Ri = V(1 - e^{-t/\tau})$$

其中  $\tau = L/R$  是电路的时间常数. 由于  $v_R + v_L = V$ , 两个电压在以下条件时相等.

$$v_R = \frac{1}{2}V$$

$$V(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{1}{2}V$$

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t}{\tau} = \ln 2$$

即当  $t = 0.693\tau$  时. 注意这个时间不依赖于电压  $V$ .

- 7.13** 在  $t=0$  时刻, 一个恒定电压加到一个  $RL$  串联电路. 电感两端的电压 3.46 ms 时是 20V, 在 25 ms 时是 5 V. 如果  $L = 2$  H 求  $R$ .

**解** 使用 7-6 节中的两点法:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln v_1 - \ln v_2} = \frac{25 - 3.46}{\ln 20 - \ln 5} = 15.54 \text{ ms}$$

这样:

$$R = \frac{L}{\tau} = \frac{2}{15.54 \times 10^{-3}} = 128.7 \Omega$$

- 7.14** 在图 7-28 中, 开关  $S_1$  在  $t=0$  时刻闭合. 开关  $S_2$  在  $t = 4$  ms 时刻打开. 求在  $t > 0$  时的  $i$ .

**解** 由于电路中总存在电感, 电流在整个过程是连续函数. 在  $0 \leq t \leq 4$  ms 期间,  $100 \Omega$  电阻被短路, 时间常数  $\tau = (0.1 \text{ H}) / (50 \Omega) = 2$  ms,  $i$  从零开始并建立起电流趋于

$$\frac{100 \text{ V}}{50 \Omega} = 2 \text{ A}$$

即使它永远达不到那个值. 因此在题 7.12 中

$$i = 2(1 - e^{-t/2}) \text{ (A)} \quad (0 \leq t \leq 4) \quad (22)$$

这里,  $t$  的单位取 ms. 特别有

$$i(4) = 2(1 - e^{-2}) = 1.729 \text{ A}$$

在  $t > 4$  ms 时,  $i$  的值从 1.729 A 开始向  $100/150 = 0.667 \text{ A}$  衰减, 时间常数为  $0.1/150 =$

$\frac{2}{3}$  ms. 因此,  $t$  取 ms 为单位有

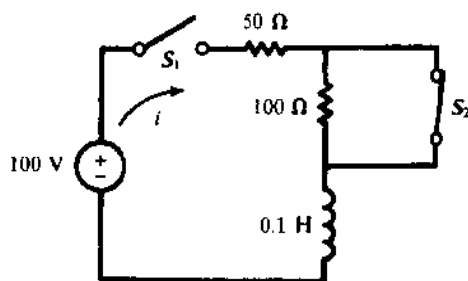


图 7-28

$$i = (1.729 - 0.667)e^{-(t-4)/(2/3)} + 0.667 = 428.4e^{-3t/2} + 0.667(\text{A}) (t \geq 4) \quad (23)$$

7.15 在图 7-29 所示电路中, 开关在  $t = 0$  时刻闭合, 这时  $6\mu\text{F}$  的电容器有电荷  $Q_0 = 300\mu\text{C}$ , 求暂态电压  $v_R$  的表达式.

解 两个并联电容器有  $3\mu\text{F}$  的等效电容, 然后这个电容与  $6\mu\text{F}$  的电容串联, 因此, 总等效电容为  $2\mu\text{F}$ . 这样  $\tau = RC_{\text{eq}} = 40\mu\text{s}$ .

在  $t = 0^+$ , KVL 给出  $v_R = 300/6 = 50\text{V}$ ; 随着  $t \rightarrow \infty$ ,  $v_R \rightarrow 0$  (因为  $i \rightarrow 0$ ). 因此

$$v_R = 50e^{-t/\tau} = 50e^{-t/40}(\text{V})$$

其中  $t$  以  $\mu\text{s}$  为单位.

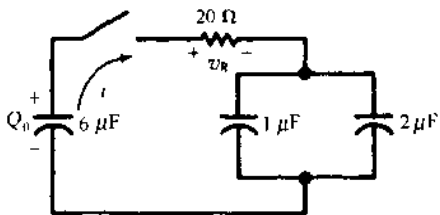


图 7-29

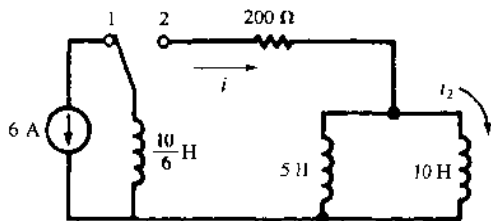


图 7-30

7.16 在图 7-30 所示电路中, 开关在  $t = 0$  时刻移到位置 2. 求在  $t = 34.7\text{ms}$  时的电流  $i_2$ .

解 开关切换以后, 三个电感的总等效值为

$$L_{\text{eq}} = \frac{10}{6} + \frac{5(10)}{15} = 5\text{H}$$

则  $\tau = 5/200 = 25\text{ms}$ ,  $t$  的单位是  $\text{ms}$ ,

$$i = 6e^{-t/25}(\text{A}) \quad i_2 = \left(\frac{5}{15}\right)i = 2e^{-t/25}(\text{A})$$

这样

$$i_2(34.7) = 2e^{-34.7/25}\text{A} = 0.50\text{A}$$

7.17 如图 7-31 所示, 开关在  $t = 0$  时刻闭合. 求在  $t > 0$  时的电流  $i$  和电容电压  $v_C$ .

解 就电路的自然响应而言, 两个电阻并联, 因此,

$$\tau = R_{\text{eq}}C = (5\Omega)(2\mu\text{F}) = 10\mu\text{s}$$

由连续性, 有  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$ . 随着  $t \rightarrow \infty$ , 电容器变成了开路, 只剩下串联的  $20\Omega$  电阻和  $50\text{V}$  电压源. 那就是

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5\text{A} \quad v_C(\infty) = (2.5\text{A})(10\Omega) = 25\text{V}$$

知道了  $v_C$  的终值条件, 我们可以写出

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) \\ = 25(1 - e^{-t/10})(\text{V})$$

其中,  $t$  的单位是  $\mu\text{s}$ .

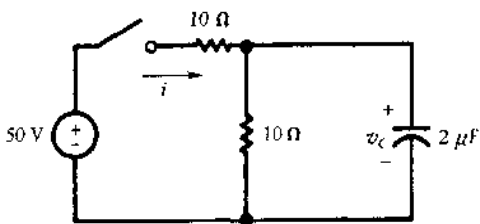


图 7-31

电容器中的电流是

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-t/10}(\text{A})$$

与之并联的  $10\Omega$  电阻的电流是

$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10\Omega} = 2.5(1 - e^{-t/10})(\text{A})$$

因此

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-t/10})(\text{A})$$

此题也可以通过确定网孔电流和求解联立微分方程的方法解答.

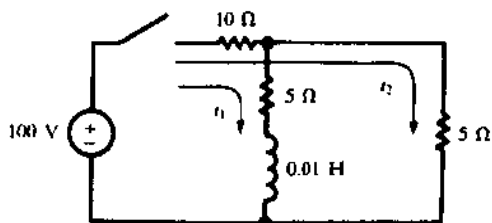


图 7-32

7.18 图 7-32 所示两个网孔的电路中, 开关在  $t=0$  时刻闭合. 求在  $t>0$  时的电流  $i_1$  和  $i_2$ .

解

$$10(i_1 + i_2) + 5i_1 + 0.01 \frac{di_1}{dt} = 100 \quad (24)$$

$$10(i_1 + i_2) + 5i_2 = 100 \quad (25)$$

从(25)式, 有  $i_2 = (100 - 10i_1)/15$ . 代入(24)式有

$$\frac{di_1}{dt} + 833i_1 = 3333 \quad (26)$$

(26)式的稳态解(特定解)是  $i_1(\infty) = 3333/833 = 4.0$  A, 因此,

$$i_1 = Ae^{-833t} + 4.0(\text{A})$$

初始条件  $i_1(0^-) = i_1(0^+) = 0$  给出  $A = -4.0$  A, 所以

$$i_1 = 4.0(1 - e^{-833t})(\text{A}) \quad \text{和} \quad i_2 = 4.0 + 2.67e^{-833t}(\text{A})$$

另一种方法

从电感的两端看电路的其余部分, 有等效电阻

$$R_{eq} = 5 + \frac{5(10)}{15} = 8.33\Omega$$

则  $1/\tau = R_{eq}/L = 833\text{s}^{-1}$ . 在  $t = \infty$  电路的电阻是

$$R_I = 10 + \frac{5(5)}{10} = 12.5\Omega$$

因此, 电路的总电流是  $i_T = 100/12.5 = 8$  A. 在  $t = \infty$  时, 电流平均的分给了两个  $5\Omega$  的电阻, 产生的电感的最终电流是 4A. 因此,

$$i_L = i_1 + 4(1 - e^{-833t})(\text{A})$$

7.19 一个串联  $RL$  电路,  $R = 50\Omega$ ,  $L = 0.2\text{H}$ , 在  $t=0$  时刻施加了一个正弦电压

$$v = 150\sin(500t + 0.785) (\text{V})$$

求  $t>0$  时的电流.

解 在  $t>0$  时的电路方程是

$$\frac{di}{dt} + 250i = 750\sin(500t + 0.785) \quad (27)$$

其解有两部分, 余函数( $i_C$ )和特定解( $i_p$ ). 因此  $i = i_C + i_p$ . 余函数是(27)式的右边用零替代时的一般解:  $i_C = ke^{-250t}$ . 用待定系数法求  $i_p$ . 假设

$$i_p = A\cos 500t + B\sin 500t$$

由于(27)的右边也可以表达为这两个函数的线性组合. 有

$$\frac{di_p}{dt} = -500A\sin 500t + 500B\cos 500t$$

将  $i_p$  和  $di_p/dt$  的表达式代入(27)式中并扩充右边,

$$\begin{aligned} & -500A\sin 500t + 500B\cos 500t + 250A\cos 500t + 250B\sin 500t \\ & = 530.3\cos 500t + 530.3\sin 500t \end{aligned}$$

使同项的系数相等

$$-500A + 250B = 530.3 \quad \text{和} \quad 500B + 250A = 530.3$$

解联立方程得到  $A = -0.4243\text{A}$ ,  $B = 1.273\text{A}$

$$i_p = -0.4243\cos 500t + 1.273\sin 500t = 1.342\sin(500t - 0.322)(\text{A})$$

以及

$$i = i_C + i_p = ke^{-250t} + 1.342\sin(500t - 0.322)(\text{A})$$

在  $t=0$  时刻,  $i=0$ . 应用这个条件,  $k=0.425\text{A}$ , 最终

$$i = 0.425e^{-250t} + 1.342\sin(500t - 0.322)(\text{A})$$

7.20 电路如图 7-33 所示, 求所有时间的电流  $i_L$ .

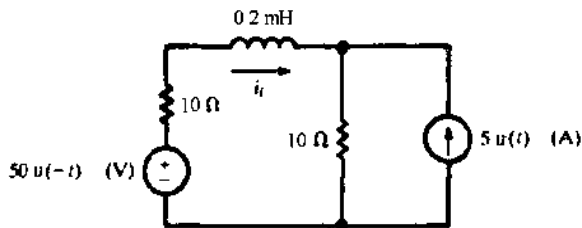


图 7-33

解 当  $t < 0$  时,  $50\text{V}$  的电压源使电感中电流是  $50/20 = 2.5\text{A}$ . 对于  $t > 0$ , 施加上  $5\text{A}$  的电流源. 随着  $t \rightarrow \infty$ , 电流平均分给了两个  $10\Omega$  电阻. 因此电流  $i_L(\infty) = -2.5\text{A}$ . 电路的时间常数是

$$\tau = \frac{0.2 \times 10^{-3} \text{H}}{20\Omega} = \frac{1}{100} \text{ms}$$

当  $t$  以 ms 为单位时,  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.5\text{A}$

$$i_L = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} + i_L(\infty) = 5.0e^{-100t} - 2.5(\text{A})$$

最后, 使用单位阶跃函数将  $t < 0$  和  $t > 0$  时的表达式合并,

$$i_L = 2.5u(-t) + (5.0e^{-100t} - 2.5)u(t)(\text{A})$$

7.21 在图 7-34 电路中, 开关在位置 1 已经很长时间了; 在  $t=0$  时, 开关移到位置 2. 求在  $t > 0$  时电流  $i$  的表达式.

解 当开关在位置 1 时,  $i(0^-) = 50/40 = 1.25\text{A}$ . 电路中有电感, 因而  $i(0^-) = i(0^+)$ . 开关移到位置 2 很长时间后,  $i(\infty) = 10/40 = 0.25\text{A}$ . 用符号表示,

$$B = i(\infty) = 0.25\text{A} \quad A = i(0^+) - B = 1.00\text{A}$$

时间常数是  $\tau = L/R = (1/2000)\text{s}$ . 因此, 对于  $t > 0$  有,

$$i = 1.00e^{-2000t} + 0.25(\text{A})$$

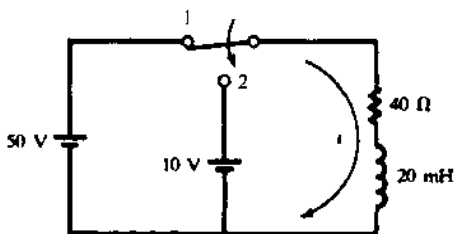


图 7-34

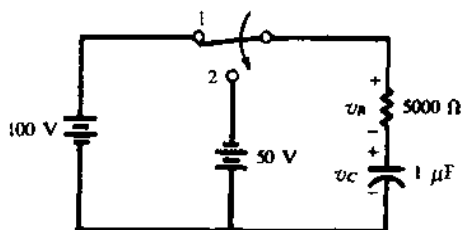


图 7-35

7.22 图 7-35 所示电路中开关在  $t=0$  时刻从位置 1 移到位置 2. 求  $t > 0$  时的  $v_C$  和  $v_R$ .

解 开关在位置 1 时,  $100\text{V}$  电压源使  $v_C(0^-) = 100\text{V}$ ; 由于电荷的连续性, 有  $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ . 开关在位置 2 时, 由于有极性相反的  $50\text{V}$  电压源,  $v_C(\infty) = -50\text{V}$ . 则

$$B = v_C(\infty) = -50\text{V} \quad A = v_C(0^+) - B = 150\text{V}$$

$$\tau = RC = \frac{1}{200} \text{ s}$$

并且,

$$v_C = 150e^{-200t} - 50 \text{ (V)}$$

最终, 由 KVL 得到  $v_R + v_C + 50 = 0$ , 或者

$$v_R = -150e^{-200t} \quad (\text{V})$$

### 7.23 求题 7.22 电路的能量函数.

解

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 = 1.25(3e^{-200t} - 1)^2 \text{ (mJ)}$$

$$w_R = \int_0^t \frac{v_R^2}{R} dt = 11.25(1 - e^{-400t}) \text{ (mJ)}$$

### 7.24 一个串联 RC 电路, $R = 5 \text{ k}\Omega$ , $C = 20 \mu\text{F}$ , 两个电压源串联,

$$v_1 = 25u(-t) \text{ (V)} \quad v_2 = 25u(t - t') \text{ (V)}$$

如果  $t'$  是正的, 求电容器两端电压的完整表达式, 并画出草图.

解 电容器的电压是连续的. 对于  $t \leq 0$ ,  $v_1$  引起的电容电压是 25V.

对于  $0 \leq t \leq t'$ , 两个电压源都是零. 因此,  $v_C$  从 25V 以指数方式衰减到 0:

$$v_C = 25e^{-t/RC} = 25e^{-10t} \text{ (V)} \quad (0 \leq t \leq t')$$

特别指出,  $v_C(t') = 25e^{-10t'} \text{ (V)}$

对于  $t \geq t'$ ,  $v_C$  建立的电压从  $v_C(t')$  趋于由  $v_2$  建立的终值电压 25V

$$\begin{aligned} v_C &= [v_C(t') - v_C(\infty)]e^{-(t-t')/RC} + v_C(\infty) \\ &= 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}] \text{ (V)} \quad (t \geq t') \end{aligned}$$

因此, 对所有  $t$

$$\begin{aligned} v_C &= 25u(-t) + 25e^{-10t}[u(t) - u(t - t')] \\ &\quad + 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}]u(t - t') \text{ (V)} \end{aligned}$$

见图 7-36.

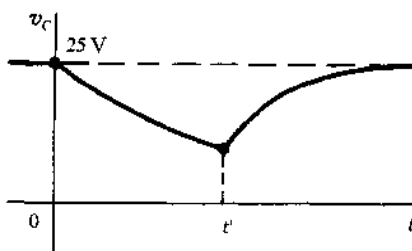


图 7-36

## 补充习题

7.25 图 7-37 所示电路中电容器有初始电荷  $Q_0 = 800 \mu\text{C}$ , 极性如图所示. 如果开关在  $t = 0$  时闭合, 求  $t > 0$  时的电流和电荷.

答案:  $i = -10e^{-25000t} \text{ (A)}$ ,  $q = 4 \times 10^{-4}(1 + e^{-25000t}) \text{ (C)}$

7.26 一个  $2 \mu\text{F}$  的电容器初始电荷是  $Q_0 = 100 \mu\text{C}$ , 在  $t = 0$  时, 两端连接在一个  $100 \Omega$  的电阻上. 计算电阻两端的暂态电压从 40V 下降到 10V 的时间.

答案: 0.277ms

7.27 图 7-38 所示 RC 电路中, 开关在  $t = 0$  时刻闭合在位置 1, 然后经过一个时间常数后移到位置 2. 求暂态电流, (a)  $0 < t < \tau$ , (b)  $t > \tau$ .

答案: (a)  $0.5e^{-200t}$  (A); (b)  $-0.516e^{-200(t-\tau)}$  (A)

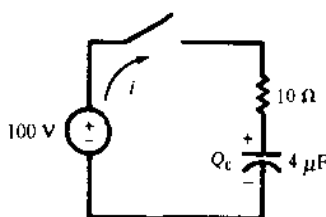


图 7-37

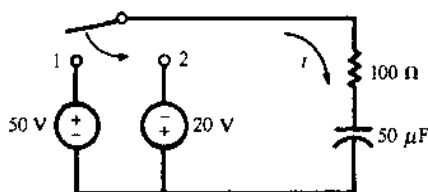


图 7-38

- 7.28 一个  $10\mu\text{F}$  的电容器有初始电荷  $Q_0$ , 在  $t=0$  时刻两端接上一个电阻. 电容器给电阻的瞬时功率是  $800e^{-4000t}$  (W), 求  $R$ ,  $Q_0$  和电容器的初始储能.

答案:  $50\Omega$ ,  $2000\mu\text{C}$ ,  $0.20\text{J}$

- 7.29 一个  $RL$  串联电路中,  $R=10\Omega$ ,  $L=1\text{H}$ , 在  $t=0$  时刻施加了一个  $100\text{V}$  的电压源. 求在  $t>0$  时的电流.

答案:  $10(1-e^{-10t})$  (A)

- 7.30 在图 7-39 所示电路中, 开关在  $t=0$  时刻处于位置 1,  $t=1\text{ms}$  时移到位置 2. 求电阻器两端的电压是零时的时间, 极性是相反的.

答案:  $1.261\text{ms}$

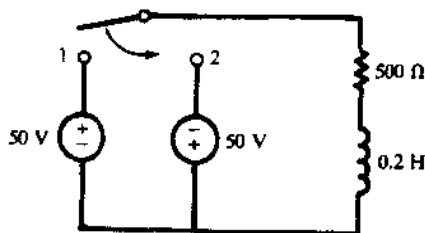


图 7-39

- 7.31 一个串联的  $RL$  电路中,  $R=100\Omega$ ,  $L=0.2\text{H}$ , 在  $t=0$  时刻有  $100\text{V}$  的电压源; 在  $t=t'$  时刻有第二个同样极性的  $50\text{V}$  电压源, 代替了第一个电压源. 求  $t>t'$  时, 使电流是  $0.5\text{A}$  的恒定电流的时间  $t'$ .

答案:  $1.39\text{ms}$

- 7.32 在题 7.31 的电路中, 在  $t=0.50\text{ms}$  时切换上一个极性相反的  $50\text{V}$  电压源, 代替第一个电压源. 求 (a)  $0<t<0.50\text{ms}$ ; (b)  $t>0.50\text{ms}$  时的电流.

答案: (a)  $1-e^{-500t}$ ; (b)  $0.721e^{-500(t-0.0005)}-0.50$  (A)

- 7.33 一个暂态电压  $35e^{-500t}$  (V), 在  $t_1=6.73\times 10^{-4}\text{s}$  时为  $25\text{V}$ . 证明在  $t=t_1+\tau$  时, 函数的值是  $t_1$  时的  $36.8\%$ .

- 7.34 一个从零增长到正的稳态值的暂态过程在  $t_1=5.0\text{ms}$  时幅值是  $49.5$ , 在  $t_2=20.0\text{ms}$  时增长到  $120$ . 求时间常数  $\tau$ .

答案:  $12.4\text{ms}$

- 7.35 图 7-40 所示电路中,  $t=0$  时开关在位置 1, 在  $t=3\tau$  时, 移向位置 2. 求 (a)  $0<t<3\tau$ , (b)  $t>3\tau$  的暂态电流.

答案: (a)  $2.5e^{-50000t}$  (A), (b)  $-1.58e^{-66700(t-0.00006)}$  (A)

- 7.36 一个  $RL$  电路中,  $R=300\Omega$ ,  $L=1\text{H}$ , 电压  $v=100\cos(100t+45^\circ)$  (V) 在  $t=0$  时刻由闭合一个开关接入. [对于  $v$  的相位角使用了一种方便的符号, 严格地, 应该写成  $100t+(\pi/4)$  (rad).] 求  $t>0$  时产生的电流.

答案:  $-0.282e^{-300t}+0.316\cos(100t+26.6^\circ)$  (A)

- 7.37 图 7-41 所示  $RC$  电路中, 电容上有一个初始电荷  $Q_0=25\mu\text{C}$ , 极性如图所示. 在  $t=0$  时刻开关闭合, 施加电压  $v=100\sin(1000t+30^\circ)$  (V). 求  $t>0$  时的电流.

答案:  $153.5e^{-4000t}+48.4\sin(1000t+106^\circ)$  (mA)



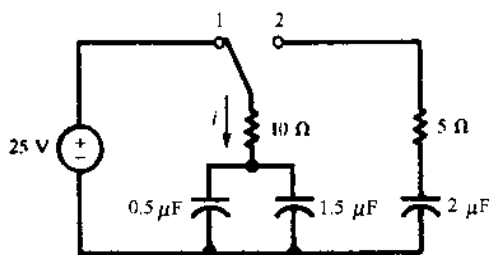


图 7-40

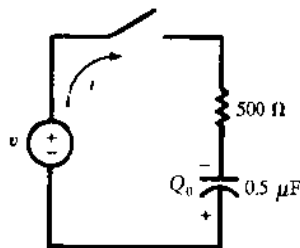


图 7-41

7.38 在题 7.37 中, 电容上带有什么样的初始电荷会产生直接进入稳态的电流而没有暂态过程?

答案:  $13.37 \mu\text{C}$  (上极板为 +)

7.39 写出图 7-42 所示电路的联立微分方程式, 并求解  $i_1$  和  $i_2$ . 开关打开很长时间后在  $t=0$  时刻闭合. (这个问题也可以应用已知的初始和终止条件求一般解的方法解答, 像在题 7-17 中那样.)

答案:  $i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5(\text{A})$ ,  $i_2 = -0.555e^{-6.67t} + 5(\text{A})$

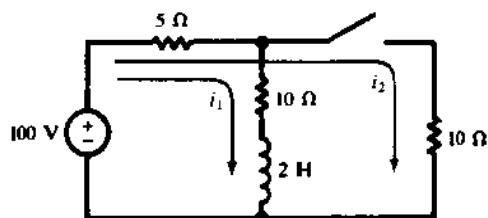


图 7-42

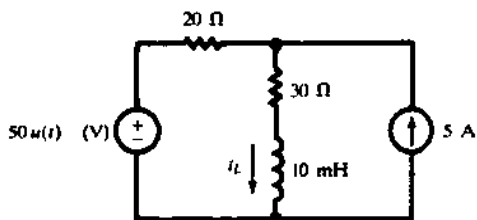


图 7-43

7.40 对图 7-43 所示 RL 电路, 求在以下时间的电流  $i_L$ : (a)  $-1\text{ms}$ , (b)  $0^+$ , (c)  $0.3\text{ms}$ , (d)  $\infty$ .

答案: (a)  $2.00 \text{ A}$ ; (b)  $2.00 \text{ A}$ ; (c)  $2.78 \text{ A}$ ; (d)  $3.00 \text{ A}$

7.41 一个 RC 串联电路,  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 40 \mu\text{F}$ , 有两个相互串联的电压源,  $v_1 = 50 \text{ V}$ ,  $v_2 = -100u(t) \text{ (V)}$ . 求 (a) 在  $t = \tau$  时刻的电容电压; (b) 电容电压为零且反极性的时间.

答案: (a)  $-13.2 \text{ V}$ ; (b)  $55.5 \text{ ms}$

## 第8章 高阶电路和复数频率

### 8.1 引言

在第7章中,讨论了具有初始电流或电容上具有初始电荷的  $RL$  和  $RC$  电路并且求解一阶微分方程以获得暂态电压与电流.当存在两个或更多储能元件时,网络方程将引入二阶微分方程.在这一章中,有一些二阶电路的例子.这些例子将介绍更直接的分析方法,包括复数频率和极-零点图.

### 8.2 串联 $RLC$ 电路

被研究的二阶微分方程有一个解答,可以取三个不同的形式,每种形式都与电路元件有关.为了观察这三种可能,图8-1给出了一个二阶机械系统.质量块  $M$  被一个具有常数  $k$  的弹簧悬挂住.一个阻尼装置  $D$  和质量块  $M$  相接触.如果质量块被从自由平衡位置移动然后在  $t=0$  释放,引起的运动将是过阻尼运动,临界阻尼运动或欠阻尼运动(振荡).图8-2显示了质量块从移动位置  $z_1$  释放后(在  $t=0$ )的运动轨迹图.

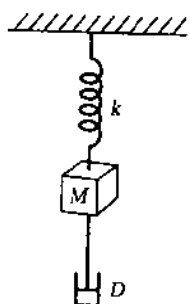


图 8-1

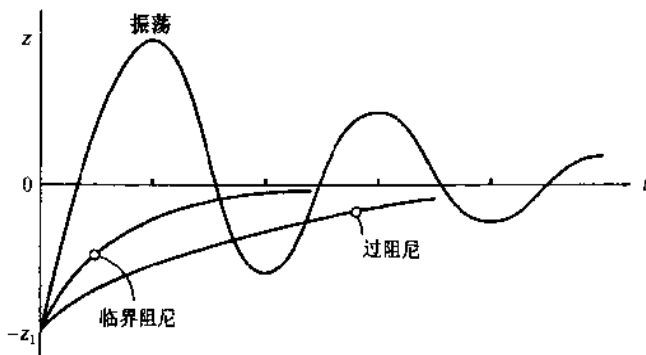


图 8-2

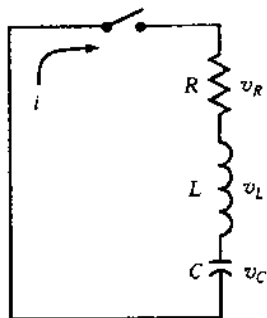


图 8-3

在图8-3中显示了一个不包含电压源的串联  $RLC$  电路.对于开关闭合后闭环电路的基尔霍夫电压定律是

$$v_R + v_L + v_C = 0$$

或

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

求导数并被  $L$  除得到

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

这个二阶微分方程的解的形式为  $i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ .将这个解代入微分方程得出

$$A_1 e^{s_1 t} \left( s_1^2 + \frac{R}{L} s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2 e^{s_2 t} \left( s_2^2 + \frac{R}{L} s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

也就是,如果  $s_1$  和  $s_2$  是  $s^2 + (R/L)s + (1/LC) = 0$  的根

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha + \beta \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha - \beta$$

这里,  $\alpha \equiv R/2L$ ,  $\beta \equiv \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$  和  $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ .

过阻尼情况 ( $\alpha > \omega_0$ )

在这种情况下  $\alpha, \beta$  都是正的实数.

$$i = A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

**例 8.1** 一个串联 RLC 电路,  $R=200\Omega$ ,  $L=0.10\text{H}$ ,  $C=13.33\mu\text{F}$ , 电容有一个初始电荷  $Q_0=2.67\times 10^{-3}\text{C}$ . 开关在  $t=0$  时闭合, 使电容放电. 求暂态电流 (见图 8-4).

对于这个电路

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 10^3 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 7.5 \times 10^5 \text{ s}^{-2} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 500 \text{ s}^{-1}$$

则

$$i = e^{-1000t} (A_1 e^{500t} + A_2 e^{-500t})$$

常数  $A_1, A_2$  的值由初始状态求出. 电感要求  $i(0^+) = i(0^-)$ . 电容中的电荷和电压在  $t=(0^+)$  时也必须和  $t=(0^-)$  相同, 并且  $v_C(0^-) = Q_0/C = 200\text{V}$ . 应用这两个条件,

$$0 = A_1 + A_2 \quad \text{和} \quad \pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2$$

由此有  $A_1 = \pm 2, A_2 = \mp 2$ , 取  $A_1$  为正值,

$$i = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t} \text{ (A)}$$

如果  $A_1$  取负值, 函数会简单地倒转但具有相同的形状.  $A_1, A_2$  的符号由电容的初始电压的极性确定并与对电流所设的正方向有关.

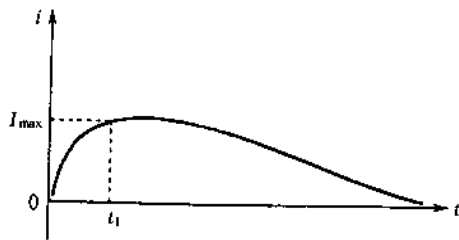


图 8-4

临界阻尼的情况 ( $\alpha = \omega_0$ )

由于  $\alpha = \omega_0$ , 微分方程有一种不同的形式并且上面所设两个指数项将不再提供一个解答. 方程式变成

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

其解取这样的形式:  $i = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t)$ .

**例 8.2** 重复例 8.1 题,  $C=10\mu\text{F}$ , 求  $\alpha = \omega_0$  时的结果.

如同在 8.1 题中, 初始条件常常用来确定常数. 由于  $i(0^-) = i(0^+)$ ,  $0 = [A_1 + A_2(0)]$  和  $A_1 = 0$ . 那么

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} (A_2 t e^{-\alpha t}) = A_2 (-\alpha t e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

由此得  $A_2 = (di/dt)|_{t=0} = \pm 2000$ .  $i = \pm 2000 t e^{-10^3 t} \text{ (A)}$  (见图 8-5).

极性是一个选择电流方向的问题, 与电容上初始电压的极性有关.

在图 8-4 和图 8-5 中分别画出的过阻尼和临界阻尼的响应情况, 它们十分相似. 鼓励读者检查这个结果, 选择几个  $t$  值, 并且比较电流. 例如, 求在两种情况下每一种的电流达到  $1.0\text{mA}$  和  $1.0\mu\text{A}$  的时间. 另外, 在每种情况下求电流为最大值的时间  $t_1$ .

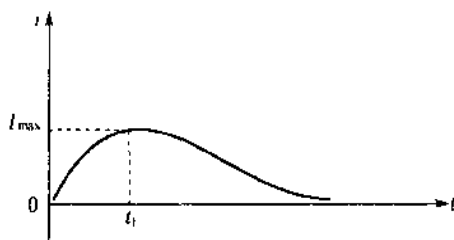


图 8-5

### 欠阻尼或振荡情况 ( $\alpha < \omega_0$ )

当  $\alpha < \omega_0$  时, 上面所述的微分方程的解  $s_1$  和  $s_2$  是共轭复数  $s_1 = \alpha + j\beta$  和  $s_2 = \alpha - j\beta$ , 这里  $\beta$  由  $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  给出. 解可以写成指数形式

$$i = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$$

或者, 很容易推出正弦形式,

$$i = e^{-\alpha t} (A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t)$$

**例 8.3** 重复例题 8.1,  $C = 1 \mu\text{F}$ .

和前面一样

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1000 \text{ s}^{-1}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^7 \text{ s}^{-2}, \beta = \sqrt{10^7 - 10^6} = 3000 \text{ rad/s}$$

因此

$$i = e^{-1000t} (A_3 \cos 3000t + A_4 \sin 3000t)$$

和以前一样, 从初始条件  $i(0^+) = 0$  和  $V_C(0^+) = 200\text{V}$  求得常数  $A_3$  和  $A_4$ . 由此得  $A_3 = 0$  和  $A_4 = \pm 0.667$ . 因此

$$i = \pm 0.667 e^{-1000t} (\sin 3000t) (\text{A})$$

观看图 8-6, 函数  $\pm 0.667 e^{-1000t}$ , 图中显示的虚线提供了一个包络线, 正弦函数被限制在其中. 这个振荡电流有一个  $\beta$  (rad/s) 的角频率, 但是被指数项  $e^{-\alpha t}$  衰减.

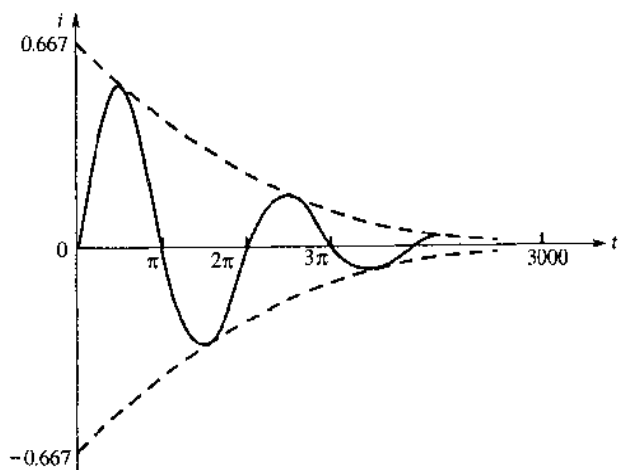


图 8-6

### 8.3 并联 RLC 电路

图 8-7 所示的并联 RLC 电路的响应与串联 RLC 电路的响应相似, 所以期望一个二阶微分方程. 由节点电压法给出:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

求导数并被  $C$  除得到

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

解的形式为

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (2)$$

这里

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

这里  $\alpha = 1/2RC$  及  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . 注意, 这个暂态的阻尼因子  $\alpha$  与串联  $RLC$  电路的  $\alpha$  是不同的.

根据假设电容器有初始电荷  $Q_0$  和开关在  $t=0$  闭合, 暂态响应非常容易观察到. 无论如何, 施加到电路中的一个阶跃函数电压将引起相同的暂态响应.

### 过阻尼情况 ( $\alpha^2 > \omega_0^2$ )

在这种情况下, 应用解答(2)式.

**例 8.4** 一个并联的  $RLC$  电路,  $R = 1000\Omega$ ,  $C = 0.167\mu\text{F}$ ,  $L = 1.0\text{ H}$ , 电容器的初始电压  $V_0 = 50.0\text{ V}$ , 求开关在  $t=0$  闭合时的电压  $v(t)$ .

我们有

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2994 \quad \alpha^2 = 8.96 \times 10^6 \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 5.99 \times 10^6$$

由于  $\alpha^2 > \omega_0^2$ , 电路是过阻尼的, 由(2)式有

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1271 \quad \text{和} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -4717$$

在  $t=0$  时

$$V_0 = A_1 + A_2 \quad \text{和} \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

由节点方程(1), 在  $t=0$  且电感  $L$  中没有初始电流

$$\frac{V_0}{R} + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{或} \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

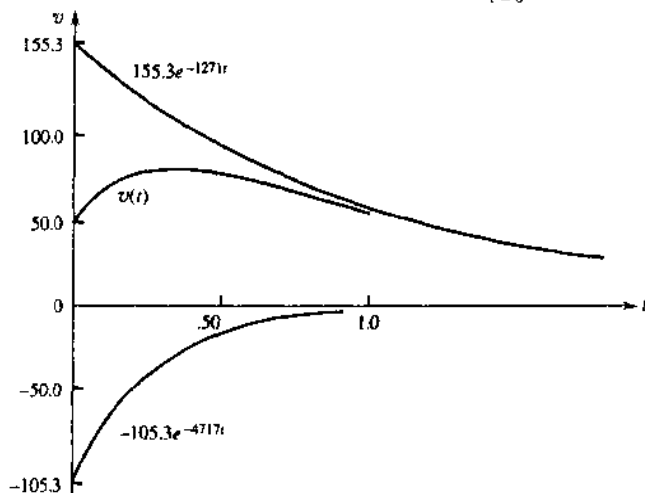


图 8-8

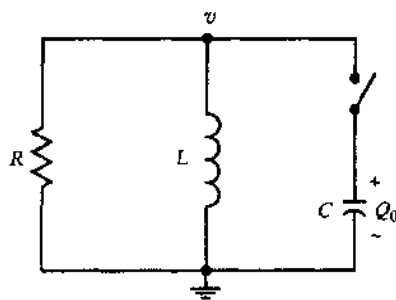


图 8-7

求解  $A_1$

$$A_1 = \frac{V_0(s_2 + 1/RC)}{s_2 - s_1} = 155.3 \quad \text{并且} \quad A_2 = V_0 - A_1 = 50.0 - 155.3 = -105.3$$

代入(2)式

$$v = 155.3e^{-1271t} - 105.3e^{-4717t} \text{ (V)}$$

如图 8-8 所示.

### 欠阻尼 (振荡) 情况 ( $\omega_0^2 > \alpha^2$ )

并联 RLC 电路中振荡情况导致一个和串联 RLC 电路欠阻尼时相同的方程式. 因此,

$$v = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (3)$$

这里  $\alpha = 1/2RC$  和  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ .  $\omega_d$  是角频率, 如同正弦电路分析的情况那样. 这里它是阻尼振荡的频率. 它作为阻尼角频率的参考.

**例 8.5** 一个并联 RLC 电路,  $R = 200 \, \Omega$ ,  $L = 0.28 \text{ H}$ ,  $C = 3.57 \, \mu\text{F}$ , 电容器的初始电压  $V_0 = 50.0 \text{ V}$ . 求开关在  $t = 0$  时刻闭合时的电压函数.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(200)(3.57 \times 10^{-6})} = 700 \quad \alpha^2 = 4.9 \times 10^5$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{(0.28)(3.57 \times 10^{-6})} = 10^6$$

由于  $\omega_0^2 > \alpha^2$ , 这些电路参数导致振荡响应.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - (4.9 \times 10^5)} = 714$$

在  $t = 0$ ,  $V_0 = 50.0$ ; 因此在(3)式中  $A_1 = V_0 = 50.0$ . 由节点方程有

$$\frac{V_0}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

在  $t = 0$  时,

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

对  $v$  的表达式求导数并令  $t = 0$  得到

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \omega_d A_2 - \alpha A_1 \quad \text{或} \quad \omega_d A_2 - \alpha A_1 = -\frac{V_0}{RC}$$

由于  $A_1 = 50.0$ ,

$$A_2 = \frac{-(V_0/RC) + V_0 \alpha}{\omega_d} = -49.0$$

并且

$$v = e^{-700t} (50.0 \cos 714t - 49.0 \sin 714t) \text{ (V)}$$

在 RLC 并联电路中没有讨论临界阻尼, 因为它在电路设计中没有或者极少有真正的价值. 实际上, 由于它是一种恒定响应的电路, 有阻尼时, 有很大的振荡, 因此非常少用.

## 8.4 二网孔电路

对于有两个储能元件的二网孔电路响应的分析, 导致下面所示的联立微分方程.

对于图 8-9 电路, 选择网孔电流  $i_1$  和  $i_2$ , 如图所示. KVL 产生两个一阶微分方程.

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V \quad (4)$$

$$R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = V \quad (5)$$

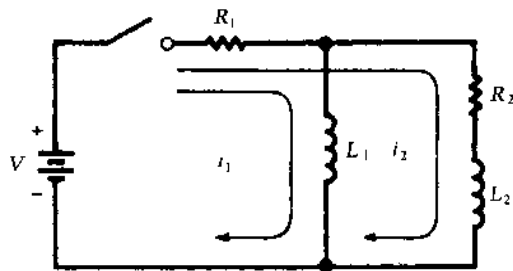


图 8-9

必须联立求解. 为了完成求解, 取(4)式的导数,

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (6)$$

在(4), (5)和(6)式中消去  $i_2$  和  $di_2/dt$ , 得到了关于  $i_1$  的二阶方程式, 这是在 8.2 节和 8.3 节中讨论过的类型, 除了右面的常数项

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i_1 = \frac{R_2 V}{L_1 L_2} \quad (7)$$

很明显, 在(7)式中的稳态解是  $i_1(\infty) = V/R_1$ ; 暂态解由下式的根  $s_1$  和  $s_2$  确定

$$s^2 + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} s + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0$$

有初始条件

$$i_1(0^+) = 0 \quad \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0^+} = \frac{V}{L_1}$$

( $i_1$  和  $i_2$  必须在  $t=0$  时都是连续的). 一旦知道了  $i_1$  的表达式,  $i_2$  也可以通过(4)式求出.

存在使暂态过程最终消失的阻尼因子. 依赖于四个电路常数值, 暂态过程可以是过阻尼或者是欠阻尼的, 后者是振荡的. 一般的电流表达式是

$$i_1 = (\text{暂态值}) + \frac{V}{R_1}$$

在  $t=0$  时暂态值部分是  $-V/R_1$ , 在  $t \rightarrow \infty$  时暂态值是零.

### 8.5 复数频率

我们已经讨论了电路的驱动函数是一个常数, 即  $V=50.0$  V, 或是一个正弦函数, 即  $V=100.0 \sin(500t+30^\circ)$  (V), 或者是一个指数函数  $V=10e^{-5t}$  (V). 在这一节里我们引入一个复数频率  $s$ , 它统一三个函数并简化了分析, 无论是暂态还是稳态响应都需要.

我们从将指数函数的表达式等效为余弦和正弦形式开始,

$$e^{j(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)$$

我们将仅仅关注余弦项  $\cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \{ e^{j(\omega t + \phi)} \}$ , 为了方便加上前缀 Re. 引入一个常数  $A$  和因子  $e^{\sigma t}$ ,

$$A e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)} = A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \quad A e^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t} = A e^{j\phi} e^{\sigma t}$$

这里

$$s = \sigma + j\omega$$

复数频率  $s = \sigma + j\omega$  的单位  $s^{-1}$ ,  $\omega$  的单位 rad/s.  $\sigma$  的单位必须是  $s^{-1}$ . 这就是具有单位 Np/s 的奈培频率. 如果  $\sigma$  和  $\omega$  都非零, 函数是衰减余弦. 只考虑  $\sigma$  是负值的情况. 如果  $\sigma$  和  $\omega$  是零, 结果是一个常数. 最后,  $\omega=0$  并且  $\sigma$  不为零时, 结果是一个指数衰减函数. 在表 8-1 中, 对于表达式  $A e^{\sigma t}$ , 给出了几个相应于  $s$  值的函数.

表 8-1

$f(t)$	$s$	$A$
$10e^{-5t}$	$5 + j0$	10
$5\cos(500t + 30^\circ)$	$0 + j500$	5
$2e^{-3t}\cos(100t - 45^\circ)$	$-3 + j100$	2
100.0	$0 + j0$	100.0

在图 8-10 中, 讨论几个  $s$  变量值的时候, 显然有三种情况. 如果  $\sigma = 0$ , 则没有阻尼, 结果是, 有最大值  $\pm V_m$  (没有显示) 的余弦函数; 如果  $\omega = 0$ , 函数是具有初始值  $V_m$  的指数衰减函数; 最后, 当  $\omega$  和  $\sigma$  是非零时, 结果是有阻尼的余弦.

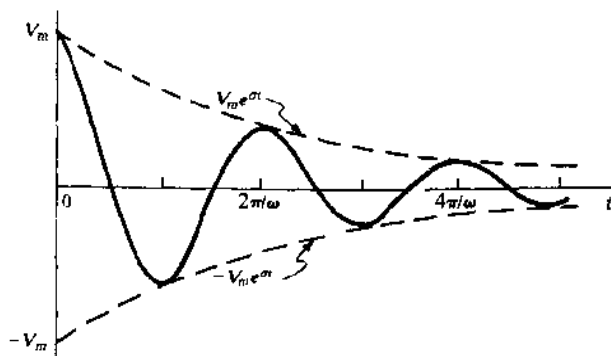


图 8-10

### 8.6 在 $s$ 域中的一般化的阻抗 ( $R, L, C$ )

一个形式为  $v = V_m e^{st}$  的驱动电压 (电压源), 施加到一个无源网络回路, 将产生支路电流和元件两端的电压, 它们都有相同的时间函数  $e^{st}$ ; 即,  $I_a e^{j\psi} e^{st}$  和  $V_b e^{j\phi} e^{st}$ . 因此, 仅需要确定电流和电压的幅值和相位角 (这也是第 9 章分析正弦电路的情况). 这样, 我们首先考虑  $s$  域的网络 (见图 8-11).

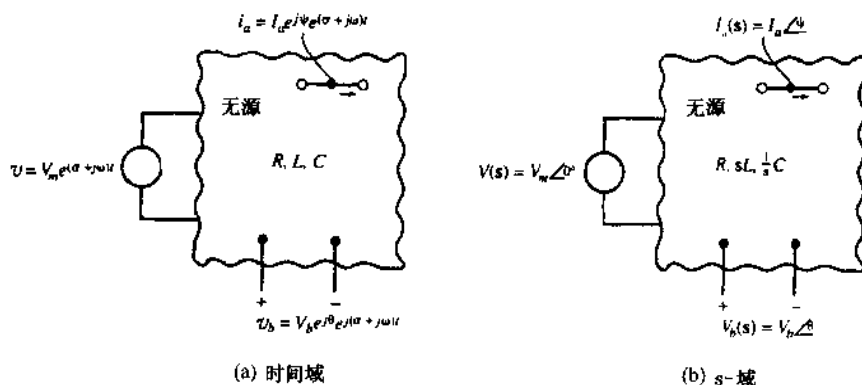


图 8-11

一个串联  $RL$  电路所加电压是  $v = V_m e^{j\psi} e^{st}$ , 引起的电流是  $i = I_m e^{j\psi} e^{st} = I_m e^{st}$ , 代入节点方程得出

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m e^{j\psi} e^{st}$$



$$RI_me^{st} + sLI_me^{st} = V_me^{j\phi}e^{st} \quad \text{由此得} \quad I_m = \frac{V_me^{j\phi}}{R + sL}$$

注意:在  $s$  域内,串联  $RL$  电路的阻抗是  $R + sL$ . 因此电感在  $s$  域内阻抗是  $sL$ .

**例 8.6** 一个串联  $RL$  电路,  $R = 4\Omega$ ,  $L = 2\text{ H}$ , 施加电压  $v = 10e^{-2t}\cos(10t + 30^\circ)$ . 根据  $s$  域的分析求电流  $i$ .

$$v = 10\angle 30^\circ e^{st} = Ri + L \frac{di}{dt} = 4i + 2 \frac{di}{dt}$$

因为  $i = Ie^{st}$ , 所以

$$10\angle 30^\circ e^{st} = 10Ie^{st} + 2sIe^{st} \quad \text{或} \quad I = \frac{10\angle 30^\circ}{10 + 2s}$$

将  $s = -2 + j10$  代入

$$I = \frac{10\angle 30^\circ}{10 + 2(-2 + j10)} = \frac{10\angle 30^\circ}{6 + j10} = 0.86\angle -29.0^\circ$$

那么,  $i = Ie^{st} = 0.86e^{-2t}\cos(10t - 29.0^\circ) \text{ (A)}$ .

**例 8.7** 一个串联  $RC$  电路,  $R = 10\Omega$ ,  $C = 0.2\text{ F}$ , 所加电压与例 8.6 相同. 根据  $s$  域分析求电流.

和例 8.6 一样,

$$v = 10\angle 30^\circ e^{st} = Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 10i + 5 \int i dt$$

由于  $i = Ie^{st}$ , 有

$$10\angle 30^\circ e^{st} = 10Ie^{st} + \frac{5}{s}Ie^{st} \quad \text{由此得} \quad I = \frac{10\angle 30^\circ}{10 + 5/s} = 1.01\angle 32.8^\circ$$

则

$$i = 1.01e^{-2t}\cos(10t + 32.8^\circ) \text{ (A)}$$

注意,  $s$  域中电容器的阻抗是  $1/sC$ . 那么串联  $RLC$  电路的  $s$  域的阻抗将是  $Z(s) = R + sL + 1/sC$ .

## 8.7 网络函数和零极点图

一个形为  $v = Ve^{st}$  的驱动电压源加到一个无源网络上, 将引起通过网络的电流和电压. 它们有相同的时间函数  $e^{st}$ , 即  $Ie^{j\phi}e^{st}$ . 因此只有电流的幅值  $I$  和相位角  $\phi$  需要确定. 我们先考虑  $s$  域, 电压和电流用极坐标形式表示, 即  $V\angle\theta$ ,  $I\angle\phi$  等. 图 8-12 显示了时间域和  $s$  域的对应关系. 在时间域,  $s = \sigma + j\omega$ , 在  $s$  域中仅仅显示了幅值和相位角. 在  $s$  域中, 电感用  $sL$  表示, 电容用  $1/sC$  表示.  $s$  域中阻抗为  $Z(s) = V(s) / I(s)$ .

网络函数  $H(s)$  定义为指数输出  $Y(s)$  的复数幅值与指数输入  $X(s)$  的复数幅值之比. 例如, 若  $X(s)$  是驱动电压,  $Y(s)$  是两个端点的输出电压, 则  $Y(s) / X(s)$  是无量纲的.

网络函数  $H(s)$  可以由输入-输出微分方程推导出来.

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \end{aligned}$$

当  $x(t) = Xe^{st}$  和  $y(t) = Ye^{st}$  时,

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) e^{st} = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) e^{st}$$

那么

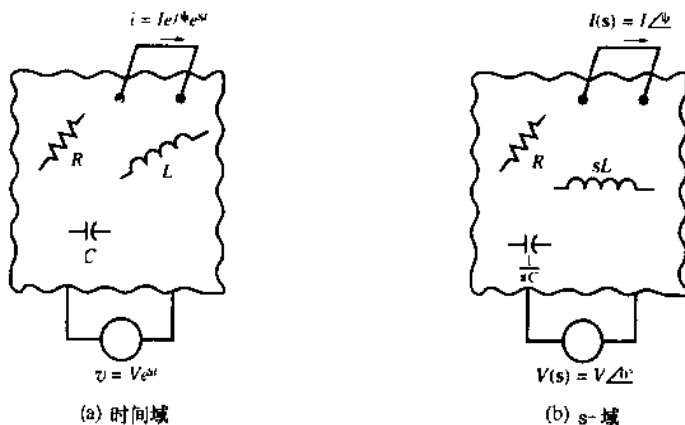


图 8-12

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (\text{注})$$

线性电路由大量元件组成,网络函数  $H(s)$  是  $s$  的有理函数并能够写成下列一般形式:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_\mu)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_v)}$$

这里  $k$  是实数,复数常数  $z_m$  ( $m = 1, 2, \cdots, \mu$ ) 是  $H(s)$  的零点,  $p_n$  ( $n = 1, 2, \cdots, v$ ) 是  $H(s)$  的极点,当  $H(s)$  被解释为对于激励 ( $s$  域网络的一部分) 的响应 (网络的另一部分) 的比率时有特殊的重要性. 这样,当  $s = z_m$  时,不管激励多大,响应将是零. 而当  $s = p_n$  时,不管激励多小,响应将是无穷大.

**例 8.8** 一个  $s$  域的无源网络示于图 8-13. 求电路由于输入电压  $V(s)$  产生电流  $I(s)$  的网络函数.

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$$

由于

$$Z(s) = 2.5 + \frac{\left(\frac{5s}{3}\right) \left(\frac{20}{s}\right)}{\frac{5s}{3} + \frac{20}{s}} = (2.5) \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 + 12}$$

我们有

$$H(s) = (0.4) \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$

当  $s = \pm j\sqrt{12}$  时,在例 8.8 中  $H(s)$  的分子是零. 因此,在这个频率下的电压函数引起的电流为零. 在 12 章中我们将讨论串联和并联谐振,我们将发现,并联的  $LC$  电路在

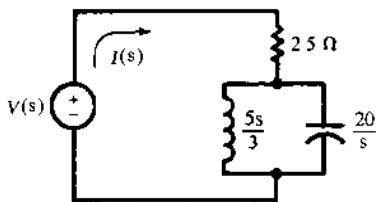


图 8-13

$$\omega = 1/\sqrt{LC} \text{ 时谐振. } L = \frac{5}{3} \text{ H, } C = \frac{1}{20} \text{ F,}$$

则  $\omega = \sqrt{12} \text{ rad/s.}$

网络函数  $H(s)$  的零点和极点可以在复数  $s$  平面画出. 图 8-14 显示了例 8.8 的极点和零点. 零点标记  $\odot$ , 极点是  $\times$ . 零点出现一对共轭复数,  $s = \pm j\sqrt{12}$ , 极点是  $s = -2$

译者注: 原文中该式为  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$

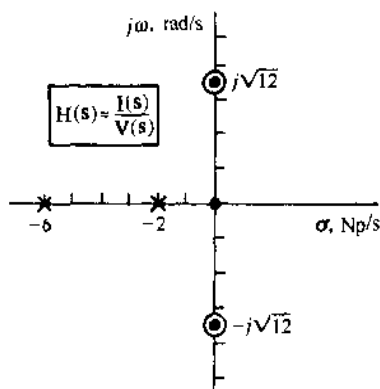


图 8-14

和  $s = -6$ .

### 8.8 强迫响应

网络函数能以极点形式表示并用图解得到响应. 在开始进一步讨论前, 重提  $\mathbf{H}(s)$  例如  $V_0(s)/V_i(s)$ ,  $I_2(s)/V_1(s)$  或  $I_2(s)/I_1(s)$  这样的比率是有帮助的. 用多项式因式形式,

$$\mathbf{H}(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_\mu)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_v)}$$

现在设  $(s - z_m) = N_m \angle \alpha_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \mu$ ) 和  $(s - p_n) = D_n \angle \beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots, v$ ), 有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= k \frac{(N_1 \angle \alpha_1)(N_2 \angle \alpha_2) \cdots (N_\mu \angle \alpha_\mu)}{(D_1 \angle \beta_1)(D_2 \angle \beta_2) \cdots (D_v \angle \beta_v)} \\ &= k \frac{N_1 N_2 \cdots N_\mu}{D_1 D_2 \cdots D_v} \angle [(\alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \cdots + \beta_v)] \end{aligned}$$

可以得出, 网络对于一个有  $s = \sigma + j\omega$  的激励的响应, 可以通过在零-极点图中测量零点和极点到  $s$  的向量长度以及这些向量与正  $\sigma$  轴的角度确定.

**例 8.9** 测试例 8.8 中网络对指数电压激励  $v = 1e^s$  的响应, 这里  $s = 1 \text{ Np/s}$ .

在零-极点图中找到局部测试点  $1 + j0$ . 画出从极点和零点到测试点的向量并计算长度和角度 (见图 8-15). 因此,

$N_1 = N_2 = \sqrt{13}$ ,  $D_1 = 3$ ,  $D_2 = 7$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  和  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \tan^{-1} \sqrt{12} = 73.9^\circ$  因此,

$$\mathbf{H}(1) = (0.4) \frac{(\sqrt{13})(\sqrt{13})}{(3)(7)} \angle (0^\circ - 0^\circ) = 0.248$$

这结果意味着, 在时间域内,  $i(t) = 0.248 u(t)$ , 根据函数  $e^{1t}$ , 使得电压和电流都变的无穷大. 对大多数实际情况,  $\sigma$  必须是负数或零.

上面的几何方法并不需要知道作为有理函数的  $\mathbf{H}(s)$  的解析表达式. 然而, 很清楚, 从极-零点图中已知的  $\mathbf{H}(s)$  的极点和零点可以写出它的带有常数  $k$  的表达式. 见题 8.37.

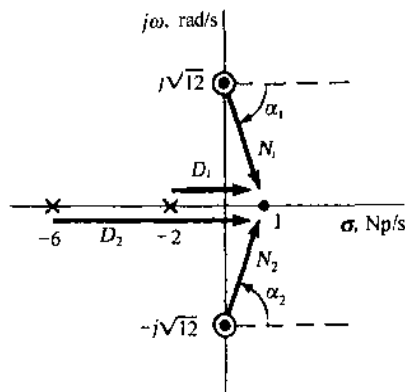


图 8-15

### 8.9 自然响应

这章重点是强迫响应或稳态响应, 并且可以通过很有用的复数频率方法得到响应. 无论如何, 很容易求

得有暂态响应特性的自然频率, 它们是网络函数的极点。

**例 8.10** 和例 8.8 相同的网络示于图 8-16 中, 求当一个电压源  $V(s)$  加在  $xx'$  中间时的自然响应。

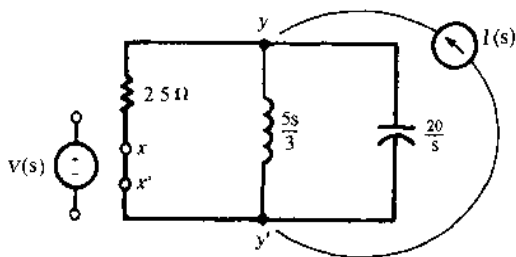


图 8-16

网络函数与例 8.8 相同

$$H(s) = (0.4) \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$

自然频率是  $-2$  Np/s 和  $-6$  Np/s. 因此, 在时间域内, 自然或暂态电流的形式是

$$i_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

这里, 是将完全响应  $i = i_n + i_f$  应用于初始条件来确定常数  $A_1$  和  $A_2$ .  $i_f$  是强迫响应。

**例 8.11** 图 8-16 的网络由流过端点  $yy'$  的电流  $I(s)$  驱动. 网络函数是  $H(s) = V(s) / I(s) = Z(s)$ . 由于三个支路是并联的, 所以

$$H(s) = Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{2.5} + \frac{3}{5s} + \frac{s}{20}} = \frac{20s}{(s + 2)(s + 6)}$$

极点是  $-2$  Np/s 和  $-6$  Np/s, 求得的结果和例 8.10 的结果相同。

### 8.10 幅值和频率的定标

#### 幅值的定标

设网络有输入阻抗函数  $Z_m(s)$ , 并且设  $K_m$  是一个正实数, 那么网络中的每个电阻  $R$  被  $K_m R$  代替, 每个电感  $L$  被  $K_m L$  代替, 每个电容  $C$  被  $C/K_m$  代替, 新的输入阻抗函数是  $K_m Z_m(s)$ . 我们就说, 这个网络被因数  $K_m$  进行了网络定标。

#### 频率定标

如果改变上面的变化, 我们要保持每个电阻  $R$ , 用  $L/K_f$  ( $K_f > 0$ ) 代换每个电感  $L$ , 用  $C/K_f$  代换每个电容  $C$ , 新的输入阻抗函数是  $Z_m(s/K_f)$ . 那么, 新的网络在复数频率  $K_f s$  下的阻抗与旧的网络在  $s$  下的阻抗相同. 我们就说, 这个网络被因数  $K_f$  进行了频率定标。

**例 8.12** 如图 8-17 所示电路, 求它的表达式  $Z(s)$  并观察幅值定标的结果。

$$Z(s) = K_m Ls + \frac{(K_m R) \frac{K_m}{Cs}}{K_m R + \frac{K_m}{Cs}} = K_m \left[ Ls + \frac{R(1/Cs)}{R + (1/Cs)} \right]$$

幅值定标有实际应用的价值. 例如, 如果网络的输入电流比应有的大, 因子  $K_m = 10$  会使电流减少到原来值的  $1/10$ .

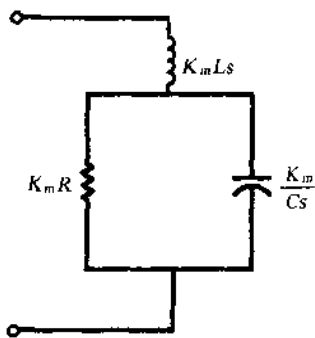


图 8-17

## 习题及解答

- 8.1 一个串联  $RLC$  电路,  $R = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ H}$ ,  $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$ , 有一个恒压源  $V = 50 \text{ V}$ , 在  $t = 0$  时刻施加到电路中。(a) 如果电容没有初始电荷, 求暂态电流; (b) 画出电流草图, 求电流最大值的时间。

解

$$(a) \quad \alpha = \frac{R}{2L} = 150 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 500 \text{ s}^{-2}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 148.3 \text{ s}^{-1}$$

电路是过阻尼的 ( $\alpha > \omega_0$ )。

$$s_1 = -\alpha + \beta = -1.70 \text{ s}^{-1}, \quad s_2 = -\alpha - \beta = -298.3 \text{ s}^{-1}$$

及,

$$i = A_1 e^{-1.70t} + A_2 e^{-298.3t}$$

由于电路中有一个电感,  $i(0^+) = i(0^-) = 0$  及  $Q(0^+) = Q(0^-) = 0$ 。这样在  $i = 0^+$  时, KVL 给出:

$$0 + 0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = V \quad \text{或} \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = \frac{V}{L} = 5 \text{ A/s}$$

对  $i$  的表达式应用这些初始条件,

$$0 = A_1(1) + A_2(1)$$

$$5 = -1.70A_1(1) - 298.3A_2(1)$$

由此得到:  $A_1 = -A_2 = 16.9 \text{ mA}$ 。

$$i = 16.9(e^{-1.70t} - e^{-298.3t}) \quad (\text{mA})$$

(b) 电流最大值的时间

$$\frac{di}{dt} = 0 = -28.73e^{-1.70t} + 5041.3e^{-298.3t}$$

用对数求解,  $t = 17.4 \text{ ms}$ 。见图 8-18。

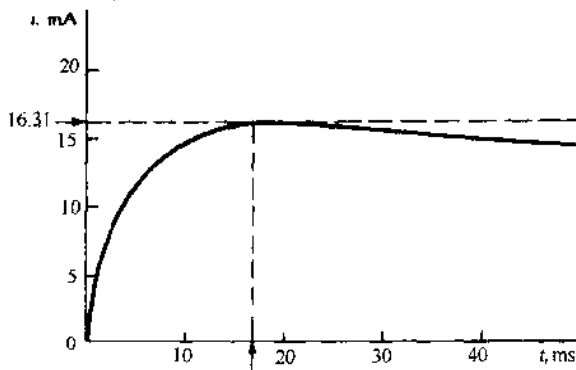


图 8-18

- 8.2 一个串联  $RLC$  电路中,  $R = 50\Omega$ ,  $L = 0.1\text{ H}$ ,  $C = 50\text{ }\mu\text{F}$ , 在  $t = 0$  时刻有一个恒压源  $V = 100\text{ V}$  加到电路中. 求暂态电流, 假设电容的初始电荷是零.

解 解

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 250\text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 2.0 \times 10^5\text{ s}^{-2} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j370.8\text{ rad/s}$$

这是一个振荡情况 ( $\alpha < \omega_0$ ), 一般的电流表达式是:

$$i = e^{-250t}(A_1 \cos 370.8t + A_2 \sin 370.8t)$$

同题 8.1, 求得初始条件:

$$i(0^+) = 0 \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = 1000\text{ A/s}$$

根据这些确定了  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 2.70\text{ A}$ . 那么:

$$i = e^{-250t}(2.70 \sin 370.8t) (\text{A})$$

- 8.3 如果电容的初始电量是  $Q_0 = 2500\text{ }\mu\text{C}$ , 重解题 8.2.

解 解 除了二个初始条件, 剩下的条件和题 8.2 一样, 有:

$$0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} + \frac{Q_0}{C} = V \quad \text{或} \quad L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = \frac{100 - (2500/50)}{0.1} = 500\text{ A/s}$$

初始值是题 8.2 初始值的一半, 由线性性质得出:

$$i = e^{-250t}(1.35 \sin 370.8t) (\text{A})$$

- 8.4 一个并联的  $RLC$  网络,  $R = 50.0\text{ }\Omega$ ,  $C = 200\text{ }\mu\text{F}$ ,  $L = 55.6\text{ mH}$ , 电容的初始电荷是  $Q_0 = 5.0\text{ mC}$ . 求网络两端电压的表达式.

解 解

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 50\text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 8.99 \times 10^4\text{ s}^{-2}$$

由于  $\omega_0^2 > \alpha^2$ , 电压函数是振荡的, 因此  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 296\text{ rad/s}$ . 一般电压表达式是:

$$v = e^{-50t}(A_1 \cos 296t + A_2 \sin 296t)$$

由于  $Q_0 = 5.0 \times 10^{-3}\text{ C}$ ,  $V_0 = 25.0\text{ V}$ . 在  $t = 0$  时,  $v = 25.0\text{ V}$ . 那么  $A_1 = 25.0$ .

$$\frac{dv}{dt} = -50e^{-50t}(296)(-A_1 \sin 296t + A_2 \cos 296t)$$

在  $t = 0$  时,  $dv/dt = -V_0/RC = \omega_d A_2 - \alpha A_1$ , 由此得  $A_2 = -4.22$ . 这样:

$$v = e^{-50t}(25.0 \cos 296t - 4.22 \sin 296t) (\text{V})$$

- 8.5 在图 8-19 中, 开关在  $t = 0$  时刻闭合. 求  $t > 0$  时的电流  $i$  和电容电压  $v_C$ .

解 解 至此涉及到电路的自然响应, 两个电阻是并联的; 因此:

$$\tau = R_{eq}C = (5\Omega)(2\mu\text{F}) = 10\mu\text{s}$$

根据连续性,  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$ . 进而, 随着  $t \rightarrow \infty$ , 电容器变成开路, 剩下与  $50\text{ V}$  电压源相串联的  $20\Omega$  电阻. 即:

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5\text{ A} \quad v_C(\infty) = (2.5\text{ A})(10\Omega) = 25\text{ V}$$

已知终值条件  $v_C$ , 我们可以写出:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-t/10}) (\text{V})$$

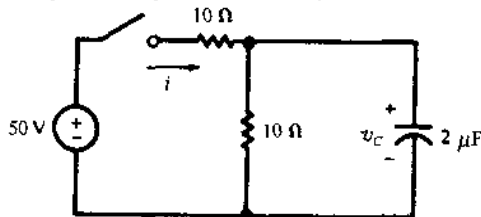


图 8-19

其中  $t$  的单位是  $\mu\text{s}$ 。

电容器的电流由下式给出：

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-t/10} (\text{A})$$

并联的  $10\Omega$  电阻的电流是：

$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10\Omega} = 2.5(1 - e^{-t/10}) (\text{A})$$

因此：

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-t/10}) (\text{A})$$

此题也可以通过指定网孔电流并且求解联立微分方程的方法来求解。

- 8.6 对于表 8-2 的第一列列出的时间函数，写出相应的幅值和相位角（基于余弦）以及复数频率  $s$ 。

解 见表的第 2 列和第 3 列。

表 8-2

时间函数	$A / \phi^\circ$	$s$
$i(t) = 86.6 \text{ A}$	$86.6 \angle 0^\circ \text{ A}$	0
$i(t) = 15.0e^{-2 \times 10^3 t} (\text{A})$	$15.0 \angle 0^\circ \text{ A}$	$-2 \times 10^3 \text{ Np/s}$
$v(t) = 25.0 \cos(250t - 45^\circ) (\text{V})$	$25.0 \angle -45^\circ \text{ V}$	$\pm j250 \text{ rad/s}$
$v(t) = 0.50 \sin(250t + 30^\circ) (\text{V})$	$0.50 \angle -60^\circ \text{ V}$	$\pm j250 \text{ rad/s}$
$i(t) = 5.0e^{-100t} \sin(50t + 90^\circ) (\text{A})$	$5.0 \angle 0^\circ \text{ A}$	$-100 \pm j50 \text{ s}^{-1}$
$i(t) = 3 \cos 50t + 4 \sin 50t (\text{A})$	$5 \angle -53.13^\circ \text{ A}$	$\pm j50 \text{ rad/s}$

- 8.7 对于表 8-3 中第一列中的每个幅值和相位及第二列中的复数频率  $s$ ，写出相应的时间函数。

解 见表中的第三列。

表 8-3

$A / \phi^\circ$	$s$	时间函数
$10 \angle 0^\circ$	$+j120\pi$	$10 \cos 120\pi t$
$2 \angle 45^\circ$	$-j120\pi$	$2 \cos(120\pi t + 45^\circ)$
$5 \angle -90^\circ$	$-2 \pm j50$	$5e^{-2t} \cos(50t - 90^\circ)$
$15 \angle 0^\circ$	$-5000 \pm j1000$	$15e^{-5000t} \cos 1000t$
$100 \angle 30^\circ$	0	86.6

- 8.8 一个幅值和幅角是  $10\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$  的电压，有谐振复频率  $s = -50 + j100 \text{ s}^{-1}$ 。求在  $t = 10 \text{ ms}$  时的电压。

解

$$v(t) = 10\sqrt{2}e^{-50t} \cos(100t + 45^\circ) (\text{V})$$

在  $t = 10^{-2} \text{ s}$  时， $100t = 1 \text{ rad} = 57.3^\circ$ 。因此

$$v = 10\sqrt{2}e^{-0.5} \cos 102.3^\circ = -1.83 \text{ V}$$

- 8.9 一个无源网络中有电阻器，一个  $70 \text{ mH}$  电感器，一个  $25 \mu\text{F}$  电容器。分别求下面电压下的  $s$  域中的阻抗。(a)  $v = 100 \sin(300t + 45^\circ) (\text{V})$ ；(b)  $v = 100e^{-100t} \cos 300t (\text{V})$ 。

解 (a) 电阻与频率无关。在  $s = j300 \text{ rad/s}$  时电感的电抗是

$$sL = (j300)(70 \times 10^{-3}) = j21$$

电容器的容抗是

$$\frac{1}{sC} = -j133.3$$

(b) 在  $s = -100 + j300\text{s}^{-1}$  处

$$sL = (-100 + j300)(70 \times 10^{-3}) = -7 + j21$$

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{(-100 + j300)(15 \times 10^{-6})} = -40 - j120$$

- 8.10 对于图 8-20 所示电路, 求在  $t = 0.1\text{s}$  时的  $v_0$ , 电流源分别是 (a)  $i = 10 \cos 2t\text{ (A)}$ ; (b)  $i = 10e^{-t} \cos 2t\text{ (A)}$ .

解

$$Z_{in}(s) = 2 + \frac{2(s+2)}{s+4} = (4) \frac{s+3}{s+4}$$

(a) 当  $s = j2\text{ rad/s}$ ,  $Z_{in}(s) = 3.22 \angle 7.13^\circ \Omega$ , 则

$$V = IZ_{in} = (10 \angle 0^\circ)(3.22 \angle 7.13^\circ) = 32.2 \angle 7.13^\circ \text{ V}$$

$$\text{或 } v = 32.2 \cos(2t + 7.13^\circ) \text{ V}$$

及

$$v(0.1) = 32.2 \cos(18.59^\circ) = 30.5 \text{ V}$$

(b) 当  $s = -1 + j2\text{s}^{-1}$ ,  $Z_{in}(-1 + j2) = 3.14 \angle 11.31^\circ \Omega$ , 则

$$V = IZ_{in} = 31.4 \angle 11.31^\circ \text{ V} \quad \text{或 } v = 31.4 e^{-t} \cos(2t + 11.31^\circ) \text{ (V)}$$

及

$$v(0.1) = 31.4 e^{-0.1} \cos(22.77^\circ) = 26.2 \text{ V}$$

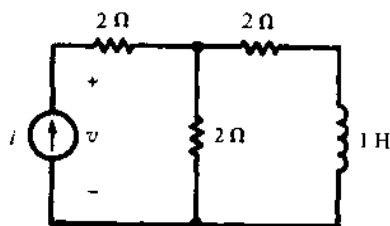


图 8-20

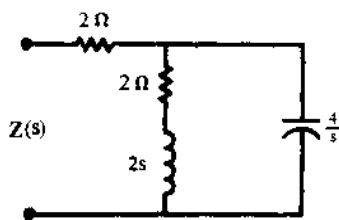


图 8-21

- 8.11 电路如图 8-21 所示, 求下面条件下的阻抗  $Z_{in}(s)$ : (a)  $s = 0$ ; (b)  $s = j4\text{ rad/s}$ ; (c)  $|s| = \infty$ .

解

$$Z_{in}(s) = 2 + \frac{2(s+1)\left(\frac{4}{s}\right)}{2(s+1) + \frac{4}{s}} = (2) \frac{s^2 + 3s + 4}{s^2 + s + 2}$$

(a)  $Z_{in}(0) = 4 \Omega$ , 在稳态下提供给一个恒定(直流)电源的阻抗.

$$(b) Z_{in}(j4) = 2 \frac{(j4)^2 + 3(j4) + 4}{(j4)^2 + (j4) + 2} = 2.33 \angle (-29.05^\circ) \Omega$$

这是一个提供电源  $\sin 4t$  或者  $\cos 4t$  的阻抗.

(c)  $Z_{in}(\infty) = 2 \Omega$ . 在频率很高时, 电容就像一个短路跨接在  $RL$  支路两端.

- 8.12 求  $L = 4\text{ H}$ ,  $C = 1\text{ F}$  并联的阻抗  $Z(s)$  的表达式. 在什么频率时,  $s$  使阻抗为零或无穷大?

解

$$Z(s) = \frac{(4s)(1/s)}{4s + (1/s)} = \frac{s}{s^2 + 0.25}$$

经过观察  $Z(0) = 0$  和  $Z(\infty) = 0$ , 与我们容易理解的  $LC$  并联电路在频率为零(直流)或者无穷大时的情况一致. 对于  $|Z(s)| = \infty$ ,

$$s^2 + 0.25 = 0 \quad \text{或} \quad s = \pm j0.5 \text{ rad/s}$$



一个频率为  $0.5$  弧度/s 的正弦驱动电源, 引起并联谐振和一个无穷大的阻抗。

- 8.13 图 8-22 所示电路在  $ab$  两端连接了一个电压源. 对激励的响应是输入电流. 求近似的网络函数  $H(s)$ .

解 在

$$H(s) = \frac{\text{响应}}{\text{激励}} = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$$

$$Z(s) = 2 + \frac{(2 + 1/s)(1)}{2 + 1/s + 1} = \frac{8s + 3}{3s + 1}$$

由此得

$$H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{3s + 1}{8s + 3}$$

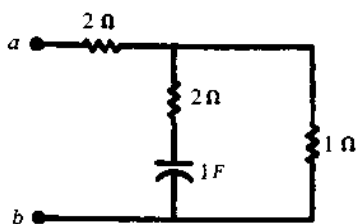


图 8-22

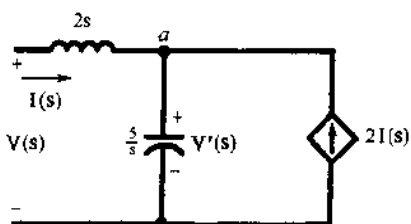


图 8-23

- 8.14 求图 8-23 所示网络的  $H(s)$ , 这里激励是驱动电流  $I(s)$ , 响应是输入端的电压.

解 在连接点  $a$  应用 KCL.

$$I(s) + 2I(s) = \frac{s}{5}V'(s) \quad \text{和} \quad V'(s) = \frac{15}{s}I(s)$$

在输入端, KVL 给出

$$V(s) = 2sI(s) + V'(s) = \left(2s + \frac{15}{s}\right)I(s)$$

则

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{2s^2 + 15}{s}$$

- 8.15 图 8-24 所示二端口网络, 求  $R_1$ ,  $R_2$ , 和  $C$ , 给定电压的传输函数是

$$H_v(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0.2}{s^2 + 3s + 2}$$

解 从  $xx'$  看进去的阻抗是

$$Z' = \frac{(1/sC)(R_1 + R_2)}{(1/sC)R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{1 + (R_1 + R_2)Cs}$$

那么, 重复进行分压,

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_i} &= \left( \frac{V_o}{V_{xx'}} \right) \left( \frac{V_{xx'}}{V_i} \right) = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left( \frac{Z'}{Z' + sI} \right) \\ &= \frac{R_2 / (R_1 + R_2) C}{s^2 + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}s + \frac{1}{C}} \end{aligned}$$

在这个表达式中与给出的表达式  $H_v(s)$  中取相等的系数, 求得

$$C = \frac{1}{2}F \quad R_1 = \frac{3}{5}\Omega \quad R_2 = \frac{1}{15}\Omega$$

- 8.16 画出转移导纳函数的极-零点图

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + 2s + 17}{s^2 + 3s + 2}$$

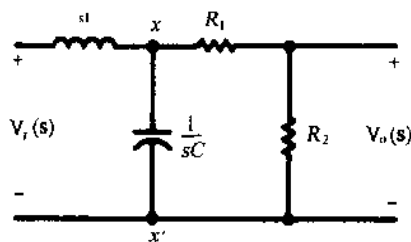


图 8-24

解 用因式形式表示

$$H(s) = \frac{(s+1+j4)(s+1-j4)}{(s+1)(s+2)}$$

在  $-1$  和  $-2$  处存在极点, 零点在  $-1 \pm j4$ , 见图 8-25.

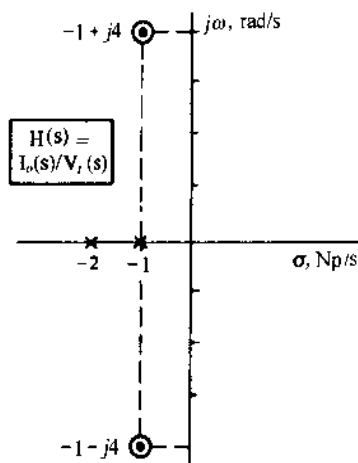


图 8-25

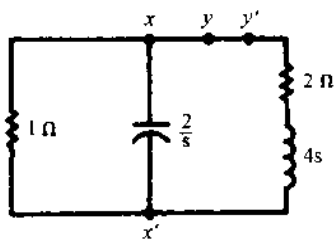


图 8-26

8.17 求图 8-26 所示网络的自然频率, 该网络由一个方便的本地电流源驱动.

解 对  $xx'$  之间连接的电流源的响应是跨过相同端点的电压; 因此, 网络函数是  $H(s) = V(s)/I(s) = Z(s)$ . 那么

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2/s} + \frac{1}{2+4s} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{s^2 + 2.5s + 1.5}{s + 0.5}$$

这样,

$$Z(s) = (2) \frac{s + 0.5}{s^2 + 2.5s + 1.5} = (2) \frac{s + 0.5}{(s+1)(s+1.5)}$$

自然频率是网络的极点,  $s = -1.0$  Np/s 和  $s = -1.5$  Np/s.

8.18 由一个电压源驱动网络时重做题 8.17.

解 图 8-26 中在导线  $yy'$  处断开, 加入一个电压源, 则  $H(s) = I(s)/V(s) = 1/Z(s)$ . 在端点  $yy'$  处网络的阻抗是

$$Z(s) = 2 + 4s + \frac{1(2/s)}{1 + 2/s} = (4) \frac{s^2 + 2.5s + 1.5}{s + 2}$$

那么

$$H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{s + 2}{s^2 + 2.5s + 1.5}$$

分母和例 8.17 相同, 有相同的根和相应的自然频率.

8.19 一个相量形式为  $V = 100 \angle 0^\circ$  的 5000 rad/s 的正弦电压源, 施加到图 8-27 所示电路中. 求使电流最大值限制在 89 mA 以内的幅值标定因子  $K_m$  和元件的值.

解 在  $\omega = 5000$  rad/s 时,

$$\begin{aligned} Z_{in} &= j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_2) \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L_2 + R + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= j0.250 + \frac{(j0.500)(0.40 - j0.80)}{0.40 - j0.30} = 1.124 \angle 69.15^\circ \Omega \end{aligned}$$

对于  $|V| = 100$  V,  $|I_1| = 100/1.124 = 89.0$  A. 因此, 为了使电流限制在  $89 \times 10^{-3}$  A, 必须用因子  $K_m = 10^3$  增加阻抗.

标定的元件值如下:  $R = 10^3(0.4\Omega) = 400\Omega$ ,  $L_1 = 10^3(50\mu H) = 50mH$ ,  $L_2 = 10^3(100\mu H) = 100mH$

和  $C = (250\mu\text{F})/10^3 = 0.250\mu\text{F}$ .

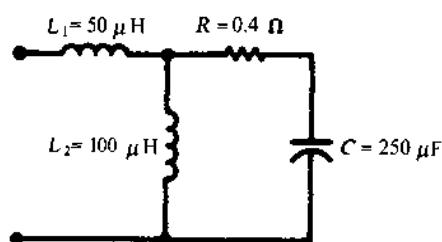


图 8-27

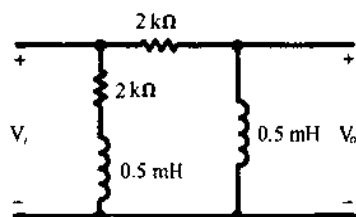


图 8-28

- 8.20 参考图 8-28. 求  $s = j4 \times 10^6 \text{ rad/s}$  时的  $H(s) = V_o/V_i$ . 用  $K_m = 10^{-3}$  标定网络并比较两个网络的  $H(s)$ .

解 在  $\omega = 4 \times 10^6 \text{ rad/s}$  时,  $X_L = (4 \times 10^6)(0.5 \times 10^{-3}) = 2000\Omega$ . 则

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2000}{2000 + j2000} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

在幅值定标后, 电感电抗是  $10^{-3}(2000\Omega) = 2\Omega$ , 阻抗是  $10^{-3}(2k\Omega) = 2\Omega$ . 则

$$H(s) = \frac{j2}{2 + j2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

幅值定标后电压转移函数保持不变. 一般, 任何无量纲的转移函数不受幅值定标的影响; 一个单位是  $\Omega$  的转移函数被  $K_m$  所乘. 一个单位是  $s$  的转移函数被  $1/K_m$  所乘.

- 8.21 一个三个元件的串联电路,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 4\text{ H}$  和  $C = 3.91\text{ mF}$ . 求串联谐振频率, 单位是  $\text{rad/s}$ , 然后用  $K_f = 1000$  对频率定标. 画出两个电路的  $|Z(\omega)|$ .

解 定标前

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8\text{ rad/s} \quad \text{和} \quad Z(\omega_0) = R = 5\Omega$$

定标后

$$R = 5\Omega \quad L = \frac{4\text{ H}}{1000} = 4\text{ mH} \quad C = \frac{3.91\text{ mF}}{1000} = 3.91\mu\text{F}$$

$$\omega_0 = 1000(8\text{ rad/s}) = 8000\text{ rad/s} \quad Z(\omega_0) = R = 5\Omega$$

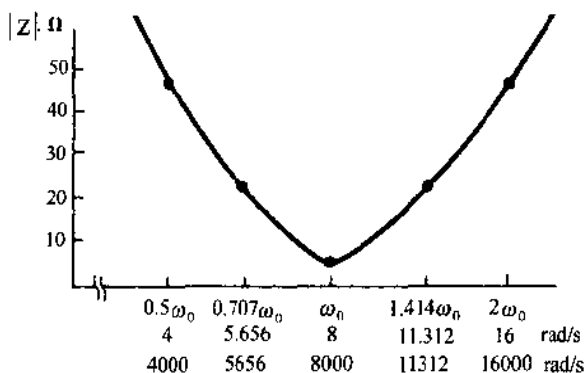


图 8-29

用因数 1000 对频率定标使得在  $5\Omega$  阻抗上由  $8\text{ rad/s}$  达到了  $8000\text{ rad/s}$ . 在其他阻抗的值也相应地改变了. 在定标后, 频率是定标前的 1000 倍. 因此  $|Z(\omega)|$  的两个图的区别仅仅在水平轴的尺度不同——见图 8-29. (两个  $\theta_{Z(\omega)}$  的图表的情况也是一样的).

## 补充习题

- 8.22 图 8-30 所示  $RLC$  电路中, 电容初始充电到  $V_0 = 200\text{V}$ . 求开关在  $t = 0$  时刻闭合后的暂态电流.

答案:  $-2e^{-1000t} \sin 1000t \text{ (A)}$

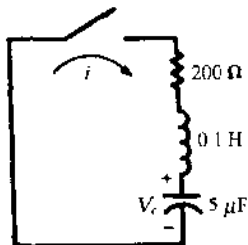


图 8-30

- 8.23 一个串联  $RLC$  电路,  $R = 200\Omega$ ,  $L = 0.1\text{H}$ ,  $C = 100\mu\text{F}$ , 在  $t = 0$  时,  $200\text{V}$  的电压源加到电路中. 求暂态电流, 设电容器的初始电荷是零.

答案:  $1.055(e^{-52t} - e^{-1948t})$

- 8.24 用多大的电容器代替例 8.23 中  $100\mu\text{F}$  的电容, 使电路为临界阻尼情况?

答案:  $10\mu\text{F}$

- 8.25 一个串联  $RLC$  电路,  $R = 200\Omega$ ,  $L = 0.1\text{H}$ ,  $C = 5\mu\text{F}$ . 求电路的自然谐振频率  $|\beta|$ .

答案:  $1000\text{rad/s}$

- 8.26 在  $t = 0$  时刻, 一个  $10\text{V}$  电压接入串联  $RLC$  电路, 其中  $R = 5\Omega$ ,  $L = 0.1\text{H}$ ,  $C = 500\mu\text{F}$ . 求电阻两端的暂态电压.

答案:  $3.60e^{-25t} \sin 139t$

- 8.27 如图 8-31 所示两网孔电路中, 开关在  $t = 0$  时刻闭合. 求  $t > 0$  时的  $i_1$  和  $i_2$ .

答案:  $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t} \text{ (A)}$ ,  $i_2 = -5.05e^{-100t} + 5.00 + 0.05e^{-9950t} \text{ (A)}$

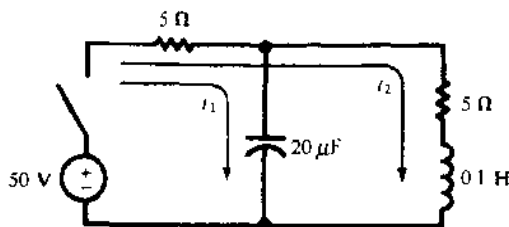


图 8-31

- 8.28 一个电压在  $s$  域内的表示式为  $100\angle 30^\circ\text{V}$ . 求出时间函数表达式 (a)  $s = -2\text{Np/s}$ , (b)  $s = -1 + j5\text{s}^{-1}$ .

答案: (a)  $86.6e^{-2t} \text{ (V)}$ ; (b)  $100e^{-t} \cos(5t + 30^\circ) \text{ (V)}$

- 8.29 求出与电流  $i(t) = 5.0 + 10e^{-3t} \cos(50t + 90^\circ) \text{ (A)}$  相关联的复数频率.

答案:  $0, -3 \pm j50\text{s}^{-1}$

- 8.30 一个相量电流是  $25\angle 40^\circ\text{A}$  具有复数频率是  $s = -2 + j3\text{s}^{-1}$ . 求在  $t = 0.2\text{s}$  时的  $i(t)$  的幅值是多少?

答案:  $4.51\text{A}$

- 8.31 计算图 8-32 所示电路的阻抗  $Z(s)$ . 设 (a)  $s = 0$ ; (b)  $s = j1\text{rad/s}$ ; (c)  $s = j2\text{rad/s}$ ; (d)  $|s| = \infty$ .

答案: (a)  $1\Omega$ ; (b)  $1.58\angle 18.43^\circ\Omega$ ; (c)  $1.84\angle 12.53^\circ\Omega$ ; (d)  $2\Omega$

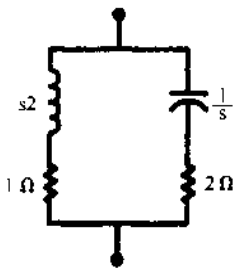


图 8-32

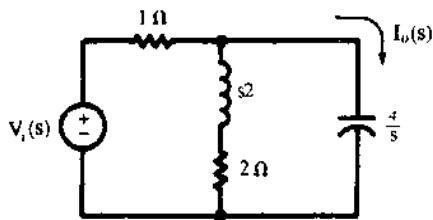


图 8-33

- 8.32 在图 8-33 所示  $s$  域电路中电压源在时间域的表达式为

$$v_i(t) = 10e^{-t} \cos 2t \text{ (V)}$$

求  $i_o(t)$ .

答案:  $7.07e^{-t} \cos(2t + 98.13^\circ) \text{ (A)}$

- 8.33 在时间域内, 一个  $R, L$  和  $C$  的串联电路施加电压是  $v_i$ , 元件电压  $v_R$ ,  $v_L$  和  $v_C$ . 求电压的转移函数

(a)  $V_R(s)/V_i(s)$ ; (b)  $V_C(s)/V_i(s)$ .

答案: (a)  $\frac{Rs/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$ ; (b)  $\frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

8.34 求图 8-34 所示电路的网络函数  $H(s)$ . 响应是电压  $V_i(s)$

答案:  $\frac{(s+7-j2.65)(s+7+j2.65)}{(s+2)(s+4)}$

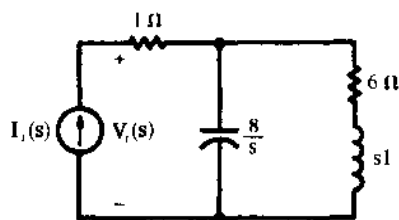


图 8-34

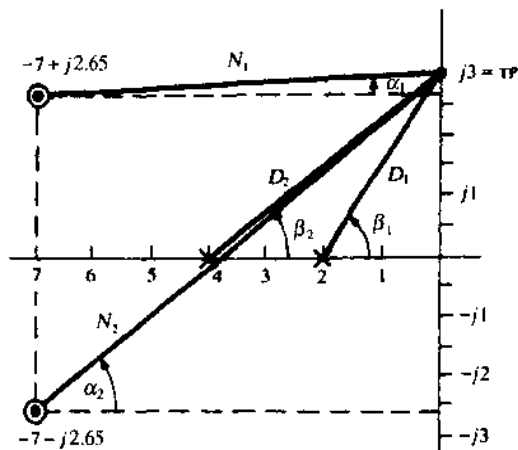


图 8-35

8.35 构造题 8.34 的传递函数的  $s$  平面图. 由图计算  $H(j3)$  的值.

答案: 见图 8-35,  $\frac{(7.02)(9.0) \angle (2.86^\circ + 38.91^\circ)}{(3.61)(5.0) \angle (56.31^\circ + 36.87^\circ)} = 3.50 \angle (-51.41^\circ) \Omega$

8.36 电路如图 8-36 所示, 求  $H(s) = V_i(s)/I_i(s)$ , 并构造零极点图.

答案:  $H(s) = \frac{s(s^2+1.5)}{s^2+1}$ . 见图 8-37.

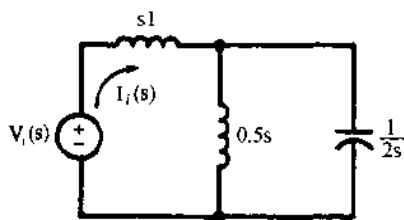


图 8-36

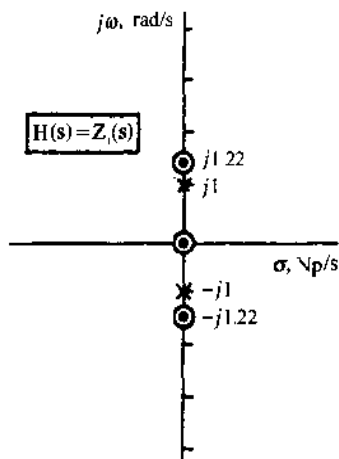


图 8-37

8.37 零极点图在图 8-38 中给出, 写出转移函数  $H(s)$ .

答案:  $H(s) = k \frac{s^2 + 50s + 400}{s^2 + 40s + 2000}$

8.38 在图 8-39 所示零极点图中, 一个极点在  $s=0$  处和零点在  $s = -50 \pm j50$  处. 用几何方法求在  $j100$  处的转移函数.

答案:  $H(j100) = 223.6 \angle 26.57^\circ$

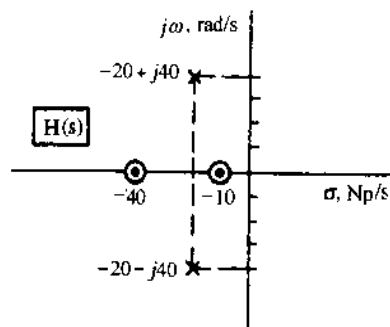


图 8-38

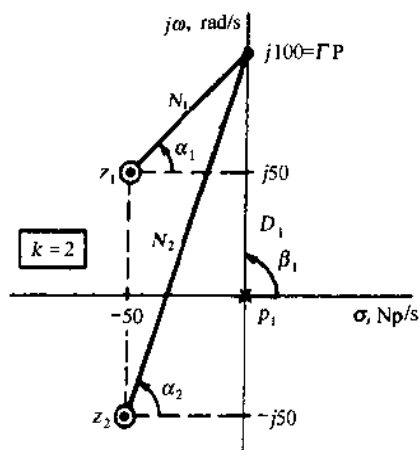


图 8-39

- 8.39 一个两支路并联电路, 一条支路的电阻是  $20\Omega$ , 另一条支路是  $R = 10\Omega$  和  $L = 0.1\text{H}$  的串联组合. 首先, 施加一个激励  $I_i(s)$ , 从网络函数的分母中求得自然频率. 在不同的位置施加一个电流源. 第二步加入一个电压源  $V_i(s)$ , 求自然频率.

答案: 所有情况都为  $-300 \text{ Np/s}$

- 8.40 图 8-40 所示的网络中, 开关在  $t = 0$  时刻闭合. 在  $t = 0^+$ ,  $i = 0$  并且

$$\frac{di}{dt} = 25 \text{ A/s}$$

求自然频率和全部的电流  $i = i_n + i_f$ .

答案:  $-8.5 \text{ Np/s}$ ,  $-23.5 \text{ Np/s}$ ;  $i = -2.25e^{-8.5t} - 0.25e^{-23.5t} + 2.5 \text{ (A)}$

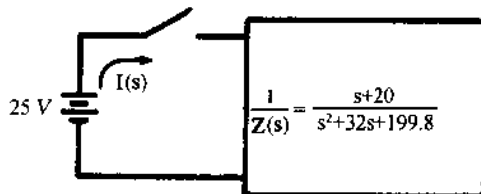


图 8-40

- 8.41 一个串联  $RLC$  电路包含有  $R = 1\Omega$ ,  $L = 2 \text{ H}$ ,  $C = 0.25 \text{ F}$ . 用  $K_m = 2000$  和  $K_f = 10^4$  同时进行幅值和频率定标. 定标的元件值是多少?

答案:  $2000\Omega$ ,  $0.4 \text{ H}$ ,  $12.5 \mu\text{F}$ .

- 8.42 在一定频率  $\omega_1$  下, 把电压  $V_1 = 25\angle 0^\circ \text{ V}$  的施加到一个无源网络中引起的电流为  $I_1 = 3.85\angle -30^\circ \text{ A}$ . 网络元件用  $K_m = 10$  进行幅值标定. 求用第二个电压源  $V_2 = 10\angle 45^\circ \text{ V}$  代替第一个后产生的电流, 第二个电压源频率是  $\omega_2 = 10^3 \omega_1$ .

答案:  $0.154\angle 15^\circ \text{ A}$

## 第9章 正弦稳态电路分析

### 9.1 引言

本章将主要讲述由正弦电源驱动的电路的稳态响应,该响应也是正弦形式.对于一个线性电路来说,它的信号源不一定真是正弦信号源,因为一个周期性函数的电源信号,可以被一个等效的正弦函数组合(付里叶级数)所代替.其原因我们将在第17章进行讨论.

### 9.2 元件响应

在第二章,我们已经讨论过作为单独元件的  $R$ 、 $L$  和  $C$  的电压、电流关系,并总结在表2-1中.在本章中,函数  $v$  和  $i$  将会是带有幅角  $\omega t$  的正弦或余弦函数. $\omega$  是角频率,单位为  $\text{rad/s}$ ,另外  $\omega = 2\pi f$ ,其中  $f$  是频率,单位是周期/s,或更一般地为赫兹(Hz).

考虑一个电感  $L$ ,其电流  $i = I \cos(\omega t + 45^\circ) \text{A}$  [见图9-1(a)].电压是

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I [-\sin(\omega t + 45^\circ)] = \omega L I \cos(\omega t + 135^\circ) (\text{V})$$

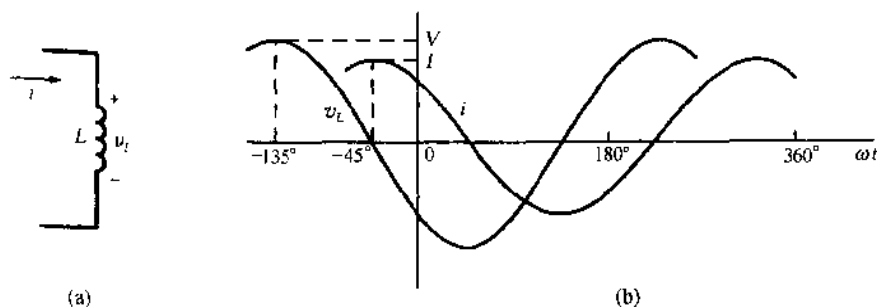


图 9-1

比较曲线  $v_L$  和曲线  $i$ ,表明在相位上,电流滞后电压  $90^\circ$ 或者说滞后  $\pi/2 \text{rad}$ .这个函数画于图9-1(b)中.注意电流函数  $i$  在电压函数  $v$  的右侧,由于水平标尺是  $\omega t$ ,所以右侧的事件在时间上要晚一些发生.这说明电流滞后于电压.横坐标单位是弧度,但也可以用度数来表示 ( $-135^\circ, 180^\circ$ 等).所以这是一个混合单位的情况,如  $\omega t + 45^\circ$ .这在数学上是不正确的,但在电路分析中是实际上可接受的.纵坐标代表两个不同的量,即  $v$  和  $i$ ,所以应有两个尺度而不是一个.

表 9-1

	$i = I \cos \omega t$	$v = V \cos \omega t$
	$v_R = RI \cos \omega t$	$i_R = \frac{V}{R} \cos \omega t$
	$v_L = \omega L I \cos(\omega t + 90^\circ)$	$i_L = \frac{V}{\omega L} \cos(\omega t - 90^\circ)$
	$v_C = \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t - 90^\circ)$	$i_C = \omega C V \cos(\omega t + 90^\circ)$

当检查这张图时,图形表明当说明了正弦波的幅值( $V$ 或 $I$ ),频率( $\omega$ 或 $f$ )和相位( $45^\circ$ 或 $135^\circ$ )时,一个正弦波被完整地定义。

表 9-1 中,说明了在施加电流  $i = I \cos \omega t$  和电压  $v = V \cos \omega t$  时,三种基本电路元件的响应情况。如果画出这些响应的图形,会显示出对于电阻  $R$ ,  $v$  和  $i$  同相位。对于电感  $L$ ,  $i$  滞后  $v 90^\circ$  或者  $\pi/2 \text{ rad}$ 。对于电容  $C$ ,  $i$  超前  $v 90^\circ$  或者  $\pi/2 \text{ rad}$ 。

**例 9.1** 如图 9-2 所示,一个  $RL$  串联电路,电流为  $i = I \sin \omega t$ ,求两个元件两端的电压  $v$  并画出  $v$  和  $i$  的图形。

$$v_R = RI \sin \omega t \quad v_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$v = v_R + v_L = RI \sin \omega t + \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)$$

因为电流是正弦函数,而且

$$v = V \sin(\omega t + \theta) = V \sin \omega t \cos \theta + V \cos \omega t \sin \theta \quad (1)$$

我们可以得出

$$v = RI \sin \omega t + \omega LI \sin \omega t \cos 90^\circ + \omega LI \cos \omega t \sin 90^\circ \quad (2)$$

公式(1)和(2)中有相同的系数项

$$V \sin \theta = \omega LI \quad \text{和} \quad V \cos \theta = RI$$

则

$$v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin[\omega t + \arctan(\omega L/R)]$$

及

$$V = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

函数  $i$  和  $v$  画于图 9-3 中。 $i$  滞后  $v$  的相位角  $\theta$ , 范围是  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , 分别在  $\omega L \ll R$  或  $\omega L \gg R$  时达到极限值。如果电路施加的电压为  $v = V \sin \omega t$ , 引起的电流为

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \theta)$$

这里,  $\theta = \tan^{-1}(\omega L/R)$ 。

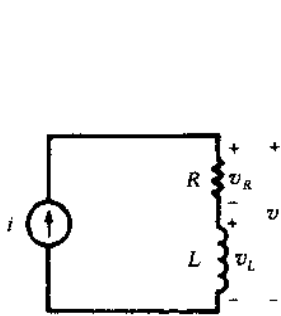


图 9-2

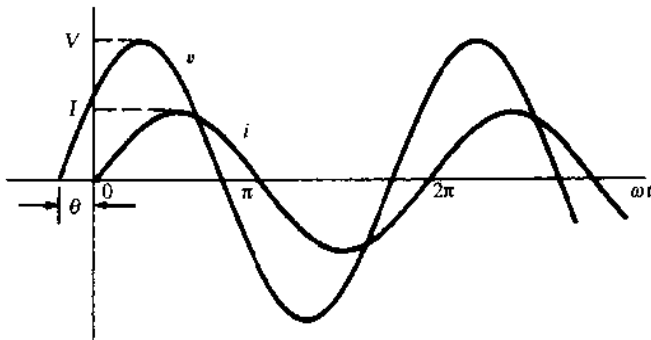


图 9-3

**例 9.2** 如果串联  $RC$  电路中驱动电流为  $i = I \sin \omega t$ , 求两个元件两端的总电压。

$$v_R = RI \sin \omega t \quad v_C = (1/\omega C) \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$v = v_R + v_C = V \sin(\omega t - \theta)$$

其中

$$V = I \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \quad \text{和} \quad \theta = \tan^{-1}(1/\omega CR)$$

负相角使  $v$  曲线移到  $i$  曲线的右侧。因此在串联  $RC$  电路中,  $i$  的相位超前于  $v$ 。相位角  $\theta$  限制在  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  范围内。对于  $(1/\omega C) \ll R$ , 则  $\theta = 0^\circ$ ; 若  $(1/\omega C) \gg R$ , 则  $\theta = 90^\circ$ 。(见图 9-4)



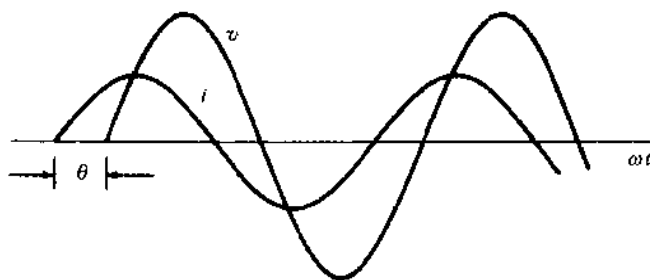


图 9-4

### 9.3 相量

从上面的例子中,可以简要地看到电压和电流正弦曲线两个主要的不同之处是幅值和相位.一条有方向的线段,或者相量,例如图 9-5 中以恒定的角速度  $\omega(\text{rad/s})$  按逆时针方向旋转的相量,在横坐标轴上的投影是余弦函数.相量的长度或者幅值是余弦函数的幅值或最大值.相量的两个位置之间的角度是余弦函数上相应点之间的相位差.

在本书中由余弦函数对相量进行定义.如果电压或电流被表示为正弦函数,用相位减去  $90^\circ$  的方法,将其转化为余弦函数.

考虑表 9-2 中的几个例子.观察这些相量,是有向线段或自由矢量,用黑体字母如  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{I}$  来标注.余弦函数的相位角是相量的角度.在这里的相量图和下面的相量图可以被认为是  $t = 0$  时刻,有向线段按逆时针方向旋转的快照.频率  $f(\text{Hz})$  和  $\omega(\text{rad/s})$  一般不在图中标出,由于它们一般隐含在任何正弦稳态电路的问题中,因此应该记住它们.

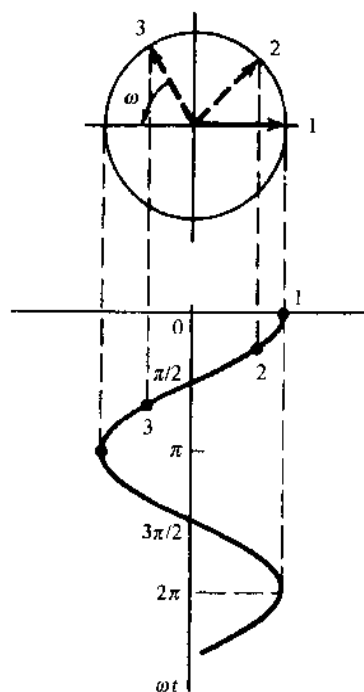


图 9-5

表 9-2

函数	相量表示
$v = 150\cos(500t + 45^\circ)(\text{V})$	
$i = 3.0\sin(2000t + 30^\circ)(\text{mA})$ $= 3.0\cos(2000t - 60^\circ)(\text{mA})$	

**例 9.3** 一个串联电路  $R = 10\Omega$ ,  $L = \text{mH}$ , 电流  $i = 5.0 \cos(500t + 10^\circ)$ . 求电压  $v$  和  $\mathbf{V}$ , 相量电流  $\mathbf{I}$ , 并画出相量图.

用例 9.1 中的方法

$$v_R = 50.0 \cos(500t + 10^\circ) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 50.0 \cos(500t + 100^\circ)$$

$$v = v_R + v_L = 70.7 \cos(500t + 55^\circ) \text{ (V)}$$

相应的相量为

$$\mathbf{I} = 5.0 \angle 10^\circ \text{ A} \quad \mathbf{V} = 70.7 \angle 55^\circ \text{ V}$$

图 9-6(a) 所示的  $i$  和  $v$  的时域图中可见  $45^\circ$  相位角,  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{V}$  的相量图示于图 9-6(b).

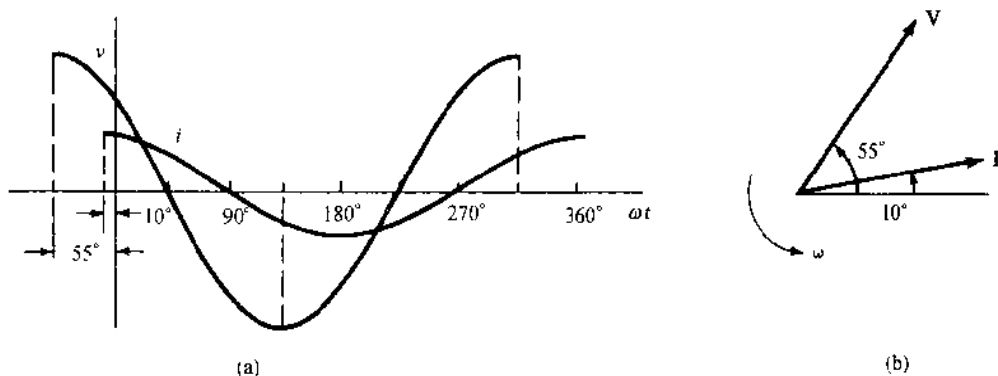


图 9-6

相量可以当作一个复数对待. 当水平轴与一个复平面的实数轴相同时, 相量就成为一个复数并且适用于通常的法则. 根据欧拉同一性法则, 对一个相量有三个等效符号.

**极坐标形式**  $\mathbf{V} = V \angle \theta$

**正交形式**  $\mathbf{V} = V(\cos \theta + j \sin \theta)$

**指数形式**  $\mathbf{V} = V e^{j\theta}$

余弦表达式也可以写成:

$$v = V \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[V e^{j(\omega t + \theta)}] = \operatorname{Re}[V e^{j\omega t}]$$

指数形式提出了如何处理相量的积和商. 由于  $(V_1 e^{j\theta_1})(V_2 e^{j\theta_2}) = (V_1 V_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)})$ , 则:

$$(V_1 \angle \theta_1)(V_2 \angle \theta_2) = V_1 V_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

又由于  $(V_1 e^{j\theta_1}) / (V_2 e^{j\theta_2}) = (V_1 / V_2 e^{j(\theta_1 - \theta_2)})$ ,

$$\frac{V_1 \angle \theta_1}{V_2 \angle \theta_2} = V_1 / V_2 \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

用正交形式可以作相量的加减法运算.

**例 9.4** 已知  $\mathbf{V}_1 = 25.0 \angle 143.13^\circ$ ,  $\mathbf{V}_2 = 11.2 \angle 26.57^\circ$ , 求  $\mathbf{V}_1 / \mathbf{V}_2$  和  $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ .

$$\mathbf{V}_1 / \mathbf{V}_2 = \frac{25.0 \angle 143.13^\circ}{11.2 \angle 26.57^\circ} = 2.23 \angle 116.56^\circ = -1.00 + j1.99$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 &= (-20.0 + j15.0) + (10.00 + j5.0) \\ &= -10.0 + j20.0 = 23.36 \angle 116.57^\circ \end{aligned}$$

#### 9.4 阻抗和导纳

一个正弦电压或电流加到一个无源 RLC 电路中产生一个正弦响应. 由于是时间函数, 如  $v(t)$  和  $i(t)$ , 电路称为时间域电路(图 9-7(a)); 当用相量来分析电路时, 我们称电路为频率域电路(图 9-7(b)). 电压和电流可以分别写成

$$v(t) = V \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[V e^{j\omega t}] \quad \mathbf{V} = V \angle \theta$$

$$i(t) = I \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} [I e^{j\omega t}] \quad \mathbf{I} = I \angle \phi$$

相量电压  $\mathbf{V}$  和相量电流  $\mathbf{I}$  的比值定义为阻抗  $\mathbf{Z}$ , 即  $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I}$ . 阻抗的倒数称为导纳  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}(\text{S})$ , 这里  $1\text{S} = 1\Omega^{-1} = 1$  姆欧. 其中  $\mathbf{Y}$  和  $\mathbf{Z}$  都是复数.

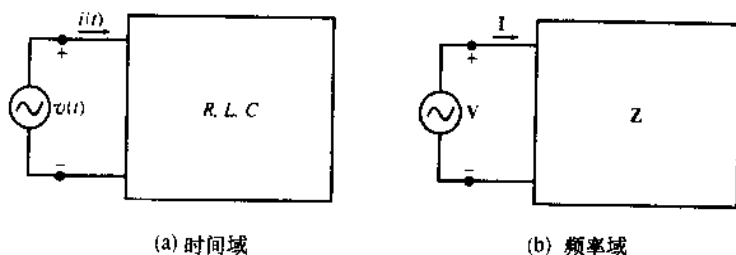


图 9-7

当阻抗写成直角坐标形式时, 实部是电阻  $R$ , 虚部是电抗  $X$ . 虚部的符号可正可负; 如果为正,  $X$  称为感抗; 如果为负,  $X$  称为容抗. 当导纳写为直角坐标形式时, 其实部是导纳  $G$ , 虚部是电纳  $B$ . 电纳的符号也可正可负, 如为正, 则称为容纳, 如为负, 则为感纳. 因此

$$\mathbf{Z} = R + jX_L \quad \mathbf{Z} = R - jX_C$$

$$\mathbf{Y} = G - jB_L \quad \mathbf{Y} = G + jB_C$$

这些项之间的关系均遵循公式  $\mathbf{Z} = 1/\mathbf{Y}$ . 则

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

这些表达式在习题中使用的并不多, 这些题的计算可以用数值方法进行, 如以下的例子.

**例 9.5** 如图 9-7(b)所示, 加在网络两端的相量电压为  $100.0 \angle 45^\circ \text{V}$ , 引起的电流为  $5.0 \angle 15^\circ \text{A}$ . 求等效阻抗和导纳.

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{100.0 \angle 45^\circ}{5.0 \angle 15^\circ} = 20.0 \angle 30^\circ = 17.32 + j 10.0 \Omega$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{20.0 \angle 30^\circ} = 0.05 \angle -30^\circ = (4.33 - j 2.50) \times 10^{-2} \text{S}$$

所以  $R = 17.32 \Omega$ ,  $X_L = 10.0 \Omega$ ,  $G = 4.33 \times 10^{-2} \text{S}$ ,  $B_L = 2.50 \times 10^{-2} \text{S}$ .

### 阻抗的组合

对于一个电阻网络,  $\mathbf{V} = \mathbf{IZ}$  (在频率域中) 在形式上等同于欧姆定律,  $v = iR$  (在时间域中). 因此, 阻抗可像电阻那样进行组合.

$$\text{串联阻抗} \quad \mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots$$

$$\text{并联阻抗} \quad \frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dots$$

实际上, 两个并联阻抗为

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 / (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2).$$

### 阻抗图

在阻抗图中, 一个阻抗  $\mathbf{Z}$  表示为复平面右半平面中的一点. 图 9-8 所示两个阻抗:  $\mathbf{Z}_1$  在第一象限, 说明它是一个感抗, 而  $\mathbf{Z}_2$  在第四象限, 说明它是一个容抗. 它们的串联等效值,  $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$ , 可用向量加法求得, 如图所示. 注意, 图中的向量没有箭头, 这

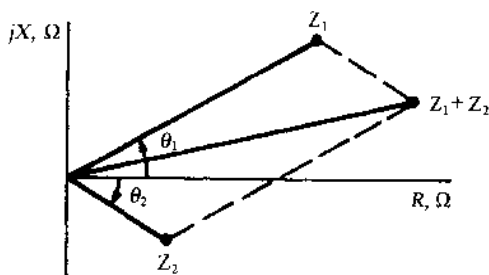


图 9-8

是为了将这些复数与相量区别开。

### 导纳的组合

将上面公式中的  $Z$  换成  $1/Y$

$$\text{串联导纳} \quad \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots$$

$$\text{并联导纳} \quad Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots$$

所以,串联电路最容易用阻抗处理;并联电路最容易用导纳处理。

### 导纳图

图 9-9 的一个导纳图,可以模仿图 9-8 阻抗图。图中导纳  $Y_1$  为容纳,导纳  $Y_2$  为感纳,它们的向量和  $Y_1 + Y_2$  是  $Y_1$  和  $Y_2$  的并联组合的导纳。

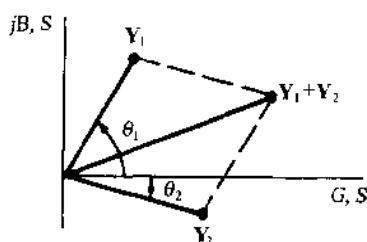


图 9-9

## 9.5 频率域中的分压和分流

用在频率域中的阻抗和在时域中的电阻之间进行类比的方法,第 3.6 节和 3.7 节中提供了以下结果。

(1) 串联阻抗对总电压的分压等于阻抗比

$$\frac{V_r}{V_s} = \frac{Z_r}{Z_s} \quad \text{或} \quad V_r = \frac{Z_r}{Z_{eq}} V_s$$

见图 9-10。

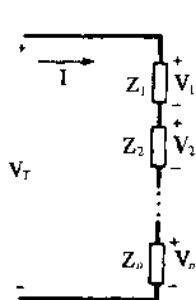


图 9-10

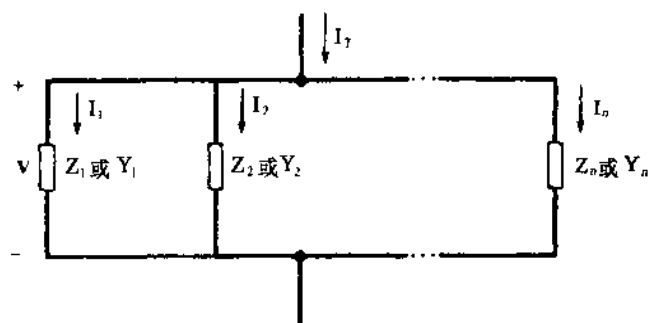


图 9-11

(2) 并联阻抗(串联导纳)对总电流的分流等于阻抗比的倒数(导纳比)

$$\frac{I_r}{I_s} = \frac{Z_s}{Z_r} = \frac{Y_r}{Y_s} \quad \text{或} \quad I_r = \frac{Y_r}{Y_{eq}} I_T \quad I_T = \frac{Y_s}{Y_{eq}} I_r$$

见图 9-11

## 9.6 网孔电流分析法

考虑图 9-12 所示频率域的网络。如同 4-3 节中那样应用 KVL, 或通过简单观察, 我们得到矩阵方程:

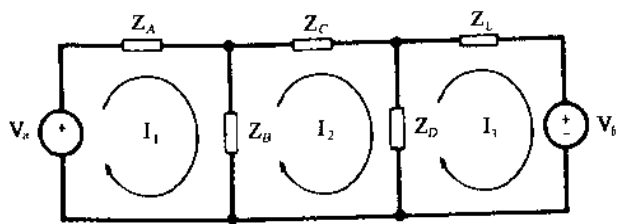


图 9-12

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

网孔电流  $I_1, I_2, I_3$  是未知的. 这里  $Z_{11} \equiv Z_A + Z_B$ , 称为网孔 1 的自阻抗, 它是  $I_1$  流过的所有阻抗的和. 同理  $Z_{22} \equiv Z_B + Z_C + Z_D$ ,  $Z_{33} \equiv Z_D + Z_E$  分别是网孔 2 和网孔 3 的自阻抗.

$Z$  矩阵中的 1, 2 元素定义为

$$Z_{12} \equiv \sum \pm (I_1 \text{ 和 } I_2 \text{ 的公共阻抗})$$

如果两电流以相同方向通过阻抗时, 和的符号取正值; 两个电流方向相反则和的符号取负值. 由此得到结论,  $Z_{12} = Z_{21}$ . 在图 9-12 中,  $I_1$  和  $I_2$  以相反的方向流过  $Z_B$ , 所以

$$Z_{12} = Z_{21} = -Z_B$$

同理

$$Z_{13} = Z_{31} \equiv \sum \pm (I_1 \text{ 和 } I_3 \text{ 的公共阻抗}) = 0$$

$$Z_{23} = Z_{32} \equiv \sum \pm (I_2 \text{ 和 } I_3 \text{ 的公共阻抗}) = -Z_D$$

矩阵  $Z$  是对称的.

在方程右边的  $V$  列中,  $V_k$  项 ( $k=1, 2, 3$ ) 可像 4.3 节中那样准确地定义为:

$$V_k \equiv \sum \pm (\text{网孔 } k \text{ 中的驱动电压})$$

如果电压驱动与电流  $I_k$  的方向相同, 和的符号取正值, 相反的情况取负值. 对于图 9-12 的网络

$$V_1 = +V_a \quad V_2 = 0 \quad V_3 = -V_b$$

有时会方便地选择一个合适的回路组, 每个回路组内部包含一个或多个网孔, 来代替使用平面网络的网孔或“窗口”. 这样就很容易看出两个回路电流可以在一个阻抗中有相同的方向, 而在另一个阻抗中方向相反. 尽管如此, 上面关于写出  $Z$  矩阵和  $V$  列的规则已经公式化, 对于网孔法和回路法都是适用的. 当然, 这些规则同 4.3 节中那些  $R$  矩阵和  $V$  列的公式是相同的.

**例 9.6** 设阻抗  $Z_B$  两端有一相量电压为待求量, 其极性如图 9-13 所示. 如图 9-13 所示选择网孔, 求得  $I_1$  和  $I_2$ , 然后求得电压为  $V_B = (I_2 - I_1)Z_B$ . 图 9-13 中, 选择了三个回路 (其中两个是网孔), 使得仅有  $I_1$  流过  $Z_B$ . 进一步选择的  $I_1$  方向, 使  $V_B = I_1 Z_B$ . 建立矩阵方程:

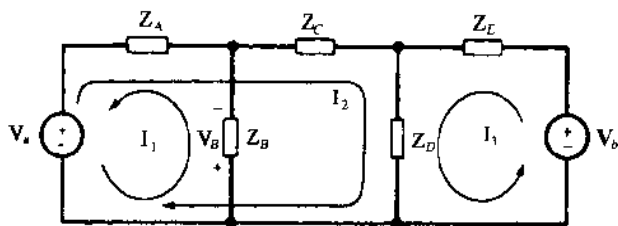


图 9-13

$$\begin{bmatrix} Z_A + Z_B & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ 0 & Z_D & Z_D + Z_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_a \\ V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

由此可得

$$V_B = Z_B I_1 = \frac{Z_B}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} -V_a & -Z_A & 0 \\ V_a & Z_A + Z_B + Z_C & Z_D \\ V_b & Z_D & Z_D + Z_E \end{vmatrix}$$

其中  $\Delta_Z$  是  $Z$  矩阵的行列式。

### 输入和转移阻抗

输入电阻(4.5节)和转移电阻(4.6节)的概念在频率域中有准确的对应关系.图 9-14 所示的单电源网络,输入阻抗是:

$$Z_{in,r} \equiv \frac{V_r}{I_r} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rr}}$$

其中  $\Delta_{rr}$  是  $\Delta_Z$  中  $Z_{rr}$  的余因子式;网孔(或回路) $r$  与网孔(或回路) $s$  之间的转移阻抗是

$$Z_{tra,rs} \equiv \frac{V_r}{I_s} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}}$$

其中  $\Delta_{rs}$  是  $\Delta_Z$  中  $Z_{rs}$  的余因子式。

和以前一样,对于一个有任意  $n$  个网孔或  $n$  个回路的网络,叠加原理可以表示为

$$I_k = \frac{V_1}{Z_{tra,1k}} + \cdots + \frac{V_{k-1}}{Z_{tra,(k-1)k}} + \frac{V_k}{Z_{in,k}} + \frac{V_{k+1}}{Z_{tra,(k+1)k}} + \cdots + \frac{V_n}{Z_{tra,nk}}$$

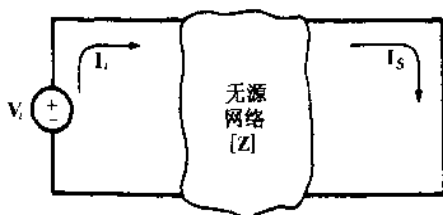


图 9-14

## 9.7 节点电压分析法

这个方法同 4.4 中讲述的一样,只是用导纳代替了相应的电阻.一个有  $n$  个主节点的频率域的网络,需要有  $n-1$  个节点电压方程,有一个节点作为参考节点.这样对  $n=4$ , 矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

其中  $V_1, V_2$  和  $V_3$  是未知量,分别是主节点 1,2,3 对参考节点主节点 4 的电压。

$Y_{11}$  是节点 1 的自导纳,它是连接到节点 1 的所有导纳的总和.同样,  $Y_{22}$  和  $Y_{33}$  分别为节点 2 和节点 3 的自导纳。

$Y_{12}$  是节点 1 和节点 2 之间的耦合导纳,它是连接到节点 1 和节点 2 的所有导纳之和的负值.有  $Y_{12} = Y_{21}$ . 同样,其他耦合导纳为  $Y_{13} = Y_{31}, Y_{23} = Y_{32}$ . 因此,  $Y$  矩阵是对称的。

在方程右边,  $I$  列可像 4.4 节中那样构成:

$$I_k \equiv \sum (\text{流入节点 } k \text{ 的电流}) (k = 1, 2, 3)$$

流出节点  $k$  的电流作为负的计算。

## 输入和转移电导

节点分析法的矩阵方程式为

$$[\mathbf{Y}][\mathbf{V}] = [\mathbf{I}]$$

与网孔电流分析法的矩阵方程式在形式上相同.

$$[\mathbf{Z}][\mathbf{I}] = [\mathbf{V}]$$

所以,至少在理论上,输入和转移导纳可以仿照输入和转移阻抗那样来定义:

$$\mathbf{Y}_{in,r} \equiv \frac{\mathbf{I}_r}{\mathbf{V}_r} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rr}}$$

$$\mathbf{Y}_{ts,rs} \equiv \frac{\mathbf{I}_r}{\mathbf{V}_s} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rs}}$$

其中,  $\Delta_{rr}$  和  $\Delta_{rs}$  分别是  $\Delta_Y$  中  $\mathbf{Y}_{rr}$  和  $\mathbf{Y}_{rs}$  的余因子式. 实际上这些定义是很少用的. 然而, 在为叠加原理提供表达式方面是有价值的

$$\mathbf{V}_k = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{tra,1k}} + \cdots + \frac{\mathbf{I}_{k-1}}{\mathbf{Y}_{tra,(k-1)k}} + \frac{\mathbf{I}_k}{\mathbf{Y}_{in,k}} + \frac{\mathbf{I}_{k+1}}{\mathbf{Y}_{tra,(k+1)k}} + \cdots + \frac{\mathbf{I}_{n-1}}{\mathbf{Y}_{tra,(n-1)k}}$$

$k=1, 2, \cdots, n-1$ . 总之, 任一主节点电压(相对于参考节点), 都可以用各种驱动电流在这个节点产生的电压之和求得, 而这些电流同一时刻只有一个起作用.

## 9.8 戴维南和诺顿定理

详细的内容已在第4.9节给出, 只是将开路电压  $V'$ , 短路电流  $I'$  和等效电阻  $R'$  用开路相量电压  $\mathbf{V}'$ , 短路相量电流  $\mathbf{I}'$  和等效阻抗  $\mathbf{Z}'$  替代. 见图9-15.

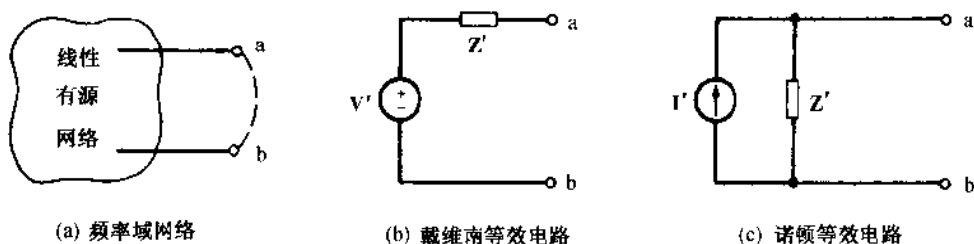


图 9-15

## 习题及解答

9.1 一个 120 mH 的电感, 其电流为  $i = 5.0 \cos 2000t$  (A), 求电压  $v_L$ .

解 由表 9-1,  $v_L = \omega L I \cos(\omega t + 90^\circ) = 100 \cos(2000t + 90^\circ)$  (V). 因为是正弦函数,

所以  $v_L = 100 \sin(2000t + 180^\circ) = -100 \sin 2000t$  (V)

9.2 一个串联电路,  $R = 10$ ,  $L = 20$  mH, 电流  $i = 2.0 \sin 500t$  (A). 求总电压  $v$  和  $i$  滞后  $v$  的角度.

解 用例 9-1 的方法,

$$\theta = \arctan \frac{500(20 \times 10^{-3})}{10} = 45^\circ$$

$$v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \theta) = 28.3 \sin(500t + 45^\circ)$$
 (V)

可见  $i$  滞后  $v$   $45^\circ$ .

9.3 求一个串联电路中的两个元件, 给定电流和总电压为:

解  $i = 10 \cos(5000t - 23.13^\circ)$  (A)  $v = 50 \cos(5000t + 30^\circ)$  (V)

因为  $i$  滞后  $v(53.13^\circ)$ , 所以元件为  $R$  和  $L$ .  $V_{\max}$  与  $I_{\max}$  之比为  $50/10$ . 因此

$$\frac{50}{10} = \sqrt{R^2 + (5000L)^2} \quad \text{及} \quad \tan 53.13^\circ = 1.33 = \frac{5000L}{R}$$

解得  $R = 3.0\Omega$ ,  $L = 0.8\text{mH}$ .

- 9.4 一串联电路,  $R = 2.0\Omega$ ,  $C = 200\text{pF}$ , 施加一频率为  $99.47\text{MHz}$  的正弦电压. 如果电容两端最大电压为  $24\text{V}$ , 则串联电路电压的最大值是多少?

解 由

$$\omega = 2\pi f = 6.25 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

由表 9-1 可得

$$I_{\max} = \omega C V_{\max} = 3.0\text{A}$$

然后用例 9-2 方法

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} = \sqrt{(6)^2 + (24)^2} = 24.74\text{V}$$

- 9.5 一个串联电路中,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 30\text{mH}$ , 电流滞后电源电压  $80^\circ$ . 确定电源频率和阻抗  $Z$ .

解 由图 9-16 的阻抗图可得

$$5 + jX_L = Z \angle 80^\circ \quad X_L = 5 \tan 80^\circ = 28.4\Omega$$

则  $28.4 = \omega(30 \times 10^{-3})$ , 所以  $\omega = 945.2 \text{ rad/s}$  及  $f = 150.4\text{Hz}$ .

$$Z = 5 + j28.4\Omega$$

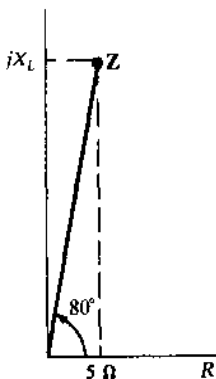


图 9-16

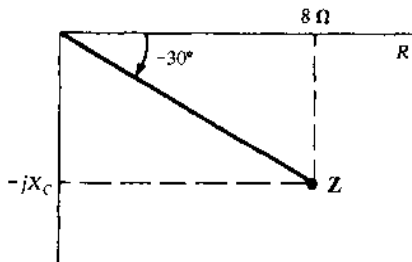


图 9-17

- 9.6 在一串联电路中,  $R = 8\Omega$ ,  $C = 30\mu\text{F}$ , 在什么频率下使电流超前电压  $30^\circ$ ?

解 由图 9-17 的阻抗图可得

$$8 - jX_C = Z \angle -30^\circ \quad -X_C = 8 \tan(-30^\circ) = -4.62\Omega$$

则

$$4.62 = \frac{1}{2\pi f(30 \times 10^{-6})} \quad \text{或} \quad f = 1149 \text{ Hz}$$

- 9.7 一串联  $RC$  电路,  $R = 10\Omega$ , 在  $f_1 = 500\text{Hz}$  时阻抗角为  $-45^\circ$ . 求以下两种情况下的频率  
(a) 阻抗的幅值是  $f_1$  时的两倍, (b) 阻抗的幅值是  $f_1$  时的  $1/2$ .

解 根据  $10 - jX_C = Z_1 \angle 45^\circ$ ,  $X_C = 10\Omega$  和  $Z_1 = 14.14\Omega$ .

(a) 阻抗幅值变为原来的 2 倍

$$10 - jX_C = 28.28 \angle \theta^\circ \quad X_C = \sqrt{(28.28)^2 - (10)^2} = 26.45\Omega$$

由于  $X_C$  是频率的反比, 所以

$$\frac{10}{26.45} = \frac{f_2}{500} \quad \text{或} \quad f_2 = 189 \text{ Hz}$$

(b) 幅值  $Z_2 = 7.07\Omega$  是不可能的, 最小的幅值只可能是  $Z = R = 10\Omega$ .

- 9.8 含有两个元件的串联电路, 电压  $V = 240 \angle 0^\circ \text{V}$ , 电流  $I = 50 \angle -60^\circ \text{A}$ . 求当电阻减为原来的 (a) 30%; (b) 60% 时, 电流的大小?



解 因为

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{240 \angle 0^\circ}{50 \angle -60^\circ} = 4.8 \angle 60^\circ = 2.40 + j 4.16 \Omega$$

$$(a) \quad 30\% \times 2.40 = 0.72 \quad Z_1 = 0.72 + j 4.16 = 4.22 \angle 80.2^\circ \Omega$$

$$I_1 = \frac{240 \angle 0^\circ}{4.22 \angle 80.2^\circ} = 56.8 \angle -80.2^\circ \text{ A}$$

$$(b) \quad 60\% \times 2.40 = 1.44 \quad Z_2 = 1.44 + j 4.16 = 4.40 \angle 70.9^\circ \Omega$$

$$I_2 = \frac{240 \angle 0^\circ}{4.40 \angle 70.9^\circ} = 54.5 \angle -70.9^\circ \text{ A}$$

9.9 电路如图 9-18 所示, 求  $Z_{eq}$  并计算  $I$ .

解 因为阻抗串联,

$$Z_{eq} = 10 \angle 0^\circ + 4.47 \angle 63.4^\circ = 12.0 + j 4.0 = 12.65 \angle 18.43^\circ \Omega$$

所以

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{12.65 \angle 18.43^\circ} = 7.91 \angle -18.43^\circ \text{ A}$$

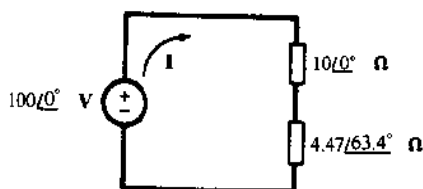


图 9-18

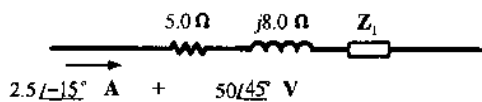


图 9-19

9.10 求图 9-19 电路中的阻抗  $Z_1$ .

解 因为

$$Z = \frac{V}{I} = 20 \angle 60^\circ = 10.0 + j 17.3 \Omega$$

因为是阻抗串联, 所以

$$5.0 + j 8.0 + Z_1 = 10.0 + j 17.3 \quad \text{或} \quad Z_1 = 5.0 + j 9.3 \Omega$$

9.11 图 9-20 所示的具有 4 个支路的电路, 求等效阻抗  $Z_{eq}$  和等效导纳  $Y_{eq}$ .

解 使用导纳

$$Y_1 = \frac{1}{j5} = -j 0.20 \text{ S} \quad Y_3 = \frac{1}{15} = 0.067 \text{ S}$$

$$Y_2 = \frac{1}{5 + j 8.66} = 0.05 - j 0.087 \text{ S} \quad Y_4 = \frac{1}{-j 10} = j 0.10 \text{ S}$$

则

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0.117 - j 0.187 = 0.221 \angle -58.0^\circ \text{ S}$$

及

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = 4.53 \angle 58.0^\circ \Omega$$

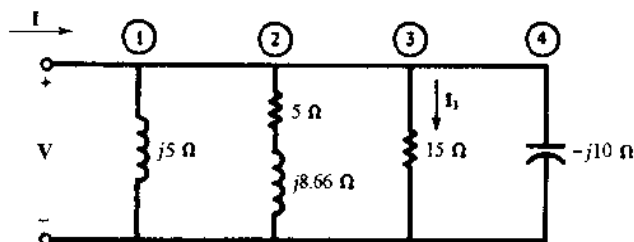


图 9-20

- 9.12 流入图 9-20 的电路中的总电流  $I$  为  $33.0 \angle -13.0^\circ \text{ A}$ . 求支路电流  $I_3$  和电压  $V$ .

解

$$V = IZ_{\text{eq}} = (33.0 \angle -13.0^\circ)(4.53 \angle 58.0^\circ) = 149.5 \angle 45.0^\circ \text{ V}$$

$$I_3 = VY_3 = 149.5 \angle 45.0^\circ \left( \frac{1}{15} \angle 0^\circ \right) = 9.97 \angle 45.0^\circ \text{ A}$$

- 9.13 图 9-21 所示三支路网络中, 如果  $I = 31.5 \angle 24.0^\circ \text{ A}$ , 电压  $V = 50.0 \angle 60.0^\circ \text{ V}$ , 求阻抗  $Z_1$ .

解

$$Y = \frac{I}{V} = 0.630 \angle -36.0^\circ = 0.510 - j0.370 \text{ S}$$

$$0.510 - j0.370 = Y_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{4.0 + j3.0}$$

所以  $Y_1 = 0.354 \angle -45^\circ \text{ S}$  及  $Z_1 = 2.0 + j2.0 \Omega$

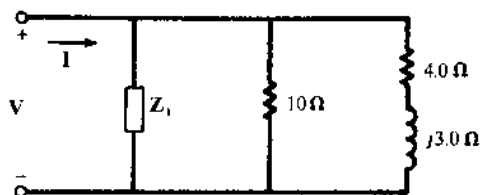


图 9-21

- 9.14 通过串联一个已知阻值的电阻, 并测出线圈电压  $V_x$ , 电阻电压  $V_1$  和总电压  $V_T$  的方法来求出一个线圈的常数电阻  $R$  和电感  $L$  (如图 9-22). 频率必须已知, 但是电压的相位角是未知的. 给定  $f = 60 \text{ Hz}$ ,  $V_1 = 20 \text{ V}$ ,  $V_x = 22.4 \text{ V}$ ,  $V_T = 36.0 \text{ V}$ , 求  $R$  和  $L$ .

解 测得的电压是有效值; 但是对所关心的阻抗计算, 无论是用有效值还是峰值是没有区别的.

(有效值) 电流是  $I = V_1/10 = 2.0 \text{ A}$ . 则

$$Z_x = \frac{22.4}{2.0} = 11.2 \Omega \quad Z_{\text{eq}} = \frac{36.0}{2.0} = 18.0 \Omega$$

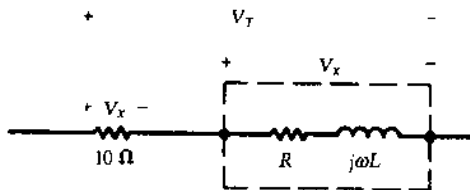


图 9-22

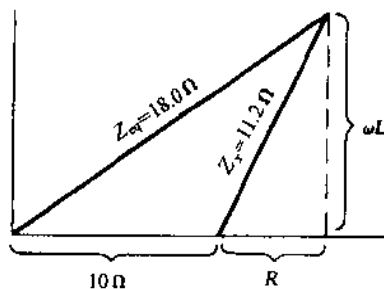


图 9-23

由图 9-23 的阻抗图得

$$(18.0)^2 = (10 + R)^2 + (\omega L)^2$$

$$(11.2)^2 = R^2 + (\omega L)^2$$

其中  $\omega = 2\pi 60 = 377 \text{ rad/s}$ . 求解联立方程

$$R = 4.92 \Omega \quad L = 26.7 \text{ mH}$$

- 9.15 图 9-24 所示的并联电路中, 各电流有效值分别为  $I_x = 18.0 \text{ A}$ ,  $I_1 = 15.0 \text{ A}$ ,  $I_T = 30.0 \text{ A}$ . 求  $R$  和  $X_L$ .

解 本题可用类似于 9.14 题的方法求解, 但使用导纳图.

(有效值)电压为  $V = I_1(4.0) = 60.0\text{V}$ , 则

$$Y_x = \frac{I_x}{V} = 0.300\text{S} \quad Y_{eq} = \frac{I_T}{V} = 0.500\text{S} \quad Y_1 = \frac{1}{4.0} = 0.250\text{S}$$

由图 9-25 的导纳图得

$$(0.500)^2 = (0.250 + G)^2 + B_L^2$$

$$(0.300)^2 = G^2 + B_L^2$$

由方程得到  $G = 0.195\text{S}$ ,  $B_L = 0.228\text{S}$ . 则

$$R = \frac{1}{G} = 5.13\ \Omega \quad jX_L = \frac{1}{-jB_L} = j4.39\ \Omega$$

即  $X_L = 4.39\ \Omega$

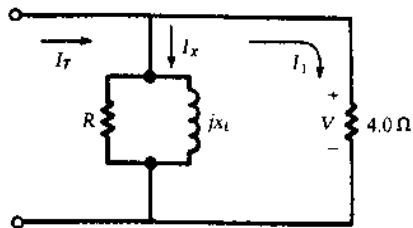


图 9-24

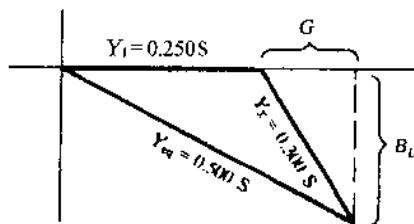


图 9-25

9.16 求图 9-26 所示两支路并联电路中的相量电压  $V_{AB}$ .

解 用电流分流方法, 可得  $I_1 = 4.64\angle 120.0^\circ\text{A}$  和  $I_2 = 17.4\angle 30.1^\circ\text{A}$ . 通路 AXB 或 AYC 都可以考虑. 选择前者

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_{AX} + V_{XB} = I_1(20) - I_2(j6) \\ &= 92.8\angle 120.1^\circ + 104.4\angle -59.9^\circ = 11.6\angle -59.9^\circ\text{V} \end{aligned}$$

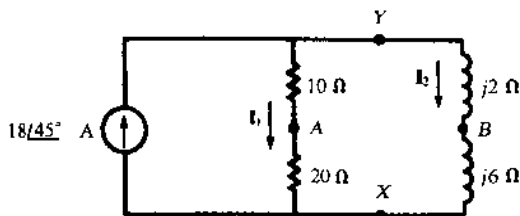


图 9-26

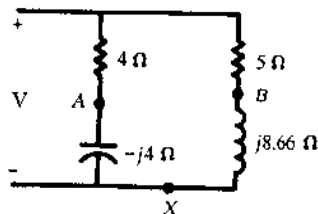


图 9-27

9.17 在图 9-27 所示并联电路中,  $V_{AB} = 48.3\angle 30^\circ\text{V}$ . 求电源电压  $V$

解 根据两条支路的电压分压得

$$V_{AX} = \frac{-j4}{4-j4}V = \frac{1}{1+j}V \quad V_{BX} = \frac{j8.66}{5+j8.66}V$$

所以

$$V_{AB} = V_{AX} - V_{BX} = \left( \frac{1}{1+j} - \frac{j8.66}{5+j8.66} \right) V = \frac{1}{-0.268+j1}V$$

或

$$V = (-0.268 + j1)V_{AB} = (1.035\angle 105^\circ)(48.3\angle 30^\circ) = 50.0\angle 135^\circ\text{V}$$

9.18 用网孔电流法求图 9-28 所示网络的电压  $V_x$ .

解 网孔电流的选择如图中所示,  $I_3$  通过  $10\ \Omega$  电阻使  $V_x = I_3(10\text{V})$ . 通过观察得出矩阵方程式为

$$\begin{bmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -(2-j2) \\ 5 & -(2-j2) & 17-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 5\angle 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

用行列式求解

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 10\angle 0^\circ \\ j5 & 12+j3 & 5\angle 30^\circ \\ 5 & -2+j2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -2+j2 \\ 5 & -2+j2 & 17-j2 \end{vmatrix}} = \frac{667.96\angle -169.09^\circ}{1534.5\angle 25.06^\circ} = 0.435\angle -194.15^\circ \text{ A}$$

$$V_x = I_3(10) = 4.35\angle -194.15^\circ \text{ V}$$

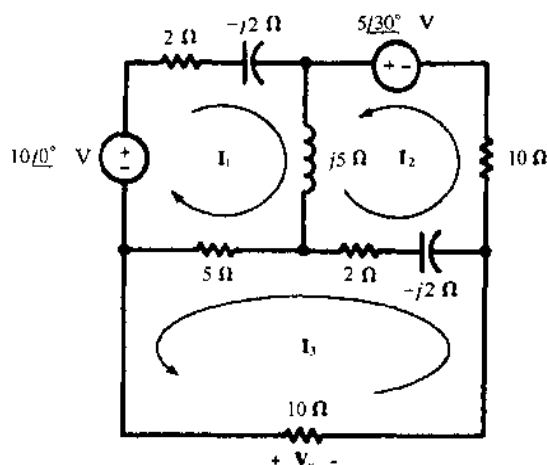


图 9-28

9.19 在图 9-29 所示网络中, 请确定使通过  $2 + j3 \Omega$  阻抗的电流为零的电压  $V$ 。

解 选定的网孔电流如图所示

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} 5+j5 & 30\angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & V & 10 \end{vmatrix} = 0$$

由第二列的余子式展开分子行列式得

$$-(30\angle 0^\circ) \begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - V \begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{所以} \quad V = 35.4\angle 45.0^\circ \text{ V}$$

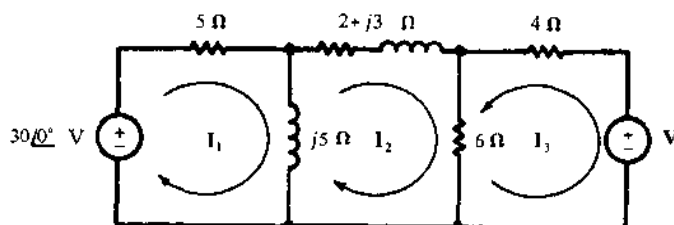


图 9-29

9.20 用节点电压分析法求解 9.19 题。

解 电路重画于图 9-30, 将  $2 + j3 \Omega$  支路的一端作为参考节点。由 9.7 节的公式矩阵方程式为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2+j3} & -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) & \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30\angle 0^\circ}{5} \\ -\frac{30\angle 0^\circ}{5} - \frac{\mathbf{V}}{4} \end{bmatrix}$$

由于节点电压  $\mathbf{V}_1$  为零, 求  $\mathbf{V}_1$  的解中的分子行列式必定为零。

$$\mathbf{N}_1 = \begin{vmatrix} \frac{30\angle 0^\circ}{5} & -0.200 + j0.200 \\ -\frac{30\angle 0^\circ}{5} - \frac{\mathbf{V}}{4} & 0.617 - j0.200 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{由此得: } \mathbf{V} = 35.4\angle 45^\circ \text{ V}$$

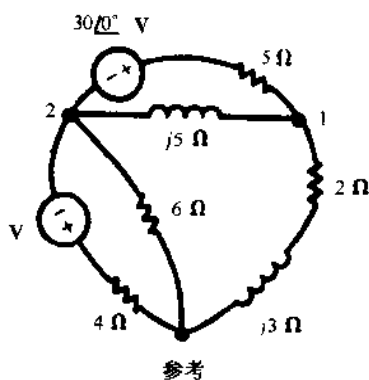


图 9-30

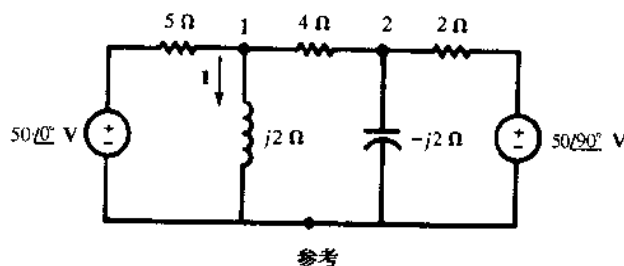


图 9-31

### 9.21 用节点电压分析法求图 9-31 网络中的电流 $\mathbf{I}$ 。

解 网络中有 3 个节点, 选择参考节点和节点 1 使节点 1 的电压就是电抗  $j2\Omega$  两端的电压。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50\angle 0^\circ}{5} \\ \frac{50\angle 90^\circ}{2} \end{bmatrix}$$

解得

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.250 \\ j25 & 0.750 + j0.500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.450 - j0.500 & -0.250 \\ -0.250 & 0.750 + j0.500 \end{vmatrix}} = \frac{13.52\angle 56.31^\circ}{0.546\angle -15.94^\circ} = 24.76\angle 72.25^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{I} = \frac{24.76\angle 72.25^\circ}{2\angle 90^\circ} = 12.38\angle -17.75^\circ \text{ A}$$

### 9.22 求图 9-32 所示网络中 $ab$ 两端的输入阻抗。

解 选定网孔电流  $\mathbf{I}$  如图中所示

$$\mathbf{Z}_{\text{in},1} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j5 & -5 \\ -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315.5\angle 16.19^\circ}{45.2\angle 24.86^\circ} = 6.98\angle (-8.67^\circ)\Omega$$

### 9.23 图 9-32 所示网络, 设 $\mathbf{V} = 10\angle 30^\circ \text{ V}$ , 用求得的转移阻抗求电感中电流 $\mathbf{I}_x$ 。

解 先求变换阻抗

$$\mathbf{Z}_{\text{tr},12} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{12}} = \frac{315.5\angle 16.19^\circ}{\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}} = 14.45\angle 32.14^\circ\Omega$$

所以

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{\text{tr},12}} = \frac{10\angle 30^\circ}{14.45\angle 32.14^\circ} = 0.692\angle (-2.14^\circ)\text{ A}$$

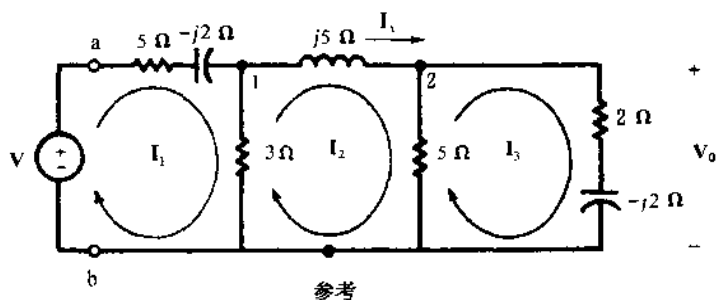


图 9-32

9.24 图 9-32 网络中, 求使  $V_0 = 5.0 \angle 0^\circ \text{V}$  的电源电压  $V$ .

解 通常由流过阻抗  $2 - j2 \Omega$  的电流来计算转移阻抗, 这样很容易求出  $V_0$ .

$$Z_{\text{trn}, 13} = \frac{\Delta Z}{\Delta_{13}} = \frac{315.5 \angle 16.19^\circ}{15 \angle 0^\circ} = 21.0 \angle 16.19^\circ \Omega$$

$$V_0 = I_3(2 - j2) = \frac{V}{Z_{\text{trn}, 13}}(2 - j2) = V(0.135 \angle -61.19^\circ)$$

因此, 若  $V_0 = 5.0 \angle 0^\circ \text{V}$ ,

则:

$$V = \frac{5.0 \angle 0^\circ}{0.135 \angle -61.19^\circ} = 37.0 \angle 61.19^\circ \text{V}$$

另一种方法

还可以用节点电压分析法. 对于图 9-32 所选择的节点  $V_0$  是节点电压  $V_2$ ,

$$V_0 = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5} & \frac{V}{5-j2} \\ -\frac{1}{j5} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5} & -\frac{1}{j5} \\ -\frac{1}{j5} & \frac{1}{j5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2-j2} \end{vmatrix}} = V(0.134 \angle -61.15^\circ)$$

对于  $V_0 = 5.0 \angle 0^\circ \text{V}$ , 则  $V = 37.3 \angle 61.15^\circ \text{V}$ , 与前面答案不一致(译者注: 原文为一致), 这是因为前面的答案中有舍入误差.

9.25 对图 9-33 所示网络, 求输入导纳并用其计算节点电压  $V_1$

解

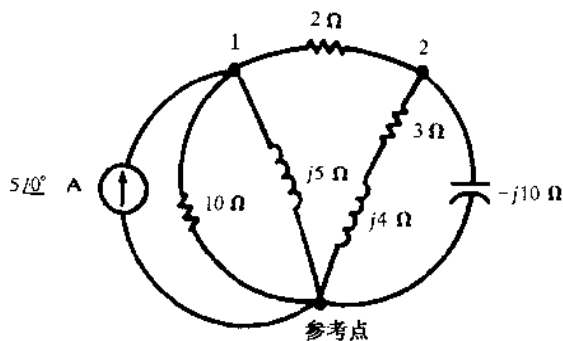


图 9-33

$$Y_{m,1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10} \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10}} = 0.311 \angle -49.97^\circ \text{ S}$$

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{m,1}} = \frac{5.0 \angle 0^\circ}{0.311 \angle -49.97^\circ} = 16.1 \angle 49.97^\circ \text{ V}$$

9.26 计算 9.25 题网络的转移导纳  $Y_{tra,12}$  并用其计算节点电压  $V_2$ 。

解

$$Y_{tra,12} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0.194 \angle -55.49^\circ}{-(-0.50)} = 0.388 \angle -55.49^\circ \text{ S}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{tra,12}} = 12.9 \angle 55.49^\circ \text{ V}$$

9.27 在 ab 端点用戴维南等效电路替换图 9-34(a) 所示有源网络。

解

$$Z' = j5 + \frac{5(3+j4)}{5+3+j4} = 2.50 + j6.25 \Omega$$

ab 两端的开路电压  $V'$  就是阻抗  $3+j4 \Omega$  两端的电压；

$$V' = \left( \frac{10 \angle 0^\circ}{8+j4} \right) (3+j4) = 5.59 \angle 26.56^\circ \text{ V}$$

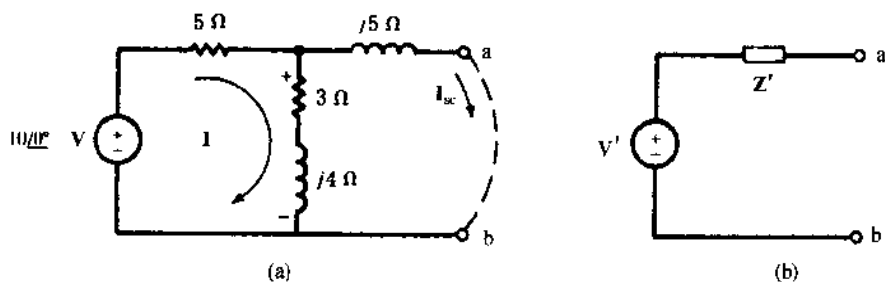


图 9-34

9.28 求题 9.27 网络的诺顿等效电路(图 9-35)。

解 ab 端的电流  $I_{sc}$  是诺顿电流  $I'$  经过电流分流；

$$I' = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 + \frac{j5(3+j4)}{3+j9}} \left( \frac{3+j4}{3+j9} \right) = 0.830 \angle -41.63^\circ \text{ A}$$

旁路阻抗  $Z'$  同题 9.27 中的  $Z$  一样,  $Z' = 2.50 + j6.25 \Omega$

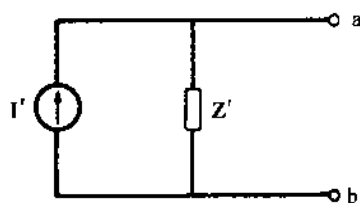


图 9-35

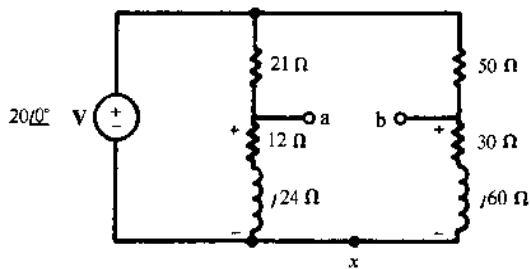


图 9-36

9.29 求图 9-36 所示桥式电路的戴维南等效电路, 并求 ab 两端电压  $V'$ 。

解 在每个支路电压分压；

$$V_{ax} = \frac{12 + j24}{33 + j24}(20\angle 0^\circ) \quad V_{bx} = \frac{30 + j60}{80 + j60}(20\angle 0^\circ)$$

因此

$$V_{ab} = V_{ax} - V_{bx} = (20\angle 0^\circ) \left( \frac{12 + j24}{33 + j24} - \frac{30 + j60}{80 + j60} \right) = 0.326\angle 169.4^\circ \text{ V} = V'$$

将电压源短路,从 ab 两端看去,电路就是两个并联电路串联在一起,这样

$$Z' = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47.35\angle 26.81^\circ \Omega$$

9.30 求图 9-37 所示网络中 ab 端点的诺顿等效电路和戴维南等效电路。

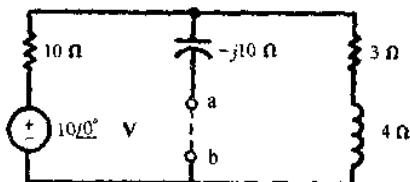


图 9-37

解 由电流分流

$$I_x = I' = \left[ \frac{10\angle 0^\circ}{10 + \frac{(-j10)(3 + j4)}{3 - j6}} \right] \left( \frac{3 + j4}{3 - j6} \right) = 0.439\angle 105.26^\circ \text{ A}$$

在开路中用电压分压

$$V_{ab} = V' = \frac{3 + j4}{13 + j4}(10\angle 0^\circ) = 3.68\angle 36.03^\circ \text{ V}$$

则

$$Z' = \frac{V'}{I'} = \frac{3.68\angle 36.03^\circ}{0.439\angle 105.26^\circ} = 8.37\angle -69.23^\circ \Omega$$

见图 9-38。

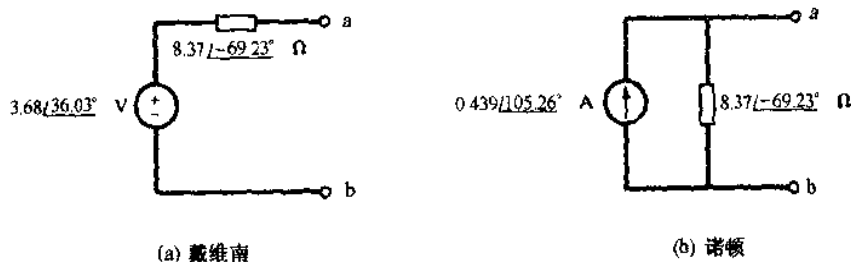


图 9-38

### 补充习题

9.31 两个串联的电路元件,电流和总电压为

$$i = 13.42\sin(500t - 53.4^\circ) \text{ (A)} \quad v = 150\sin(500t + 10^\circ) \text{ (V)}$$

求这两个元件。

答案:  $R = 5\Omega$ ,  $L = 20\text{mH}$

9.32 两个串联的电路元件,电流和总电压为

$$i = 4.0\cos(2000t + 13.2^\circ) \text{ (A)} \quad v = 200\sin(2000t + 50.0^\circ) \text{ (V)}$$

求这两个元件。

答案:  $R = 30\Omega$ ,  $C = 12.5\mu\text{F}$

9.33 一个串联 RC 电路中,  $R = 27.5\Omega$ ,  $C = 66.7\mu\text{F}$ , 有正弦电压和电流,角频率为  $1500\text{rad/s}$ 。求电流超前电压的相位角。



答案:  $20^\circ$

- 9.34 一个  $RLC$  串联电路,  $R = 15\Omega$ ,  $L = 80\text{mH}$ ,  $C = 30\mu\text{F}$ , 有角频率为  $500\text{rad/s}$  的正弦电流. 求相位角并确定电流是超前还是滞后总电压.

答案:  $60.6^\circ$ , 超前

- 9.35 一个  $C = 35\mu\text{F}$  的电容与一确定元件并联. 求这个元件, 设电压和总电流为

$$v = 150 \sin 3000t \text{ (V)} \quad i_T = 16.5 \sin (3000t + 72.4^\circ) \text{ (A)}$$

答案:  $30.1\Omega$

- 9.36 一个两元件的串联电路,  $R = 20\Omega$ ,  $L = 20\text{mH}$ , 阻抗为  $Z = 40.0 \angle \theta^\circ \Omega$ . 求相位角和频率.

答案:  $60^\circ$ ,  $276\text{Hz}$

- 9.37 求下列在下列频率中, 串联  $RL$  电路的阻抗, 其中  $R = 25\Omega$ ,  $L = 10\text{mH}$ . (a)  $100\text{Hz}$ ; (b)  $500\text{Hz}$ ; (c)  $1000\text{Hz}$ .

答案:  $25.8 \angle 14.1^\circ$ ,  $40.1 \angle 51.5^\circ$ ,  $67.6 \angle 68.3^\circ$

- 9.38 试确定一个两元件串联电路的组成. 设施加电压为  $v = 150 \sin (5000t + 45^\circ) \text{ (V)}$ , 引起的电流为  $i = 3.0 \sin (5000t - 15^\circ) \text{ (A)}$ .

答案:  $25\Omega$ ,  $8.66\text{mH}$

- 9.39 一个  $RL$  串联电路,  $R = 10\Omega$ ,  $C = 40\mu\text{F}$ , 电源电压  $v = 500 \cos (2500t - 20^\circ) \text{ (V)}$ . 求引起的电流  $i$ .

答案:  $25\sqrt{2} \cos (2500t + 25^\circ) \text{ (A)}$

- 9.40 串联电路中 3 个阻抗为  $Z_1 = 3.0 \angle 45^\circ \Omega$ ,  $Z_2 = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega$ ,  $Z_3 = 5.0 \angle -90^\circ \Omega$ . 如果  $Z_1$  两端的电压是  $27.0 \angle -10^\circ \text{ V}$ , 求电源电压.

答案:  $126.5 \angle -24.6^\circ \text{ V}$

- 9.41 图 9-39 所示 3 个元件的串联电路. (a) 求电流  $i$ ; (b) 求每个阻抗两端的电压, 并画出表示  $V_1 + V_2 + V_3 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$  的电压相量图.

答案: (a)  $6.28 \angle -9.17^\circ \text{ A}$ ; (b) 见图 9-40

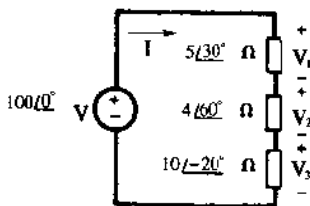


图 9-39

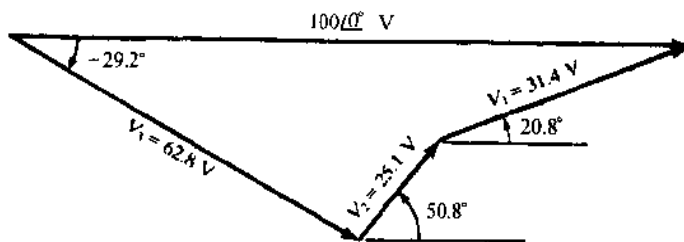


图 9-40

- 9.42 求图 9-41 所示并联电路的  $Z$ . 设  $V = 50.0 \angle 30.0^\circ \text{ V}$ ,  $I = 27.9 \angle 57.8^\circ \text{ A}$ .

答案:  $5.0 \angle -30^\circ \Omega$

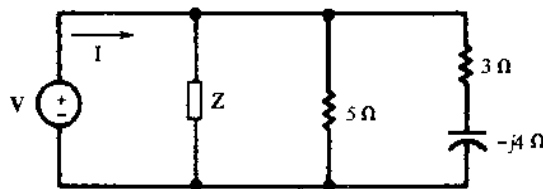


图 9-41

- 9.43 设电压  $V = 85.0 \angle 205^\circ \text{ V}$ , 引起的电流  $I = 41.2 \angle -141.0^\circ \text{ A}$ , 求相应的电导和电纳.

答案:  $0.417\text{S}$ ,  $0.117\text{S}$  (电容)

- 9.44 一个既含电阻又含电感的实际线圈可以用串联电路或并联电路表示, 如图 9-42 所示. 求用  $R_s$  和  $L_s$  表示的  $R_p$  和  $L_p$ .

答案:  $R_p = R_s + \frac{(\omega L_s)^2}{R_s}$ ,  $L_p = L_s + \frac{R_s^2}{\omega^2 L_s}$

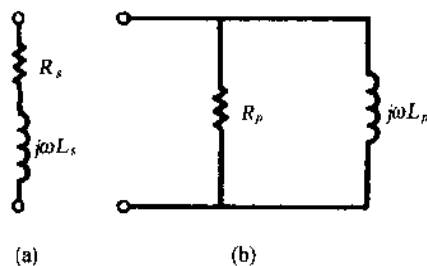


图 9-42

- 9.45 在图 9-43 网络中, 电流频率 60Hz, 已知幅值为  $I_R = 29.9\text{A}$ ,  $I_1 = 22.3\text{A}$ ,  $I_2 = 8.0\text{A}$ . 求电路中的  $R$  和  $L$ .  
答案:  $5.8\Omega$ ,  $38.5\text{mH}$

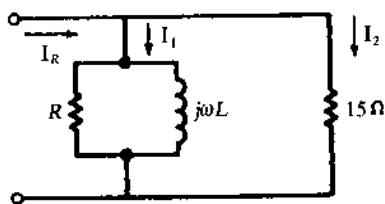


图 9-43

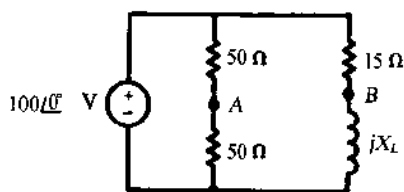


图 9-44

- 9.46 求图 9-44 所示的两支路并联网中电压  $V_{AB}$  的幅值. 设  $X_L$  为 (a)  $5\Omega$ ; (b)  $15\Omega$ ; (c)  $0\Omega$ .  
答案:  $50\text{V}$ , 无论  $X_L$  为何值
- 9.47 在图 9-45 所示网络中, 若  $V_{AB} = 36.1\angle 3.18^\circ\text{V}$ . 求电压源  $V$ .  
答案:  $75\angle -90^\circ\text{V}$

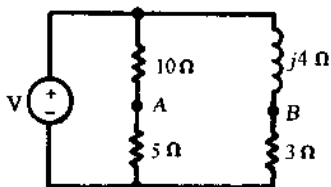


图 9-45

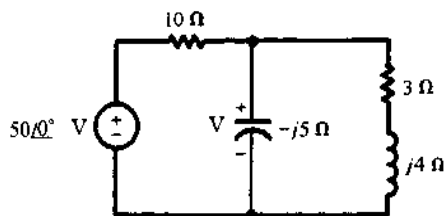


图 9-46

- 9.48 对于图 9-46 所示的网络, 选用两种不同的网孔电流, 证明每一种情况下都有  $\Delta_2 = 55.9\angle -26.57^\circ\Omega^2$ . 对每一种选择, 请计算相量电压  $V$ . 求阻抗  $3 + j4\Omega$  两端的相量电压并与  $V$  进行比较.  
答案:  $V = V_{3+j4} = 22.36\angle -10.30^\circ\text{V}$
- 9.49 对于图 9-47 所示网络, 请用网孔电流分析法求在电压源  $V_1$  和  $V_2$  单独作用下, 流过阻抗  $2 + j3\Omega$  的电流.  
答案:  $2.41\angle 6.45^\circ\text{A}$ ,  $1.36\angle 141.45^\circ\text{A}$

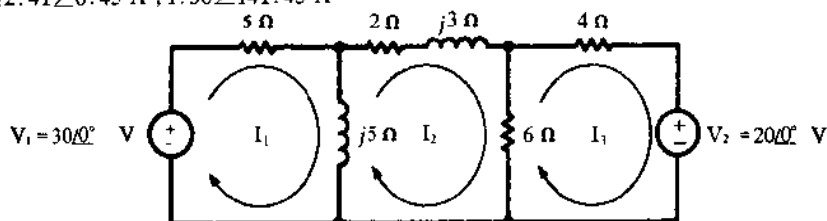


图 9-47

- 9.50 在图 9-48 所示网络中, 调节两个相等的电容  $C$  和跨接电阻  $R$ , 直到所测电流  $I_D$  为零. 设电压源的角频率为  $\omega$ . 求  $R_x$  和  $L_x$  的值.

答案:  $R_x = 1/(\omega^2 C^2 R)$   $L_x = 1/(2\omega C)$

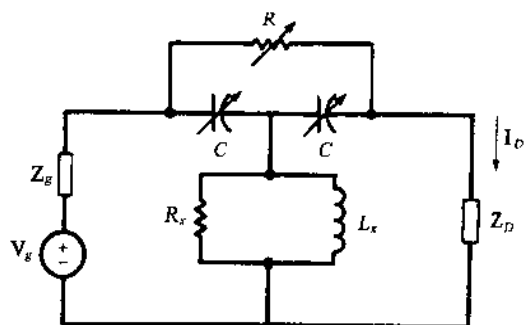


图 9-48

- 9.51 求图 9-49 所示网络中电流比  $I_1/I_3$ .

答案:  $3.3 \angle -90^\circ$

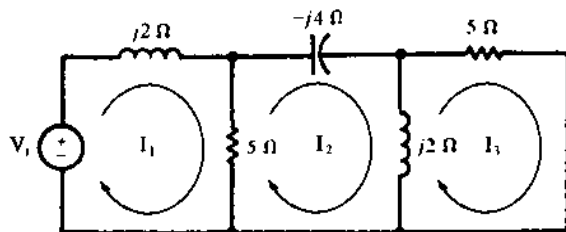


图 9-49

- 9.52 对图 9-49 所示网络, 求  $Z_{in,1}$  和  $Z_{in,13}$ . 证明  $Z_{in,1} = Z_{in,13}$ .

答案:  $1.31 \angle 21.8^\circ \Omega$ ,  $4.31 \angle -68.2^\circ \Omega$

- 9.53 在图 9-50 所示网络中, 请用节点电压分析法求电压之比  $V_1/V_2$ .

答案:  $\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = 1.61 \angle -29.8^\circ$

- 9.54 对于图 9-50 所示网络, 求驱动点输入阻抗  $Z_{in,1}$ .

答案:  $5.59 \angle 17.35^\circ \Omega$

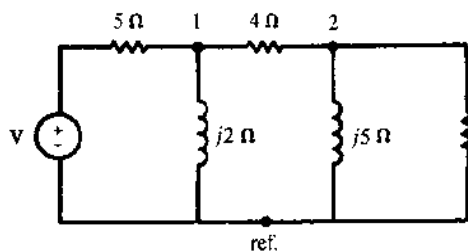


图 9-50

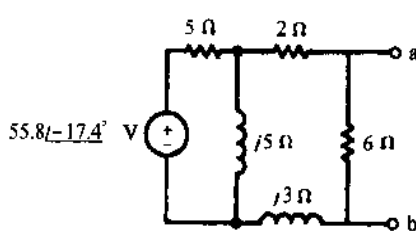


图 9-51

- 9.55 求图 9-51 所示网络中  $a, b$  两端点的戴维南和诺顿等效电路. 选择的极性使  $V' = V_{ab}$ .

答案:  $V' = 20.0 \angle 0^\circ V$ ,  $I' = 5.56 \angle -23.06^\circ A$ ,  $Z' = 3.60 \angle 23.06^\circ \Omega$

- 9.56 求图 9-52 所示网络中  $a, b$  两端点的戴维南和诺顿等效电路.

答案:  $V' = 11.5 \angle -95.8^\circ V$ ,  $I' = 1.39 \angle -80.6^\circ A$ ,  $Z' = 8.26 \angle -15.2^\circ \Omega$

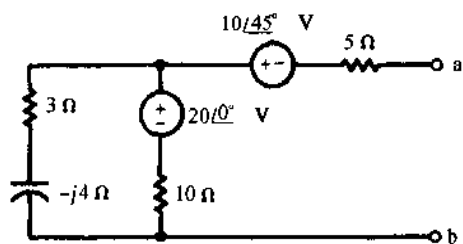


图 9-52

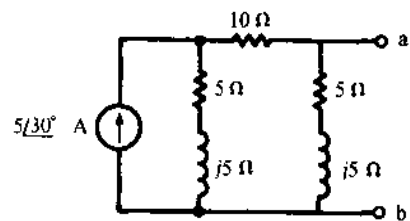


图 9-53

9.57 求图 9-53 所示网络中 a, b 两端点的戴维南和诺顿等效电路。

答案:  $V' = 11.18 \angle 93.43^\circ \text{ V}$ ,  $I' = 2.24 \angle 56.56^\circ \text{ A}$ ,  $Z' = 5.0 \angle 36.87^\circ \Omega$

## 第10章 交流功率

### 10.1 时间域中的功率

进入两端口电路  $N$  (图 10-1) 的瞬时功率定义为

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1)$$

此处,  $v(t)$  和  $i(t)$  分别是端口电压和电流. 如果  $p$  是正的, 说明电路消耗能量, 如果  $p$  是负的, 说明能量是从电路返回电源的.

本章中, 我们将重点讨论线性  $RLC$  电路的正弦稳态的周期性电流和电压. 因为电感或电容贮藏能量的能力是有限的, 如不向外电路回送能量, 这些无源的元件无法继续接收能量. 因此, 在稳态下, 每个周期中, 由电感或电容接受的所有能量都要被返回. 然而, 电阻吸收的能量一般都以热、机械、化学或磁的形式消耗掉了. 因此, 在一个周期中流向一个无源电路的能量是非负的.

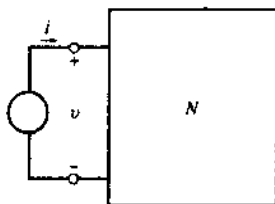


图 10-1

**例 10.1** 图 10-2(a) 是  $1\text{k}\Omega$  电阻中电流的波形图. 求解并画出瞬时功率  $p(t)$  的曲线.

由  $v = Ri$  得:  $p(t) = vi = Ri^2 = 1000 \times 10^{-6} = 10^{-3}\text{W} = 1\text{mW}$ . 见图 10-2(b).

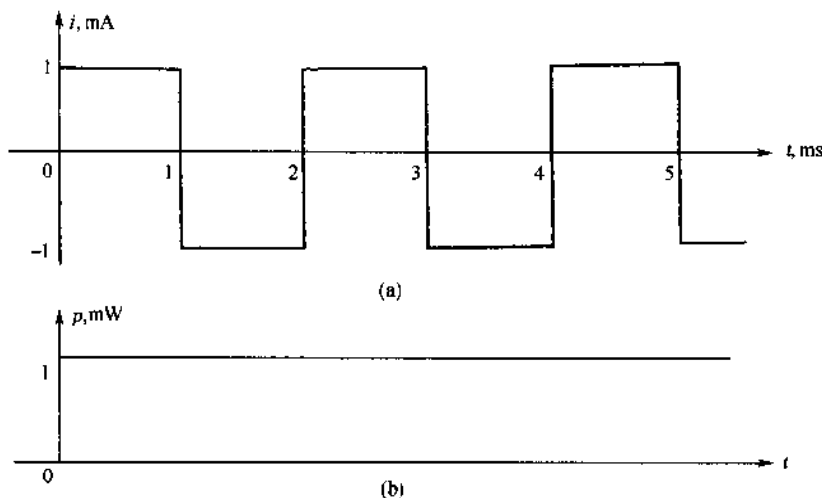


图 10-2

**例 10.2** 例 10.1 中的电流流过一个  $0.5\mu\text{F}$  的电容. 设  $V_c(0) = 0$ , 求进入电容的功率  $p(t)$  和存储的能量  $w(t)$ , 并画出二者的曲线.

图 10-2(a) 表示电容中的电流是一周期为  $T = 2\text{ms}$  的周期性函数. 在一个周期中电流为

$$i = \begin{cases} 1\text{mA} & (0 < t < 1\text{ms}) \\ -1\text{mA} & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

电容两端电压也是具有相同周期  $T$  的周期函数 (图 10-3(a)). 在一周期内的电压是

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \begin{cases} 2000t(\text{V}) & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 4 - 2000t(\text{V}) & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

所以, 进入电容的功率和存储的能量 (均是周期为  $T$  的周期性函数) 为

$$p(t) = vi = \begin{cases} 2000t(\text{mW}) & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 2000t - 4(\text{mW}) & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases} \quad [\text{图 } 10-3(\text{b})]$$

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = \begin{cases} t^2(\text{J}) & (0 < t < 1\text{ms}) \\ t^2 + 4 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-3}t(\text{J}) & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases} \quad [\text{图 } 10-3(\text{c})]$$

另外,  $w(t)$  也可由  $p(t)$  的积分求出. 在一周期中进入电容的功率[图 10-3(b)]正负两部分是相等的. 如图 10-3(c), 电容中存储的能量总是正的. 存储能量的最大值为  $W_{\max} = 10^{-6}\text{J} = 1\mu\text{J}$ ,  $t = 1, 3, 4 \cdots \text{ms}$ .

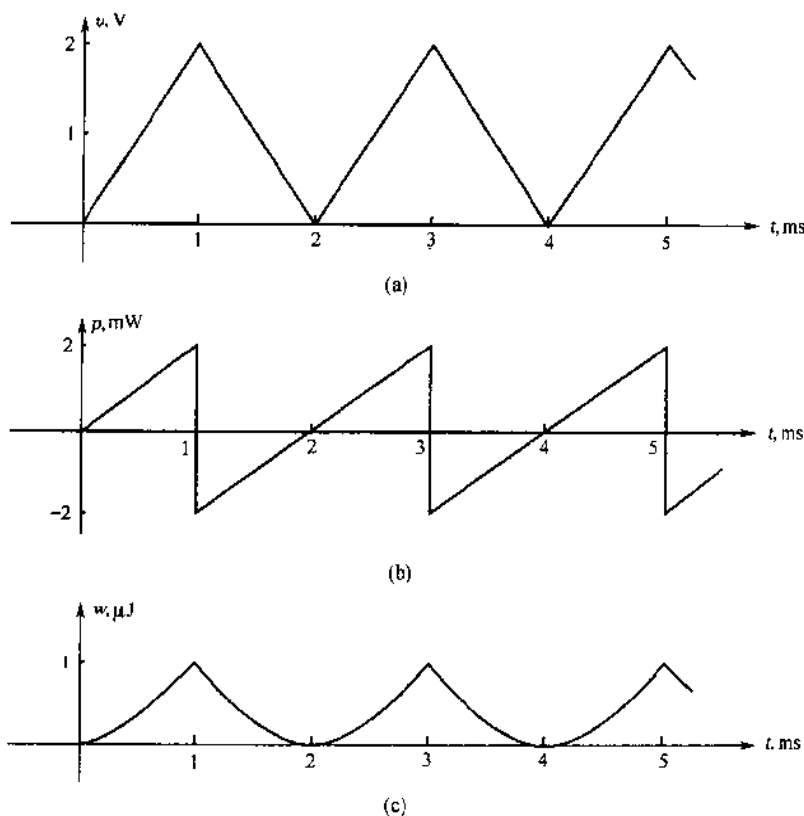


图 10-3

## 10.2 正弦稳态功率

一个正弦电压  $v = V_m \cos \omega t$  加到一个阻抗  $Z = |Z| \angle \theta$  的两端, 产生电流为  $i = I_m \cos(\omega t - \theta)$ . 在时间  $t$  时, 阻抗上消耗的功率为

$$\begin{aligned} p(t) = vi &= V_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)] \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)] \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta + V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(2\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $V_{\text{eff}} = V_m / \sqrt{2}$ ,  $I_{\text{eff}} = I_m / \sqrt{2}$ ,  $I_{\text{eff}} = V_{\text{eff}} / |Z|$ . 式(2)中的瞬时功率由正弦项  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(2\omega t - \theta)$  和常数项  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta$  组成, 其中  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta$  是平均功率  $P_{\text{avg}}$ . 图 10-4 说明了这一点. 在一个周期的一部分, 瞬时功率为正表明这时功率流入负载中. 而周期的剩余部分瞬时功率为负, 表明这时功率流出负载. 在一整个周期内净功率是非负的, 称为平均功率.

**例 10.3** 一个电压源  $v = 140 \cos \omega t$  连接到一个阻抗  $Z = 5 \angle -60^\circ$  上. 求  $p(t)$ . 引起的电流为  $i = 28 \cos(\omega t + 60^\circ)$ .

$$P(t) = vi = 140(28) \cos \omega t \cos(\omega t + 60^\circ) = 980 + 1960 \cos(2\omega t + 60^\circ)$$

瞬时功率含有一常数项 980 W 和一频率是电源频率 2 倍的正弦项.  $p$ - $t$  图与图 10-4

相似, 但  $\theta = -\pi/3$ .

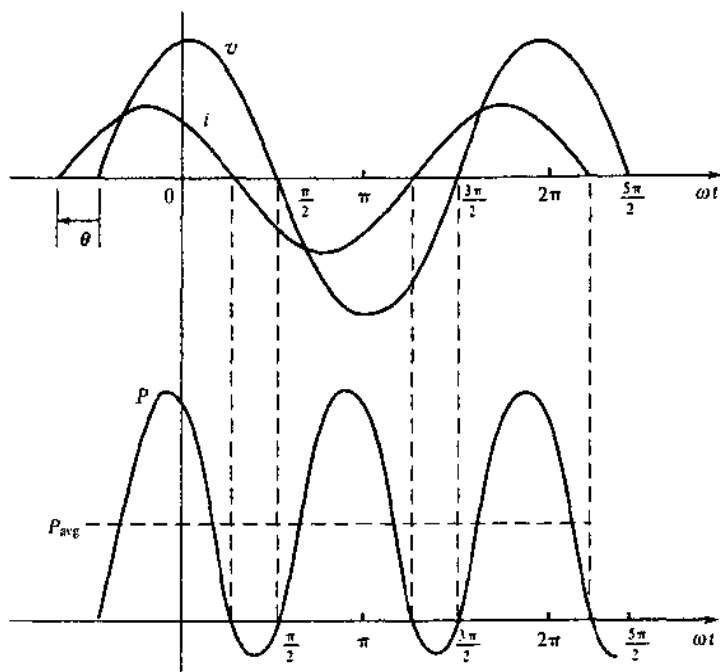


图 10-4

### 10.3 平均功率或有功功率

在一个周期内输入到一个负载的净功率或平均功率  $P_{\text{avg}} = \langle p(t) \rangle$  称为有功功率. 因为一个周期内  $\cos(2\omega t - \theta)$  的平均值为零, 所以由(2)式我们可得

$$P_{\text{avg}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta \quad (3)$$

如果  $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ , 那么  $\cos \theta = R/|Z|$ ,  $P_{\text{avg}}$  可以表示为

$$P_{\text{avg}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{R}{|Z|} \quad (4)$$

或

$$P_{\text{avg}} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{|Z|^2} R \quad (5)$$

或

$$P_{\text{avg}} = R I_{\text{eff}}^2 \quad (6)$$

平均功率是非负的. 它取决于  $V$ ,  $I$  以及它们之间的相角. 当给定  $V_{\text{eff}}$  和  $I_{\text{eff}}$ , 在  $\theta = 0$  时  $P$  有最大值. 发生在负载是纯电阻时. 对于一个纯电抗负载,  $|\theta| = 90^\circ$  及  $P_{\text{avg}} = 0$ .  $P_{\text{avg}}$  与  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  之比称为功率因数  $pf$ . 由(3)式可知, 该比值等于  $\cos \theta$ . 所以

$$pf = \frac{P_{\text{avg}}}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} \quad 0 \leq pf \leq 1 \quad (7)$$

平均功率  $P_{\text{avg}}$  的下标通常都省略不写, 本章后面的  $P$  均表示平均功率.

**例 10.4** 有一正弦电压电源  $V_{\text{eff}} = 110\text{V}$  加到阻抗  $Z = 10 + j8$  的两端, 求消耗的  $P$  及功率因数.

$$Z = 10 + j8 = 12.81 \angle 38.7^\circ$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{Z} = \frac{110}{12.81 \angle 38.7^\circ} = 8.59 \angle -38.7^\circ \text{ A}$$

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta = 110(8.59 \cos 38.7^\circ) = 737.43 \text{ W}$$

$$pf = \cos 38.7^\circ = 0.78$$

### 另一种方法

有  $|Z|^2 = 100 + 64 = 164$ , 则

$$P = V_{\text{eff}}^2 R / |Z|^2 = 110^2 (10) / 164 = 737.8 \text{ W}$$

第二种方法得出的答案更准确。

### 10.4 无功功率

如果一个无源网络含有电感器、电容器或两者都有, 在一个周期内, 输入到元件中的一部分能量被存储起来, 然后又返回到电源中。能量返回到电源的期间, 功率是负的。在这种交换中涉及的功率称为无功功率或正交功率。虽然无功功率的纯作用为零, 但它降低了电源系统的运行效率。用  $Q$  表示的无功功率定义如下

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \theta \quad (8)$$

如果  $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ , 那么  $\sin \theta = X / |Z|$  并且  $Q$  可以表示为

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{X}{|Z|} \quad (9)$$

或

$$Q = \frac{V_{\text{eff}}^2}{|Z|^2} X \quad (10)$$

或

$$Q = X I_{\text{eff}}^2 \quad (11)$$

无功功率的单位是无功伏安(乏)。

无功功率  $Q$  取决于  $V$ ,  $I$ , 以及它们之间的相角。它是电压和与电压成  $90^\circ$  相位的那部分电流成分的乘积。若  $\theta = 0^\circ$ , 则  $Q$  为零。当  $V$  和  $I$  同相时, 对于一个纯电阻负载就是这种情况。当负载为纯电抗时,  $|\theta| = 90^\circ$ , 对于给定的电压和电流,  $Q$  达到最大值。注意,  $P$  总是非负的, 而  $Q$  既可为正值(对于电流落后电压的电感负载)也可以为负值(对于一个电流超前电压的电容)。它也通常用幅值和负载类型来说明  $Q$ 。例如:  $100 \text{ kvar}$  的电感表示为  $Q = 100 \text{ k乏}$ , 而  $100 \text{ k乏}$  的电容则表示  $Q = -100 \text{ k乏}$ 。

**例 10.5** 已知负载上的电压为  $V_{\text{eff}} = 110 \text{ V}$ , 电流为  $I_{\text{eff}} = 20 \angle -50^\circ \text{ A}$ 。求  $P$  和  $Q$ 。

$$P = 110(20 \cos 50^\circ) = 1414 \text{ W} \quad Q = 110(20 \sin 50^\circ) = 1685 \text{ 乏}$$

### 10.5 $R$ , $L$ 和 $C$ 的交流功率小结

电阻、电感和电容的交流功率总结在表 10-1 中。我们使用包括相角的符号  $V_{\text{eff}}$  和  $I_{\text{eff}}$ 。表 10-1 中最后一列  $S = VI$ , 其中  $S$  称为视在功率, 将在 10.7 节中详细阐述。

表 10-1

$v = (V\sqrt{2})\cos\omega t$   
 $i = (I\sqrt{2})\cos(\omega t - \theta)$

$V_{\text{eff}} = V \angle 0^\circ$   
 $I_{\text{eff}} = I \angle -\theta^\circ$

$P = VI\cos\theta$ ,  $Q = VI\sin\theta$  和  $S = VI$  (视在功率)

	<b>Z</b>	<i>i</i>	<b>I<sub>eff</sub></b>	<i>p(t)</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>S</i>
<i>R</i>	<i>R</i>	$\frac{V\sqrt{2}}{R}\cos\omega t$	$\frac{V}{R} \angle 0^\circ$	$\frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t)$	$\frac{V^2}{R}$	0	$\frac{V^2}{R}$
<i>L</i>	<i>jLω</i>	$\frac{V\sqrt{2}}{L\omega}\cos(\omega t - 90^\circ)$	$\frac{V}{L\omega} \angle -90^\circ$	$\frac{V^2}{L\omega}\sin 2\omega t$	0	$\frac{V^2}{L\omega}$	$\frac{V^2}{L\omega}$
<i>C</i>	$\frac{-j}{C\omega}$	$V\sqrt{2}C\omega\cos(\omega t + 90^\circ)$	$VC\omega \angle 90^\circ$	$-V^2C\omega\sin 2\omega t$	0	$-V^2C\omega$	$V^2C\omega$

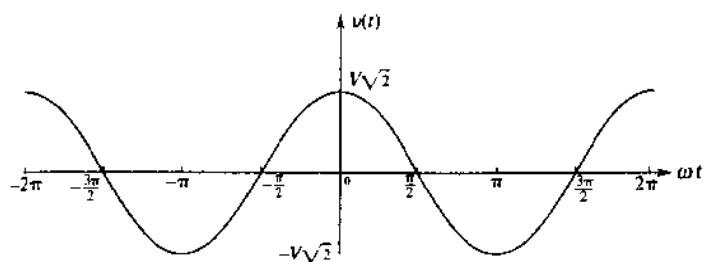


**例 10.6** 设电压和电流有效值分别为  $V$  和  $I$ . 求正弦电源传送到电阻  $R$  的功率.

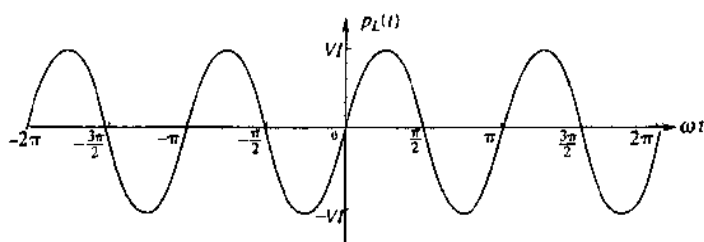
$$\begin{aligned} P_R(t) &= v i_R = (V\sqrt{2})\cos\omega t (I\sqrt{2})\cos\omega t = 2VI\cos^2\omega t = VI(1 + \cos 2\omega t) \\ &= RI^2(1 + \cos 2\omega t) = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t) \end{aligned}$$

因此

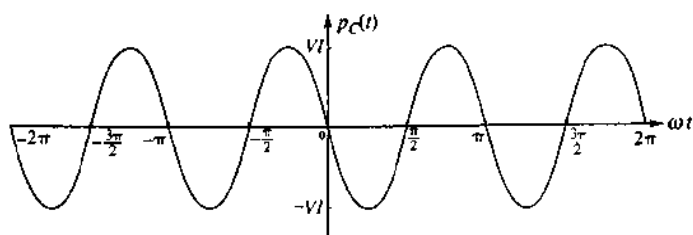
$$P_R = \frac{V^2}{R} = RI^2 \quad Q = 0$$



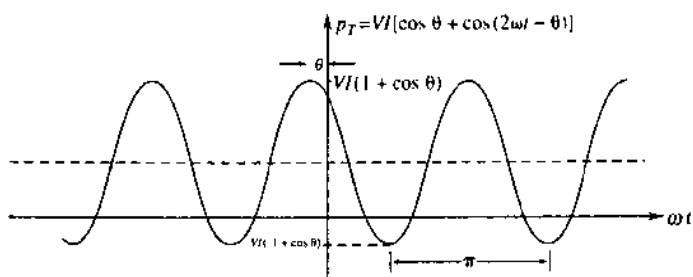
(a)



(b)



(c)



(d)

图 10-5

进入电阻中的瞬时功率在 0 到  $2RI^2$  之间呈正弦变化, 且频率是激励的 2 倍,  $P$  的平均值为  $P = RI^2$ .  $v(t)$  和  $p_R(t)$  图形画于图 10-5(a) 中.

**例 10.7** 求进入电感  $L$  的交流功率.

$$\begin{aligned} p_L(t) &= v i_L = (V\sqrt{2})\cos\omega t (I\sqrt{2})\cos(\omega t - 90^\circ) = 2VI\cos\omega t \sin\omega t \\ &= VI\sin 2\omega t = L\omega I^2 \sin 2\omega t = \frac{V^2}{L\omega} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

因此

$$P = 0 \quad Q = VI = \frac{V^2}{L\omega} = L\omega I^2$$

进入电感的瞬时功率在  $Q$  和  $-Q$  之间呈正弦变化, 且频率为电源频率的 2 倍, 其平均值为零, 见图 10-5(b).

**例 10.8** 求传送到电容  $C$  的交流功率.

$$\begin{aligned} p_C(t) &= v i_C = (V\sqrt{2})\cos\omega t (I\sqrt{2})\cos(\omega t + 90^\circ) = -2VI\cos\omega t \sin\omega t \\ &= -VI\sin 2\omega t = -C\omega V^2 \sin 2\omega t = -\frac{I^2}{C\omega} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

因此

$$P = 0 \quad Q = -VI = -\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega V^2$$

同电感一样, 进入电容的瞬时功率也在  $-Q$  和  $Q$  之间呈正弦变化, 频率为电源频率的 2 倍, 其平均值也为零. 见图 10-5(c).

## 10.6 电感和电容之间的能量交换

如果一个电感和一个电容在并联情况下由相同的交流电压源供电, 或者在串联情况下由相同的电流源供电, 那么进入电容的功率与进入电感的功率的相位差是  $180^\circ$ . 显然, 这反映在电感和电容的无功功率  $Q$  的符号是相反的. 在这种情况下, 电感和电容会不通过交流电源而互相交换某些能量. 这样就减小了电源输送给  $LC$  回路的无功功率, 从而改善了功率因数. 见 10.8 和 10.9 节

**例 10.9** 一个并联  $RLC$  电路, 电压源为  $v = (V\sqrt{2})\cos\omega t$ . 求总瞬时功率  $p(t)$ , 平均功率  $P$  和无功功率  $Q$ .

总瞬时功率为

$$p_T = v i = v(i_R + i_L + i_C) = p_R + p_L + p_C$$

分别用例 10.6, 10.7 和 10.8 中求出的值代替上式中的  $p_R$ ,  $p_L$  和  $p_C$ , 得

$$p_T = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t) + V^2 \left[ \left( \frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \sin 2\omega t \right]$$

平均功率为

$$P_T = P_R = V^2/R$$

无功功率为

$$Q_T = Q_L + Q_C = V^2 \left( \frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \quad (12)$$

由于  $(1/L\omega) - C\omega = 0$ , 因此总无功功率为零. 图 10-5(d) 画出了一个带有超前功率因数的负载的  $p_T(t)$  图.

## 10.7 复功率, 视在功率和功率三角形

功率的两个组成部分  $P$  和  $Q$  各起不同的作用并且不可以相加. 然而我们可以用称为复功率  $S$  的向量形式将二者很方便地集合在一起, 其中  $S = P + jQ$ . 它的幅值  $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} =$

$V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  称为视在功率  $S$ , 单位为伏-安(VA). 将三个标量  $S, P$  和  $Q$  可以分别表示为几何学上直角三角形的斜边, 水平边和垂直边(该三角形称为功率三角形), 如图 10-6(a)所示. 功率三角形是简单的由因子  $I_{\text{eff}}^2$  标定的阻抗三角形, 如图 10-6(b)所示. 对于电感负载的功率三角形和电容负载的功率三角形分别示于图 10-6(c)和(d).

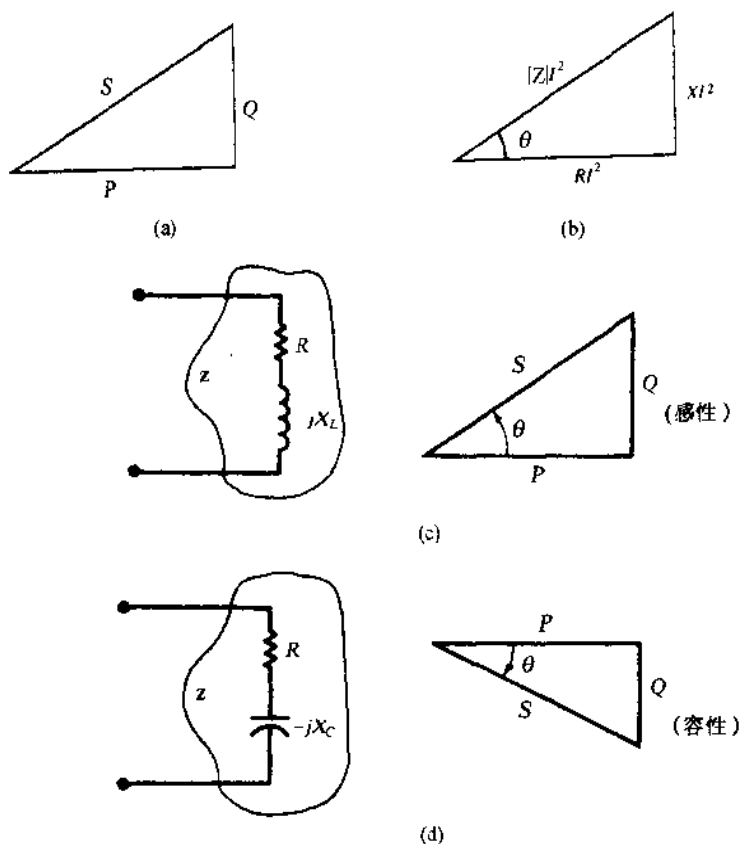


图 10-6

容易证明  $S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^*$ . 其中,  $V_{\text{eff}}$  是有效电压的复数幅值,  $I_{\text{eff}}^*$  是有效电流幅值的共轭复数. 一个等效公式为  $S = I_{\text{eff}}^2 Z$ .

总结可得

复功率

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = P + jQ = I_{\text{eff}}^2 Z \quad (13)$$

有效功率

$$P = \text{Re}[S] = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta \quad (14)$$

无功功率

$$Q = \text{Im}[S] = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \theta \quad (15)$$

视在功率

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (16)$$

**例 10.10** (a)如图 10-7(a)所示, 阻抗  $Z_1 = 1 + j$  两端连有一正弦电压源  $V_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$ . 求  $i_1$ ,  $I_{1,\text{eff}}$ ,  $p_1(t)$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ , 功率因数  $\text{pf}_1$  和  $S_1$ ; (b)重复(a), 用  $Z_2 = 1 - j$  替换(a)中的  $Z_1$ , 见图 10-7(b); (c)重复(a), 阻抗变为(a)中的  $Z_1$  和(b)中的  $Z_2$  并联, 见图 10-7(c).

设  $v = 10\sqrt{2}\cos\omega t$ .

(a) 见图 10-7(a)

$$Z_1 = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$i_1 = 10 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

$$I_{1,\text{eff}} = 5\sqrt{2} \angle (-45^\circ)$$

$$\begin{aligned} p_1(t) &= (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t - 45^\circ) \\ &= 50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t - 45^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

$$P_1 = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}$$

$$Q_1 = V_{\text{eff}} I_{1,\text{eff}} \sin 45^\circ = 50 \text{ 乏}$$

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = 50 + j50$$

$$S_1 = |S_1| = 50\sqrt{2} = 70.7 \text{ VA}$$

$$pf_1 = 0.707 \text{ 滞后}$$

$$pf = 1$$

(c) 见图 10-7(c)

(b) 见图 10-7(b)

$$Z_2 = \sqrt{2} \angle (-45^\circ)$$

$$i_2 = 10 \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$I_{2,\text{eff}} = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$p_2(t) = (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$= 50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t + 45^\circ) \text{ W}$$

$$P_2 = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}$$

$$Q_2 = -V_{\text{eff}} I_{2,\text{eff}} \sin 45^\circ = -50 \text{ 乏}$$

$$S_2 = P_2 + jQ_2 = 50 - j50$$

$$S_2 = |S_2| = 50\sqrt{2} = 70.7 \text{ VA}$$

$$pf_2 = 0.707 \text{ 超前}$$

$$Z = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{(1+j)(1-j)}{(1+j) + (1-j)} = 1$$

$$i = 10\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$I_{\text{eff}} = 10$$

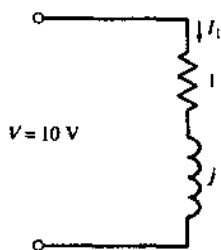
$$P(t) = 200 \cos^2 \omega t = 100 + 100 \cos 2\omega t \text{ W}$$

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = 100 \text{ W}$$

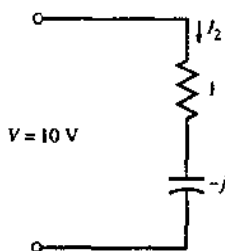
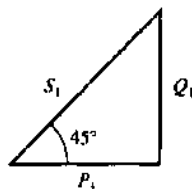
$$Q = 0$$

$$S = P = 100$$

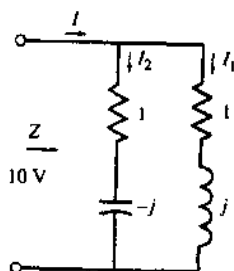
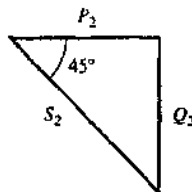
$$S = |S| = 100 \text{ VA}$$



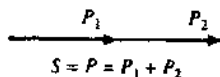
(a)



(b)



(c)



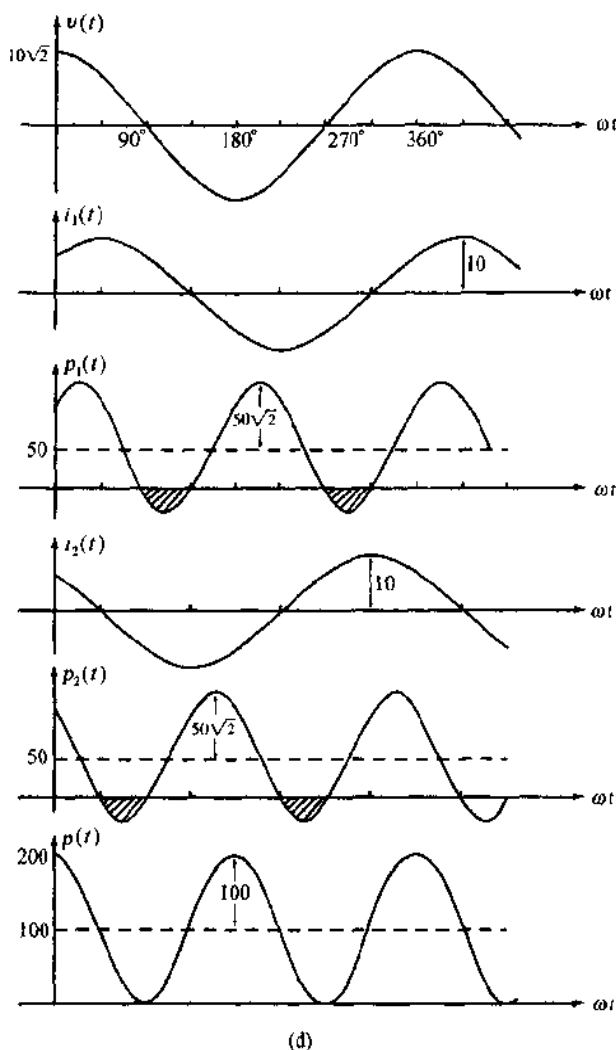


图 10-7

(c) 部分的结果也可用观察的方法推导出: 对于  $Z_1 \parallel Z_2$ ,  $i = i_1 + i_2$ , 所以

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_1(t) + p_2(t) \\
 &= [50 + (50\sqrt{2})\cos(2\omega t - 45^\circ)] + [50 + (50\sqrt{2})\cos(2\omega t + 45^\circ)] \\
 &= 100 + 100\cos 2\omega t \text{ W} \\
 P &= P_1 + P_2 = 50 + 50 = 100 \text{ W} \\
 Q &= Q_1 + Q_2 = 50 - 50 = 0 \\
 S &= 100 < S_1 + S_2
 \end{aligned}$$

功率三角形见图 10-7(a), (b), (c). 图 10-7(c) 显示了三个负载的  $v, i, p$  的曲线图.

**例 10.11** 一个确定的无源网络, 等效阻抗为  $Z = 3 + j4 \Omega$ , 电压源为

$$v = 42.5\cos(1000t + 30^\circ) \text{ (V)}$$

得到完整的功率信息.

$$\mathbf{V}_{\text{eff}} = \frac{42.5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}}{\mathbf{Z}} = \frac{(42.5/\sqrt{2}) \angle 30^\circ}{5 \angle 53.13^\circ} = \frac{8.5}{\sqrt{2}} \angle -23.13^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}}^* = 180.6 \angle 53.13^\circ = 108.4 + j144.5$$

因此  $P = 108.4\text{W}$ ,  $Q = 144.5$  乏 (感性),  $S = 180.6\text{VA}$ ,  $\text{pf} = \cos 53.13^\circ = 0.6$  滞后.

### 10.8 并联网络

复功率  $S$  在实际网络分析中也是非常有用的, 例如在同一电源线上家庭抽头的集合. 参见图 10-8,

$$\begin{aligned} S_T &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = V_{\text{eff}} (I_{1,\text{eff}}^* + I_{2,\text{eff}}^* + \cdots + I_{n,\text{eff}}^*) \\ &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n \end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 + \cdots + P_n \\ Q_T &= Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n \\ S_T &= \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \\ \text{pf}_T &= \frac{P_T}{S_T} \end{aligned}$$

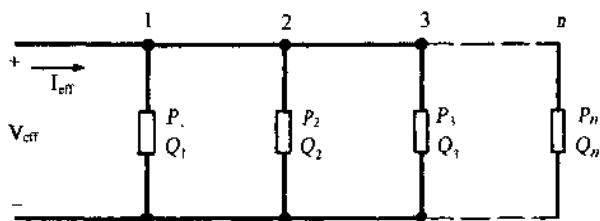


图 10-8

这些结果(同样也适用于串联网)意味着整个网络的功率三角形可以通过将各个支路功率三角形的顶点彼此相连而得出. 如图 10-9 所示的例子中,  $n=3$ , 支路 1 和 3 假设为电感, 支路 2 为电容. 在这样的图形中, 如果相应的  $R$  或  $X$  为零, 则有些三角形可简化为直线段.

若单独支路的功率数据并不重要, 则网络可以由一等效导纳代替, 用其直接计算  $S_T$ .

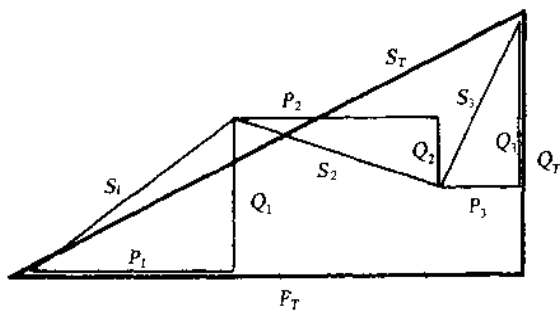


图 10-9

**例 10.12** 如图 10-8 所示, 三个负载并联连接到  $6\text{kV}_{\text{eff}}$  的交流电源线. 已知

$P_1 = 10\text{kW}$ ,  $\text{pf}_1 = 1$ ;  $P_2 = 20\text{kW}$ ,  $\text{pf}_2 = 0.5$  滞后;  $P_3 = 15\text{kW}$ ,  $\text{pf}_3 = 0.6$  滞后.

求  $P_T$ ,  $Q_T$ ,  $S_T$ ,  $\text{pf}_T$  和电流  $I_{\text{eff}}$ .

我们先求出每个负载的无功功率:

$$\begin{aligned} pf_1 &= \cos\theta_1 = 1 & \tan\theta_1 &= 0 & Q_1 &= P_1 \tan\theta_1 = 0 \text{ k乏} \\ pf_2 &= \cos\theta_2 = 0.5 & \tan\theta_2 &= 1.73 & Q_2 &= P_2 \tan\theta_2 = 34.6 \text{ k乏} \\ pf_3 &= \cos\theta_3 = 0.6 & \tan\theta_3 &= 1.33 & Q_3 &= P_3 \tan\theta_3 = 20 \text{ k乏} \end{aligned}$$

则  $P_T$ ,  $Q_T$ ,  $S_T$  和  $pf_T$  是:

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 20 + 15 = 45 \text{ kW} \\ Q_T &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 34.6 + 20 = 54.6 \text{ k乏} \\ S_T &= \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{45^2 + 54.6^2} = 70.75 \text{ kVA} \\ pf_T &= P_T / S_T = 0.64 = \cos\theta, \theta = 50.5^\circ \text{ 滞后} \\ I_{\text{eff}} &= S / V_{\text{eff}} = (70.75 \text{ kVA}) / (6 \text{ kV}) = 11.8 \text{ A} \\ I_{\text{eff}} &= 11.8 \angle -50.5^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

电流也可以通过  $I = I_1 + I_2 + I_3$  求出,但这种方法比较费时。

### 10.9 功率因数的改善

供给工业用户的电是三相交流电,而供给住宅和小型商业用户的电则是单相的。在经济生产中,大型用电企业发现减少功率三角形的无功分量对他们来说是非常有利的,我们称之为“提高功率因数”。在工业系统中由于大量使用电动机一般存在很强的电感性成分,每个单独负载若为纯电阻,则有单位功率因数;若同时含有电阻、感抗,有滞后的功率因数。所有的负载并联,等效阻抗导致一个滞后的电流和相应的感性正交功率  $Q$ 。为了提高功率因数,在三相发电机组中,将电容接到系统中主变压器的初级线圈或次级线圈上,这样工厂负载与电容器组的结合将产生一个更有效的负载,使之接近于单位功率因数。

**例 10.13** 如图 10-10 所示,若要使功率因数提高到 0.95 滞后,则电容器组提供的无功功率  $Q$  为多少?

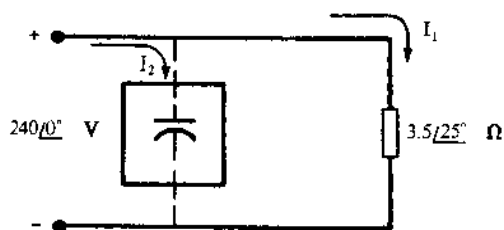


图 10-10

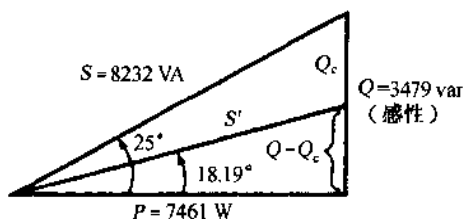


图 10-11

在增加电容器组之前,  $pf = \cos 25^\circ = 0.906$  滞后, 且

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{240 \angle 0^\circ}{3.5 \angle 25^\circ} = 68.6 \angle -25^\circ \text{ A} \\ S &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = \left( \frac{240}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) \left( \frac{68.6}{\sqrt{2}} \angle +25^\circ \right) = 8232 \angle 25^\circ = 7461 + j3479 \end{aligned}$$

改善后, 三角形具有相同的  $P$ , 但角度为  $\cos^{-1} 0.95 = 18.19^\circ$ . 则(见图 10-11)

$$\frac{3479 - Q_c}{7461} = \tan 18.19^\circ \quad \text{或} \quad Q_c = 1027 \text{ 乏(容性)}$$

新的视在功率的值为  $S = 7854 \text{ VA}$ , 与原来  $S = 8232 \text{ VA}$  相比, 减少了 378 VA, 占总量的 4.6%。

变压器、配电系统以及用于公用事业的交流发电机, 均额定为 kVA 和 MVA。因此, 功率因数的提高使它的无功功率相应的减少以 kVA 计, 将增强发电和传输的能力, 可以用来为其他用户服务。这就是为什么对于以较低的功率因数运行的工

业用户,以这种或那种方法使它的费用更高.人们经常进行经济研究,将电容器组  
的费用同节约的实际价值进行比较.研究的结果将表明是否应该提高功率因数以  
及最终应使功率因数达到多大.

**例 10.14** 一个  $\text{pf}=0.5$  滞后,  $P=1000\text{kW}$  的负载,电源为  $5\text{kV}$ . 加上一个并联电容,使功率因  
数提高到  $0.8$ . 求发电机电流减小多少?

改善前

$$P = 1000\text{kW}, \cos\theta = 0.5, S = P/\cos\theta = 2000\text{ kVA}, I = 400\text{A}$$

改善后

$$P = 1000\text{kW}, \cos\theta = 0.8, S = P/\cos\theta = 1250\text{kVA}, I = 250\text{A}$$

因此,对于相同的有效功率,电流减小了  $(400-250)/400 = 0.375$  或  $37.5\%$ .

**例 10.15** 例 10.12 中,在三个并联负载之后再并联第 4 个负载,使得总功率因数变为  $0.8$  而  
总功率不变. 求  $Q_4$  和最后的  $S$ . 并讨论对电流的影响.

在例 10.12 中我们已求得总有效功率为  $P = P_1 + P_2 + P_3 = 45\text{kW}$ , 总无功功  
率为  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 54.6\text{k乏}$ . 为了电路补偿,我们现在加上负载  $Q_4$  (有  $P_4$   
 $= 0$ ) 使新的功率因数为  $\text{pf} = \cos\theta = 0.8$ ,  $\theta = 36.87^\circ$ .

则

$$\tan 36.87^\circ = P/(Q + Q_4) = 45/(54.6 + Q_4) = 0.75 \quad Q_4 = -20.85\text{k乏}$$

结果总结在表 10-2 中. 所增加的补偿负载  $Q_4$  使无功功率由  $54.6\text{k乏}$  减小到  
 $33.75\text{k乏}$ , 并提高了功率因数. 同时视在功率  $S$  也由  $70.75\text{kVA}$  减小到  
 $56.25\text{kVA}$ . 电流则成比例地减小.

表 10-2

负载	$P, \text{kW}$	$\text{pf}$	$Q, \text{kvar}$	$S, \text{kVA}$
#1	10	1	0	10
#2	20	0.51 滞后	34.6	40
#3	15	0.61 滞后	20	25
#(1+2+3)	45	0.64	54.6	70.75
#4	0	超前	-20.85	20.85
总和	45	0.8	33.75	56.25

### 10.10 最大功率传输

具有开路电压  $V_g$ , 内阻抗  $Z_g = R + jX$  的正弦信号发生器供给负载  $Z_L$  的平均功率, 当  $Z_L$   
等于  $Z_g$  的共轭复数时为最大值. 这样  $Z_L = R - jX$ . 提供给负载  $Z_L$  的平均功率最大值为  $P_{\max}$   
 $= V_g^2/4R$ .

**例 10.16** 一个发电机的  $V_g = 100\text{V}$  (均方根),  $Z_g = 1 + j$ , 接一负载  $Z_L = 2$  (见图 10-12). (a)  
求平均功率  $P_{Z_L}$  ( $Z_L$  所吸收的), 功率  $P_g$  ( $Z_g$  消耗的) 和  $P_T$  (发电机提供的); (b) 若  
有第二个负载  $Z_2$  与  $Z_L$  并联时, 使等效阻抗为  $Z = Z_L \parallel Z_2 = Z_g^*$ . 求  $Z_2$  的值; (c) 将

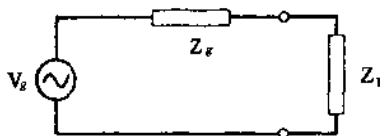


图 10-12



(b)中求得的  $Z_2$  与  $Z_1$  并联后,求功率  $P_Z, P_{Z1}, P_{Z2}$  (分别由  $Z, Z_1$  和  $Z_2$  吸收的)  $P_g$  ( $Z_g$  消耗的)和  $P_T$  (发电机提供的)。

(a)  $|Z_1 + Z_R| = |2 + 1 + j| = \sqrt{10}$ . 则  $I = V_g / (Z_1 + Z_g) = 100 / (2 + 1 + j)$ ,  $|I| = 10 \sqrt{10} \text{ A}$   
所求功率为

$$P_{Z1} = \operatorname{Re}[Z_1] \times |I|^2 = 2(10 \sqrt{10})^2 = 2000 \text{ W}$$

$$P_g = \operatorname{Re}[Z_g] \times |I|^2 = 1(10 \sqrt{10})^2 = 1000 \text{ W}$$

$$P_T = P_{Z1} + P_g = 2000 + 1000 = 3000 \text{ W}$$

(b) 设  $Z_2 = a + jb$ . 为了求出  $a, b$ , 我们设  $Z_1 \parallel Z_2 = Z_g^* = 1 - j$ . 则

$$\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2(a + jb)}{2 + a + jb} = 1 - j$$

由上式可得  $a - b - 2 = 0$  和  $a + b + 2 = 0$ . 求解联立方程, 解得  $a = 0, b = -2$ ; 代入上面的方程,  $Z_2 = -j2$ .

(c)  $Z = Z_1 \parallel Z_2 = 1 - j$  及  $Z + Z_g = 1 - j + 1 + j = 2$ . 所以  $I = V_g / (Z + Z_g) = 100 / (1 - j + 1 + j) = 100 / 2 = 50 \text{ A}$ .

$$P_Z = \operatorname{Re}[Z] \times I^2 = 1 \times 50^2 = 2500 \text{ W} \quad P_g = \operatorname{Re}[Z_g] \times I^2 = 1 \times 50^2 = 2500 \text{ W}$$

为了求出  $P_{Z1}$  和  $P_{Z2}$ , 我们先求  $Z$  两端的  $V_Z, V_Z = IZ = 50(1 - j)$ . 则  $I_{Z1} = V_Z / Z_1 = 50(1 - j) / 2 = (25\sqrt{2}) \angle -45^\circ$ .

$$P_{Z1} = \operatorname{Re}[Z_1] \times |I_{Z1}|^2 = 2(25\sqrt{2})^2 = 2500 \text{ W} \quad P_{Z2} = 0 \text{ W} \quad P_T = P_g + P_{Z1} = 5000 \text{ W}$$

换句话说, 有

$$P_{Z2} = 0 \quad P_{Z1} = P_Z = 2500 \text{ W}$$

### 习题及解答

- 10.1 图 10-13(a)所示的电流流入一个与  $1 \text{ k}\Omega$  电阻串联的  $0.5 \mu\text{F}$  的电容. 求解并画图: (a) 串联  $RL$  电路的端电压  $v$ ; (b) 进入  $RC$  的瞬时功率  $p$ ; (c) 将结果与例 10-1 和 10-2 进行比较.

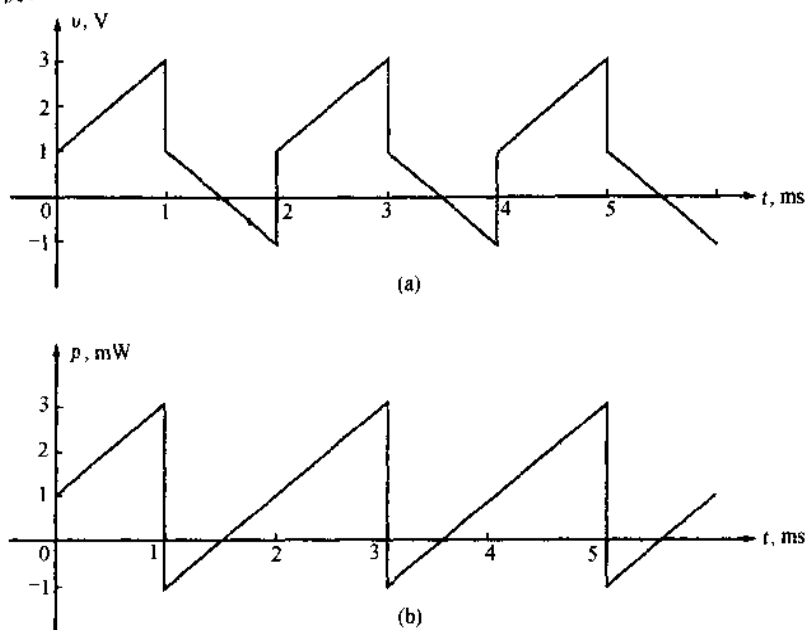


图 10-13

解 ③ (a) 参考图 10-13(a), 在电流的一个周期内电压为

$$v_R = \begin{cases} 1\text{V} & (0 < t < 1\text{ms}) \\ -1\text{V} & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \begin{cases} 2000t(\text{V}) & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 4 - 2000t(\text{V}) & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

$$v = v_R + v_C = \begin{cases} 1 + 2000t(\text{V}) & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 3 - 2000t(\text{V}) & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases} \quad [\text{见图 10-3(a)}]$$

(b) 一个周期内

$$p_R = Ri^2 = 1\text{mW}$$

$$p_C = v_C i = \begin{cases} 2000t(\text{mW}) & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 2000t - 4(\text{mW}) & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

$$p = v i = p_R + p_C = \begin{cases} 1 + 2000t(\text{mW}) & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 2000t - 3(\text{mW}) & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases} \quad (\text{见图 10-3(b)})$$

(c) 一个周期中进入电路的平均功率等于电阻吸收的平均功率. 这与例 10-1 求得的结果相同. 而一个周期内在电源和电路之间所交换的功率也与例 10-2 求得的结果相同.

- 10.2 一个 1V 的交流电压源供给 (a)  $1\text{k}\Omega$  电阻; (b) 负载  $Z = 1 + j$ , (c) 负载  $Z = 1 - j$ . 求三种情况下的各功率  $P$ .

解 ③ (a)  $P = V^2/R = 1/1 = 1\text{W}$

$$(b) |Z| = |1 + j| = \sqrt{2} \quad P = V^2/|Z| = 1/\sqrt{2} = 0.707\text{W}$$

$$(c) |Z| = |1 - j| = \sqrt{2} \quad P = V^2/|Z| = 1/\sqrt{2} = 0.707\text{W}$$

- 10.3 无源电路电压源为  $v = 150 \cos(\omega t + 10^\circ)$  (V), 产生的电流为  $i = 5.0 \cos(\omega t - 50^\circ)$ . 求完整的功率信息.

解 ③ 利用复功率

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* = \left( \frac{150}{\sqrt{2}} \angle 10^\circ \right) \left( \frac{5.0}{\sqrt{2}} \angle 50^\circ \right)^* = 375 \angle 60^\circ = 187.5 + j324.8$$

因此  $P = 187.5\text{W}$ ,  $Q = 324.8$  乏(感性),  $S = 375\text{VA}$ ,  $\text{pf} = \cos 60^\circ = 0.5$  滞后.

- 10.4 一个含有两元件的串联电路平均功率为 940W, 功率因数 0.707 超前. 若所加电压为  $v = 99.0 \cos(6000t + 30^\circ)$  V. 请确定电路元件.

解 ③ 施加的电压有效值为  $99.0/\sqrt{2} = 70.0\text{V}$ . 代入  $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\theta$  中,

$$940 = (70.0) I_{\text{eff}} (0.707) \quad \text{或} \quad I_{\text{eff}} = 19.0\text{A}$$

则  $(19.0)^2 R = 940$ , 由此得  $R = 2.60\Omega$ . 因为功率因数 pf 超前,  $\theta = \cos^{-1} 0.707 = -45^\circ$

所以:

$$Z = R - jX_C \quad \text{其中} \quad X_C = R \tan 45^\circ = 2.60\Omega$$

最后由  $26.0 = 1/\omega C$ , 得:  $C = 64.1\mu\text{F}$ .

- 10.5 已知有两个元件的串联电路, 电流  $i = 4.24 \cos(5000t + 45^\circ)$  A, 功率为 180W, 功率因数为 0.80 滞后, 求两元件.

解 ③ 电流有效值为  $I_{\text{eff}} = 4.24/\sqrt{2} = 3.0\text{A}$ , 因而

$$180 = (3.0)^2 R \quad \text{或} \quad R = 20.0\Omega$$

阻抗角  $\theta = \cos^{-1} 0.80 = +36.87^\circ$ , 因此第二个元件必为电感. 由功率三角形得:

$$\frac{Q}{P} = \frac{I_{\text{eff}}^2 X_L}{180} = \tan 36.87^\circ \quad \text{或} \quad X_L = 15.0\Omega$$

最后由  $15.0 = 5000L$  得  $L = 3.0\text{mH}$ .

- 10.6 求图 10-14 中每个元件的功率参数, 并画出功率三角形.

解 ③ 电流有效值为  $14.14/\sqrt{2} = 10\text{A}$ .

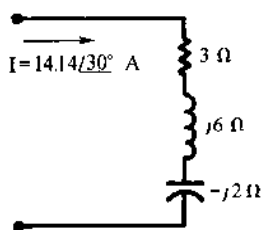


图 10-14

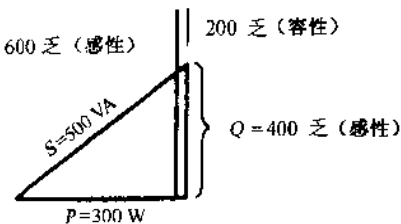


图 10-15

$$P = (10)^2 3 = 300 \text{ W} \quad Q_{j6\Omega} = (10)^2 6 = 600 \text{ 乏 (感性)} \quad Q_{-j2\Omega} = (10)^2 2 = 200 \text{ 乏 (容性)}$$

$$S = \sqrt{(300)^2 + (600 - 200)^2} = 500 \text{ VA} \quad \text{pf} = P/S = 0.6 \text{ 滞后}$$

功率三角形示于图 10-15.

- 10.7 一个  $R = 10\Omega$  和  $X_C = 5\Omega$  的串联电路中, 电压源的有效值为 120V. 求全部功率信息.

解 根据

$$Z = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.8\Omega \quad I_{\text{eff}} = \frac{120}{11.18} = 10.73 \text{ A}$$

则

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = 1152 \text{ W} \quad Q = I_{\text{eff}}^2 X_C = 576 \text{ 乏 (容性)}$$

$$S = \sqrt{(1152)^2 + (576)^2} = 1288 \text{ VA}$$

$$\text{pf} = 1152/1288 = 0.894 \text{ 超前}$$

- 10.8 在阻抗  $Z_1 = 5.83\angle -59.0^\circ\Omega$  和  $Z_2 = 8.94\angle 63.43^\circ\Omega$  的串联电路中, 电流有效值为 5.0A. 求全部功率的信息.

解 根据

$$Z_T = Z_1 + Z_2 = 7.0 + j3.0\Omega$$

因此

$$P_T = (5.0)^2 (7.0) = 175 \text{ W} \quad Q_T = (5.0)^2 (3.0) = 75 \text{ 乏 (感性)}$$

$$S_T = \sqrt{(175)^2 + (75)^2} = 190.4 \text{ VA} \quad \text{pf} = \frac{175}{190.4} = 0.919 \text{ 滞后}$$

- 10.9 求图 10-16 所示并联电路的所有功率.

解 根据电流分流, 可知:

$$I_3 = 17.88\angle 18.43^\circ \text{ A} \quad I_4 = 26.05\angle -12.53^\circ \text{ A}$$

则

$$P_T = \left( \frac{17.88}{\sqrt{2}} \right)^2 (5) + \left( \frac{26.05}{\sqrt{2}} \right)^2 (4) = 2156 \text{ W}$$

$$Q_T = \left( \frac{17.88}{\sqrt{2}} \right)^2 (3) = 480 \text{ 乏 (容性)}$$

$$S_T = \sqrt{(2156)^2 + (480)^2} = 2206 \text{ VA}$$

$$\text{pf} = \frac{2156}{2209} = 0.976 \text{ 超前}$$

另一种方法

$$Z_{\text{eq}} = \frac{4(5-j3)}{9-j3} = 2.40 - j0.53\Omega$$

所以  $P = (42.4/\sqrt{2})^2 (2.40) = 2157 \text{ W}$ ,  $Q = (42.4/\sqrt{2})^2 (0.53) = 476 \text{ 乏 (容性)}$ .

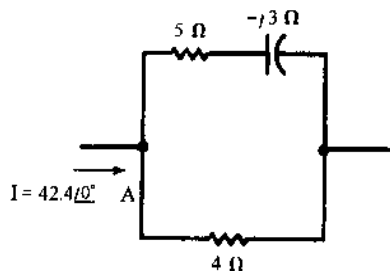


图 10-16

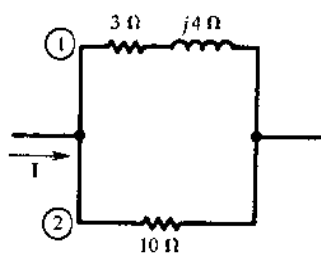


图 10-17

10.10 求图 10-17 中电路的功率因数。

解 由于电压、电流未知, 所以  $P, Q, S$  无法计算, 但功率因数是等效阻抗角的余弦值。

$$Z_{eq} = \frac{(3 + j4)(10)}{13 + j4} = 3.68 \angle 36.03^\circ \Omega$$

$$\text{pf} = \cos 36.03^\circ = 0.809 \text{ 滞后}$$

10.11 若图 10-17 中电路的总功率为 1100W, 求两个电阻的功率各为多少?

解 根据电流分流

$$\frac{I_{1,\text{eff}}}{I_{2,\text{eff}}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

因此

$$\frac{P_{3\Omega}}{P_{10\Omega}} = \frac{I_{1,\text{eff}}^2(3)}{I_{2,\text{eff}}^2(10)} = \frac{6}{5}$$

与  $P_{3\Omega} + P_{10\Omega} = 1100\text{W}$  联立求解, 得  $P_{3\Omega} = 600\text{W}, P_{10\Omega} = 500\text{W}$ 。

10.12 求两支路并联的电路的功率因数, 其中第一个支路的阻抗为  $Z_1 = 2 + j4\Omega$ , 第二个支路的阻抗为  $Z_2 = 6 + j0$ 。若要使功率因数为 0.90 滞后, 则需将  $6\Omega$  的电阻换为何值?

解 因为等效导纳角是等效阻抗角的负值, 其余弦值即为功率因数。

$$Y_{eq} = \frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{6} = 0.334 \angle -36.84^\circ \text{S}$$

$$\text{pf} = \cos(-36.84^\circ) = 0.80 \text{ 滞后}$$

因为阻抗角是正的, 所以  $\text{pf}$  是滞后的。

现要使功率因数提高到 0.90, 则导纳角必须变为  $\cos^{-1}0.90 = -25.84^\circ$ , 因此

$$Y'_{eq} = \frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{R} = \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{R} \right) - j \frac{1}{5}$$

要求

$$\frac{1/5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{R}} = \tan 25.84^\circ \quad \text{或} \quad R = 3.20\Omega$$

10.13 两支路并联电路中,  $Z_1 = 4 \angle 30^\circ \Omega$ ,  $Z_2 = 5 \angle 60^\circ \Omega$ , 施加电压  $28.28 \angle 60^\circ \text{V}$ , 求各支路的功率三角形, 并将它们合并为总功率三角形。

解

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = 7.07 \angle 30^\circ \text{A} \quad I_2 = \frac{V}{Z_2} = 5.66 \angle 0^\circ \text{A}$$

$$S_1 = \left( \frac{28.28}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \right) \left( \frac{7.07}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ \right) = 100 \angle 30^\circ = 86.6 + j50.0 \text{VA}$$

$$S_2 = \left( \frac{28.28}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \right) \left( \frac{5.66}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) = 80.0 \angle 60^\circ = 40.0 + j69.3 \text{VA}$$

$$S_T = S_1 + S_2 = 126.6 + j119.3 = 174.0 \angle 43.3^\circ \text{VA}$$

功率三角形和它们的求和形式示于图 10-18。

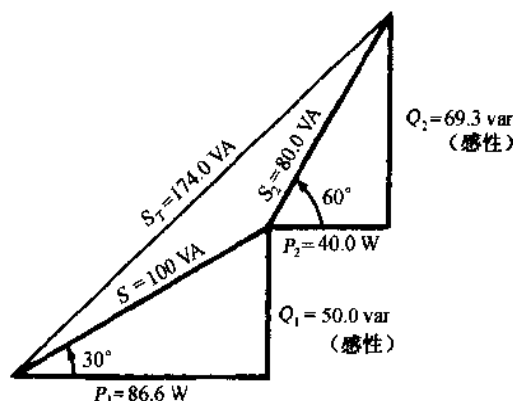


图 10-18

- 10.14 有三个并联的负载: 负载 1, 250VA,  $\text{pf} = 0.50$  滞后; 负载 2, 180W,  $\text{pf} = 0.80$  超前; 负载 3, 300VA, 100 乏(感性). 求总功率信息.

解 计算各负载的平均功率  $P$  和无功功率  $Q$ .

负载 1 给定  $S = 250\text{VA}$ ,  $\cos\theta = 0.50$  滞后. 则

$$P = 250(0.50) = 125\text{W} \quad Q = \sqrt{(250)^2 - (125)^2} = 216.5 \text{ 乏(感性)}$$

负载 2 给定  $P = 180\text{W}$ ,  $\cos\theta = 0.80$  超前. 则

$$\theta = \cos^{-1}0.80 = -36.87^\circ$$

$$Q = 180 \tan(-36.87^\circ) = 135 \text{ 乏(容性)}$$

负载 3 给定  $S = 300\text{VA}$ ,  $Q = 100 \text{ 乏(感性)}$ . 则

$$P = \sqrt{(300)^2 - (100)^2} = 282.8\text{W}$$

按元件结合起来有

$$P_T = 125 + 180 + 282.8 = 587.8\text{W}$$

$$Q_T = 216.5 - 135 + 100 = 181.5 \text{ 乏(感性)}$$

$$S_T = 587.8 + j181.5 = 615.2 \angle 17.16^\circ$$

因此,  $S_T = 615.2\text{VA}$  和  $\text{pf} = \cos 17.16^\circ = 0.955$  滞后.

- 10.15 图 10-19 所示并联电路, 若支路 2 的  $S_2 = 1490\text{VA}$ , 求全部功率三角形和总电流.

解 由  $S_2 = I_{2,\text{eff}}^2 Z_2$  有

$$I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{1490}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 222\text{A}^2$$

根据电流分流

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{3 + j6}{2 + j3}, \quad \text{因此 } I_{1,\text{eff}}^2 = \frac{3^2 + 6^2}{2^2 + 3^2} I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{45}{13}(222) = 768\text{A}^2$$

所以

$$S_1 = I_{1,\text{eff}}^2 Z_1 = 768(2 + j3) = 1536 + j2304$$

$$S_2 = I_{2,\text{eff}}^2 Z_2 = 222(3 + j6) = 666 + j1332$$

$$S_T = S_1 + S_2 = 2202 + j3636$$

即

$$P_T = 2202\text{W} \quad Q_T = 3636 \text{ 乏(感性)},$$

$$S_T = \sqrt{(2202)^2 + (3636)^2} = 4251\text{VA}$$

$$\text{pf} = \frac{2202}{4251} = 0.518 \text{ 滞后}$$

由于电压相位角未知, 所以只能求出  $I_T$  的幅值. 根据电流分流:

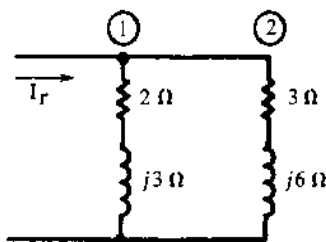


图 10-19

$$I_2 = \frac{2+j3}{5+j9} I_T \quad \text{或} \quad I_{2,\text{eff}}^2 = \frac{2^2+3^2}{5^2+9^2} I_{T,\text{eff}}^2 = \frac{13}{106} I_{T,\text{eff}}^2$$

因此

$$I_{T,\text{eff}}^2 = \frac{106}{13} (222) = 1811 \text{ A}^2 \quad \text{或} \quad I_{T,\text{eff}} = 42.6 \text{ A}$$

- 10.16 电路如图 10-20 所示,若总无功功率为 2500 乏(感性),求全部功率三角形以及支路功率  $P_1$  和  $P_2$ .

解 通过等效导纳计算总功率三角形

$$Y_{\text{eq}} = Y_1 + Y_2 = 0.2488 \angle -39.57^\circ \text{ S}$$

则

$$P_T = 2500 \cot 39.57^\circ = 3025 \text{ W}$$

$$S_T = 3025 + j2500 = 3924 \angle 39.57^\circ \text{ VA}$$

以及  $\text{pf} = P_T / S_T = 0.771$  滞后.

电流之比是:  $I_1 / I_2 = Y_1 / Y_2 = 0.177 / 0.0745$ .

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2(4)}{I_2^2(12)} = 1.88 \quad \text{及} \quad P_1 + P_2 = 3025 \text{ W}$$

由此得:  $P_1 = 1975 \text{ W}$  和  $P_2 = 1050 \text{ W}$ .

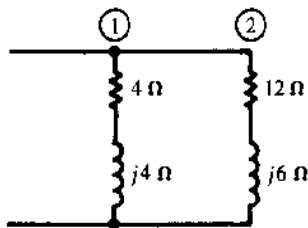


图 10-20

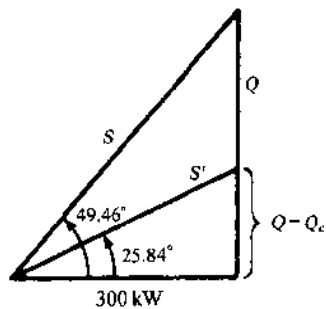


图 10-21

- 10.17 一个 300kW 的负载,功率因数为 0.65 滞后,若要并联电容使功率因数提高到 0.90 滞后.求电容使无功功率减小多少以及视在功率减小的百分比.

解 先求两功率因数相应的角度

$$\cos^{-1} 0.65 = 49.46^\circ \quad \cos^{-1} 0.90 = 25.84^\circ$$

则(见图 10-21)

$$Q = 300 \tan 49.46^\circ = 350.7 \text{ k乏(感性)}$$

$$Q - Q_c = 300 \tan 25.84^\circ = 145.3 \text{ k乏(感性)}$$

所以  $Q_c = 205.4 \text{ k乏(容性)}$ . 由于

$$S = \frac{300}{0.65} = 461.5 \text{ kVA} \quad S' = \frac{300}{0.90} = 333.3 \text{ kVA}$$

所以视在功率减小的百分比为  $\frac{461.5 - 333.3}{461.5} (100\%) = 27.8\%$ .

- 10.18 如图 10-22 所示,电路的电压有效值为 120V,频率 60Hz.若要使功率因数提高到 0.95 滞后.求所需的电容 C.

解 用导纳求解较好.

$$Y_{\text{eq}} = j\omega C + \frac{1}{20 \angle 30^\circ} = 0.0433 - j(0.0250 - \omega C) (\text{S})$$

用图 10-23 所示的导纳图,说明下一步

$$\theta = \cos^{-1} 0.95 = 18.19^\circ$$

$$0.0250 - \omega C = (0.0433)(\tan 18.19^\circ)$$

$$\omega C = 0.0108$$

$$C = 28.6 \mu\text{F}$$

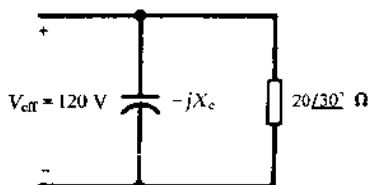


图 10-22

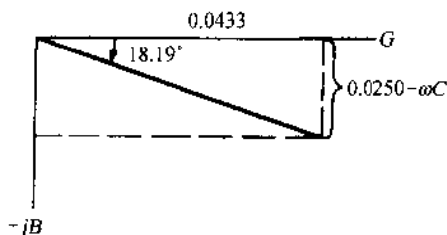


图 10-23

- 10.19 一个阻抗为  $Z = 10.0 \angle 60^\circ \Omega$  的电路,若要并联一个  $20 \Omega$  的容抗来提高功率因数,求电流减小的百分比。

解 由于  $I = VY$ , 因此可以通过增加电容前后的导纳比来求得电流减小的比。

$$Y_{\text{前}} = 0.100 \angle -60^\circ \text{ S}$$

$$Y_{\text{后}} = 0.050 \angle 90^\circ + 0.100 \angle -60^\circ = 0.062 \angle -36.20^\circ \text{ S}$$

$$\frac{I_{\text{后}}}{I_{\text{前}}} = \frac{0.062}{0.100} = 0.620$$

所以减小的百分比为 38%。

- 10.20 变压器最大额定功率为 25kVA, 给一个 12kW、功率因数是 0.6 滞后的负载供电。变压器额定功率的多大百分比提供给负载? 在变压器额定功率内,可增加单位功率因数的附加负载多少 kW?

解 对于 12kW 负载,  $S = 12/0.60 = 20\text{kVA}$ , 是变压器满额定功率的  $(20/25)(100\%) = 80\%$ 。

在单位功率因数下的附加负载并不改变无功功率

$$Q = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = 16 \text{ k乏(感性)}$$

因此全部电容时

$$\theta' = \sin^{-1}(16/25) = 39.79^\circ$$

$$P' = 25 \cos 39.79^\circ = 19.2 \text{ kW}$$

$$P_{\text{add}} = 19.2 - 12.0 = 7.2 \text{ kW}$$

注意,在图 10-24 中弧形表示满额定 kVA, 25 为半径。

- 10.21 参考题 10.20, 如果附加的负载为功率因数 0.866 超前, 在变压器额定功率内, 可以增加多少 kVA 的负载?

解 原有负载是  $S = 12 - j16 \text{ kVA}$ , 附加负载为

$$S_2 = S_2 \angle -30^\circ = S_2(0.866) - jS_2(0.500) \text{ (kVA)}$$

总和为  $S_T = (12 + 0.866S_2) + j(16 - 0.500S_2) \text{ (kVA)}$ , 则

$$S_T^2 = (12 + 0.866S_2)^2 + (16 - 0.500S_2)^2 = (25)^2$$

从而得到:  $S_2 = 12.8 \text{ kVA}$ 。

- 10.22 一个感应电动机轴输出功率为 1.5kW, 效率为 85%。在此负载下, 功率因数是 0.80 滞后, 求全部输入功率信息。

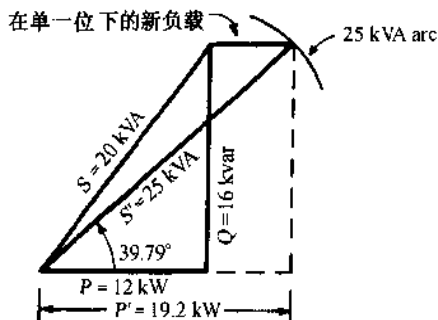


图 10-24

解

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 0.85 \quad \text{或} \quad P_{\text{in}} = \frac{1.5}{0.85} = 1.765 \text{ kW}$$

由功率角可得

$$S_{\text{in}} = \frac{1.765}{0.80} = 2.206 \text{ kVA} \quad Q_{\text{in}} = \sqrt{(2.206)^2 - (1.765)^2} = 1.324 \text{ k乏(感性)}$$

感应电动机的等效电路包含一个可变电阻,是一个轴负载的功能.因此,功率因数是可变的,运行中由开始的0.30到满负载的0.85.

## 补充习题

- 10.23 给定电路中电源电压为  $v = 14.14\cos\omega t$  (V), 引起的电流为  $i = 17.1\cos(\omega t - 14.05^\circ)$  (mA), 求完整的功率角.  
答案:  $P = 117 \text{ mW}$ ,  $Q = 29.3$  毫乏(感性),  $\text{pf} = 0.970$  滞后
- 10.24 给定电路中电源电压为  $v = 340\sin(\omega t - 60^\circ)$  (V) 引起的电流为  $i = 13.3\sin(\omega t - 48.7^\circ)$  (A), 求完整的功率角.  
答案:  $P = 2217 \text{ W}$ ,  $Q = 443$  毫乏(容性),  $\text{pf} = 0.981$  超前
- 10.25 两个元件串联的电路, 其中  $R = 5.0\Omega$ ,  $X_L = 15.0\Omega$ , 电阻两端电压的有效值是  $31.6 \text{ V}$ , 求复功率和功率因数.  
答案:  $200 + j600 \text{ VA}$ ,  $0.316$  滞后
- 10.26 具有复阻抗  $Z = 8.0 - j6.0\Omega$  的电路, 电源的相量电压为  $70.7\angle -90.0^\circ \text{ V}$ , 求完整的功率三角形.  
答案:  $P = 200 \text{ W}$ ,  $Q = 150$  乏(容性),  $\text{pf} = 0.981$  超前
- 10.27 求电路的复阻抗, 该电路在相量电压  $212.1\angle 0^\circ \text{ V}$  的作用下具有复功率为  $S = 5031\angle -26.57^\circ$ .  
答案:  $4.0 - j2.0\Omega$
- 10.28 求相应于视在功率  $3500 \text{ VA}$ , 功率因数  $0.76$  滞后, 以及有效电流为  $18.0 \text{ A}$  的阻抗.  
答案:  $10.8\angle 40.54^\circ\Omega$
- 10.29 两支路并联电路中,  $Z_1 = 10\angle 0^\circ\Omega$ ,  $Z_2 = 8.0\angle -30.0^\circ\Omega$ , 电路的总电流为  $i = 7.07\cos(\omega t - 90^\circ)$  (A), 求完整的功率三角形.  
答案:  $P = 110 \text{ W}$ ,  $Q = 32.9$  乏(容性),  $\text{pf} = 0.958$  超前
- 10.30 两支路并联电路, 支路阻抗是  $Z_1 = 2.0 - j5.0\Omega$  和  $Z_2 = 1.0 + j1.0\Omega$ , 如果  $2.0\Omega$  电阻消耗的功率是  $20 \text{ W}$ , 求完整的功率三角形.  
答案:  $P = 165 \text{ W}$ ,  $Q = 95$  乏(感性),  $\text{pf} = 0.867$  滞后
- 10.31 两支路并联电路, 支路阻抗为  $Z_1 = 4.0\angle -30^\circ\Omega$ ,  $Z_2 = 5.0\angle 60^\circ\Omega$ , 电压源的有效值是  $20 \text{ V}$ . 求支路的功率三角形, 并将其组合得到总的功率三角形.  
答案:  $S_T = 128.1 \text{ VA}$ ,  $\text{pf} = 0.989$  滞后
- 10.32 如图 10-25 所示完整电路, 若支路 1 的无功功率是  $8.0 \text{ k乏}$ , 求电路的复功率.  
答案:  $S = 8 + j12 \text{ kVA}$ ,  $\text{pf} = 0.555$  滞后

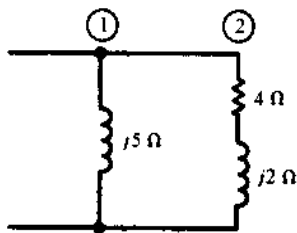


图 10-25

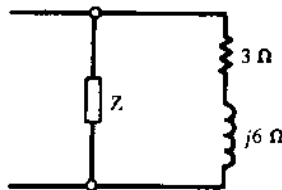


图 10-26

- 10.33 图 10-26 所示电路中, 如果  $S_T = 3373 \text{ VA}$ ,  $\text{pf} = 0.938$  超前, 以及  $3\Omega$  电阻器的平均功率为  $666 \text{ W}$ . 求  $Z$ .  
答案:  $2 - j2\Omega$



- 10.34 图 10-27 所示并联电路中,总的平均功率是 1500W,求总的功率三角形信息。

答案:  $S = 1500 + j2471 \text{ VA}$ ,  $\text{pf} = 0.519$  滞后

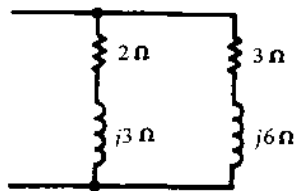


图 10-27

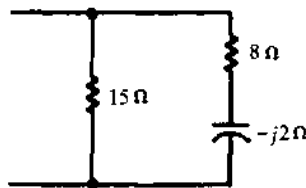


图 10-28

- 10.35 如果图 10-28 中电路总的平均功率是 2000W,求 15  $\Omega$  和 8 $\Omega$  电阻的平均功率。  
答案: 723W, 1277W
- 10.36 一个三支路并联电路,阻抗为  $Z_1 = 25 \angle 15^\circ \Omega$ ,  $Z_2 = 15 \angle 60^\circ \Omega$ ,  $Z_3 = 15 \angle 90^\circ \Omega$ , 电源电压  $V = 339.4 \angle -30^\circ \text{ V}$ . 求总的视在功率和功率因数。  
答案: 4291VA, 0.966 滞后
- 10.37 求以下并联负载时的完整功率三角形: 负载 1, 5kW,  $\text{pf} = 0.80$  滞后; 负载 2, 4kVA, 2k 乏(容性); 负载 3, 6kVA,  $\text{pf} = 0.90$  滞后  
答案: 14.535kVA,  $\text{pf} = 0.954$  滞后
- 10.38 求以下并联负载时的完整功率三角形: 负载 1, 200VA,  $\text{pf} = 0.70$  滞后; 负载 2, 350VA,  $\text{pf} = 0.50$  滞后; 负载 3, 275VA,  $\text{pf} = 1.00$ 。  
答案:  $S = 590 - j444 \text{ VA}$ ,  $\text{pf} = 0.799$  超前。
- 10.39 一个功率因数为 0.75 滞后的 4500VA 的负载由有效值电压为 240V 的 60Hz 的电源供电。求改善功率因数所需并联电容微法数。(a) 提高到 0.90 滞后, (b) 提高到 0.90 超前。  
答案: (a) 61.8  $\mu\text{F}$ ; (b) 212  $\mu\text{F}$
- 10.40 在题 10.39 中, (a) 部分将线电流和总的伏安数减少了百分之多少? (b) 部分又减少了多少?  
答案: 16.1%, 无
- 10.41 增加 20k 乏的电容使一定负载的功率因数提高到 0.90 滞后。如果最后视在功率是 185kVA, 求增加电容前的复功率。  
答案:  $S = 166.5 + j100.6 \text{ kVA}$
- 10.42 一个功率因数为 0.80 滞后的 25kVA 的负载有一组电阻性发热单元为单位功率因数。如果新的总功率因数为 0.85 滞后, 则这些发热单元取多少 kW?  
答案: 4.2kW
- 10.43 一个 500kVA 的变压器在满负载时功率因数是 0.60 滞后。加上一个电容使功率因数提高到 0.90 滞后。改善后, 变压器的负载是额定 kVA 的百分之多少?  
答案: 66.7%
- 10.44 一个 100kVA 变压器工作在额定负载的 80%, 功率因数为 0.85 滞后。增加多少 kVA 的功率因数为 0.60 滞后的负载使变压器满额定负载工作?  
答案: 21.2kVA
- 10.45 一个 250kVA 的变压器在满负载时功率因数是 0.80 滞后。(a) 若使功率因数提高到 0.90 滞后要增加多少 k 乏的电容? (b) 功率因数提高后, 增加功率因数为 0.50 滞后的新负载。多少 kVA 的新负载使变压器回到额定功率? 最后的功率因数是多少?  
答案: (a) 53.1k 乏(容性) (b) 33.35kVA, 0.867 滞后
- 10.46 一个具有滞后功率因数的 65kVA 的负载与一个  $\text{pf} = 0.60$  超前的 25kVA 的同步电机负载连接。如果总的功率因数是 0.85 滞后, 求 65kVA 的负载的功率因数。  
答案: 0.585 滞后
- 10.47 一个感应电动机有 2000kVA, 功率因数是 0.80 滞后。加上的总和为 500kVA 并在超前功率因数下运行的同步电动机。如果总的功率因数为 0.90 滞后, 同步电动机的功率因数是多少?  
答案: 0.92 超前。

## 第11章 多相电路

### 11.1 引言

由正弦电源传输到阻抗上的瞬时功率为

$$p(t) = v(t)i(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) \quad (1)$$

这里,  $V_p$  和  $I_p$  是  $v$  和  $i$  的均方根值,  $\theta$  是它们间的相角. 功率在  $V_p I_p (1 - \cos \theta)$  和  $V_p I_p (-1 + \cos \theta)$  间振荡. 在电力系统中, 特别在较高功率时, 希望从电源向负载提供一个稳定的功率. 因此, 常使用多相系统. 多相系统的另一个优点是在线上同时有多个电压值. 在多相系统中,  $V_p$  和  $I_p$  分别是一个相的电压和电流, 与其他相的电压和电流是不同的. 本章主要讨论三相电路, 这是标准的工业电路. 其中, 也涉及到了二相电路.

### 11.2 二相系统

一台平衡的两相发电机有两组电压源. 电压源产生相同的幅值和频率, 但相位差  $90^\circ$  或  $180^\circ$ . 在这样一个系统中, 由于它给用户两种电压和两种磁场的选择, 因而有许多优点. 其功率可以是恒定的或脉冲式的.

**例 11.1** 一台交流发电机有两个电压源, 电压有相同的幅值和频率, 但相位差  $90^\circ$ . 电源的基准点连接起来构成发电机的参考点  $n$ . 该系统带有两个相同的负载 [图 11-1(a)]. 求发电机的总的电流、电压、瞬时功率和平均功率.

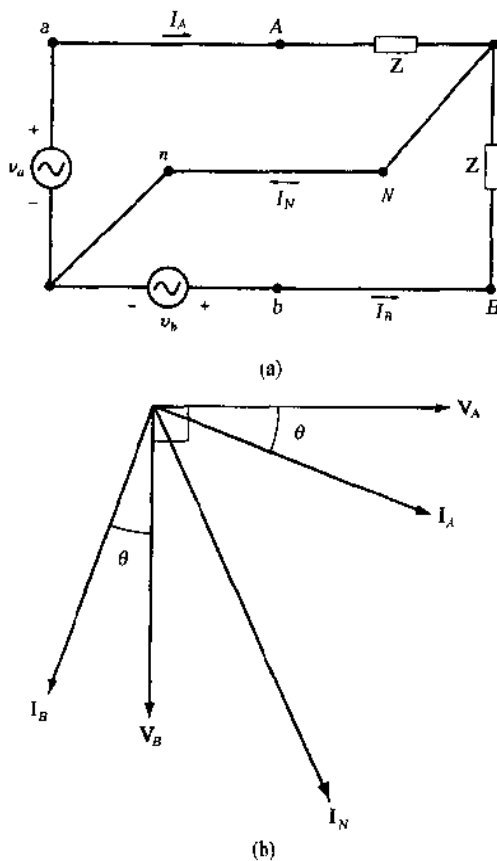


图 11-1

在发电机两端的端电压和电流为

$$\begin{aligned} v_a(t) &= V_p \sqrt{2} \cos \omega t & v_b(t) &= V_p \sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ) \\ i_a(t) &= I_p \sqrt{2} \cos(\omega t - \theta) & i_b(t) &= I_p \sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ - \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

在相量域中, 令  $\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta$  及  $I_p = V_p / |\mathbf{Z}|$  则

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{AN} &= V_p \angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{BN} = V_p \angle (-90^\circ), \quad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = \sqrt{2} V_p \angle 45^\circ \\ \mathbf{I}_A &= I_p \angle (-\theta), \quad \mathbf{I}_B = I_p \angle (-90^\circ - \theta), \quad \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = I_p \sqrt{2} \angle (-45^\circ - \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

电压和电流相量示于图 11-1(b).

两个电源产生的瞬时功率  $p_a(t)$  和  $p_b(t)$  为

$$\begin{aligned} p_a(t) &= v_a(t) i_a(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) \\ p_b(t) &= v_b(t) i_b(t) = V_p I_p \cos \theta - V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) \end{aligned}$$

发电机产生的总的瞬时功率  $p_T(t)$  是

$$\begin{aligned} p_T(t) &= p_a(t) + p_b(t) \\ &= V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) + V_p I_p \cos \theta - V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) \\ &= 2 V_p I_p \cos \theta \end{aligned}$$

这样,

$$p_T(t) = P_{avg} = 2 V_p I_p \cos \theta \quad (4)$$

在图 11-1(a) 系统中, 二个电压值  $V_p$  和  $\sqrt{2} V_p$  用于负载, 功率是恒定的. 另外, 在两个电压之间的  $90^\circ$  相位移, 可以在某些应用中产生一个所需的特定的旋转磁场.

### 11.3 三相系统

三相发电机保持三个正弦电压源, 有相同频率的电压, 但相互之间有  $120^\circ$  相位移. 这是由于在同一转子上放置三个相位差  $120^\circ$  度的线圈实现的. 通常, 三相的幅值相等, 发电机处于平衡状态. 在图 11-2 中, 三个线圈被等距地放在转子周边, 即线圈相互之间偏移  $120^\circ$  机械角度. 线圈的尾端和集电环没有画出. 显然, 线圈的 A, B, C 端逆时针旋转导致线圈按  $\cdots A-B-C-A-B-C \cdots$  的顺序通过磁极. 对于磁极的每一次变化, 电压的极性都在变换. 假设磁极形状和相应的磁通密度所感应产生的电压是正弦波形, 三个线圈产生电压的最终结果示于图 11-3. 电压 B 落后于电压 A  $120^\circ$  相位角, C 落后于 A  $240^\circ$  相位角. 这被称为 ABC 相序. 改变旋转方向, 使得以  $\cdots A-C-B-A-C-B \cdots$  的顺序称为 CBA 相序.

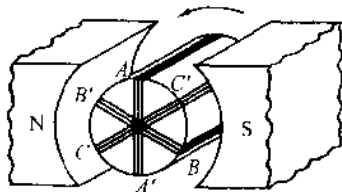


图 11-2

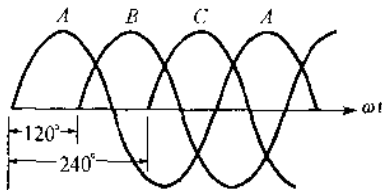


图 11-3

在时域和相量域中平衡的 ABC 相序的电压分别由(5)和(6)式中给出. 电压的相量图示于图 11-4.

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= (V_p \sqrt{2}) \cos \omega t & v_{bn}(t) &= (V_p \sqrt{2}) \cos(\omega t - 120^\circ) \\ v_{cn}(t) &= (V_p \sqrt{2}) \cos(\omega t - 240^\circ) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle (-120^\circ), \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p \angle (-240^\circ) \quad (6)$$

### 11.4 Y 和 Δ 系统

线圈的尾端以 Y 形连接, 即将 A', B', C' 连接到一个公共点. 此点称为中性点 N. 而 A, B, C

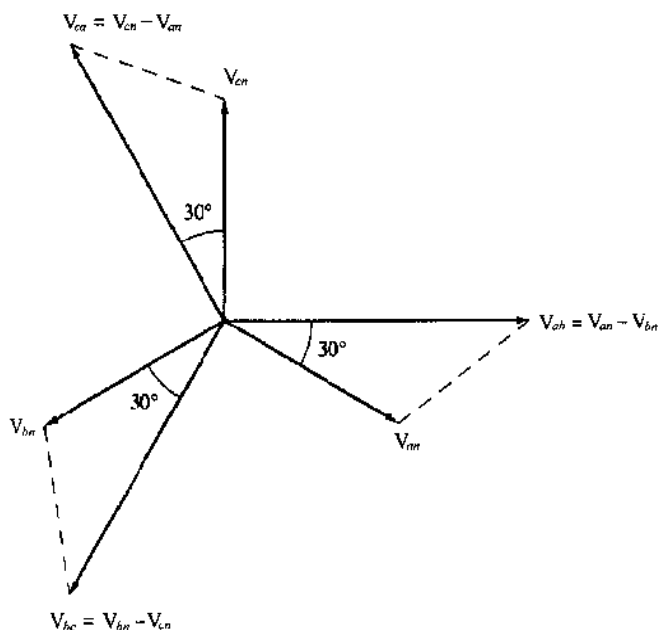


图 11-4

引出为三相系统的 A, B, C 三线. 中性点与三线一起就构成了三相四线系统. 在图 11-5 中, 在电源端导线, 用小写字母 a, b, c 标示, 电源端可以是变压器组也可以是交流发电机. 而在负载端用大写字母 A, B, C 标示. 如果必须考虑线阻抗, 则通过如线 aA 的电流方向为  $I_{aA}$ , 而相量线电压降为  $V_{aA}$ .

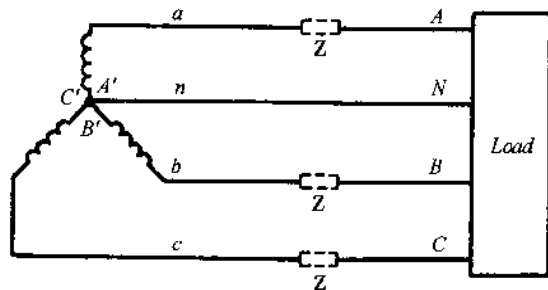


图 11-5

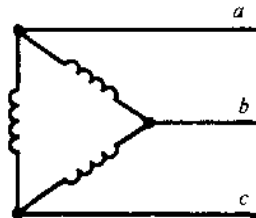


图 11-6

发电机线圈的尾端可以连接成图 11-6 所示. 成为  $\Delta$  连接形式, 具有 a, b, c 线的三相系统. 除非通过使用  $\Delta$ -Y 变压器方式外, 一个  $\Delta$  连接的线圈组没有中性点来构成四线系统.

### 11.5 相量电压

在三相系统中, 选定一个电压的相位角就确定了其他电压的相位角. 这就相当于固定了图 11-3 的水平轴上  $t=0$  点, 而这一点可以任意指定. 在这一章中, 零角度总是与线 B 关于线 C 的相量电压相关联:  $V_{BC} = V_L \angle 0^\circ$ .

习题 11.4 表明线对线电压  $V_L$  是  $\sqrt{3}$  倍的线对点电压. 全部 ABC 相序电压示于图 11-7 (a) 中, CBA 电压在图 11-7 (b) 中. 和前而章节中一样, 这些相量电压反映最大值. 三相四线, 480V 系统广泛应用于工业负载, 而 208V 系统一般用于商业建筑中. 在这些系统中, 常给定有效值. 在这一章, 所构成的系统中, 线-线电压是  $V_{BC} = 678.8 \angle 0^\circ \text{V}$ , 则  $V_{BC\text{eff}} = 678.8 / \sqrt{2} = 480 \text{V}$ .

在这个领域中工作的人们使用有效值相量, 常写作  $V_{BC} = 480 \angle 0^\circ \text{V}$ .

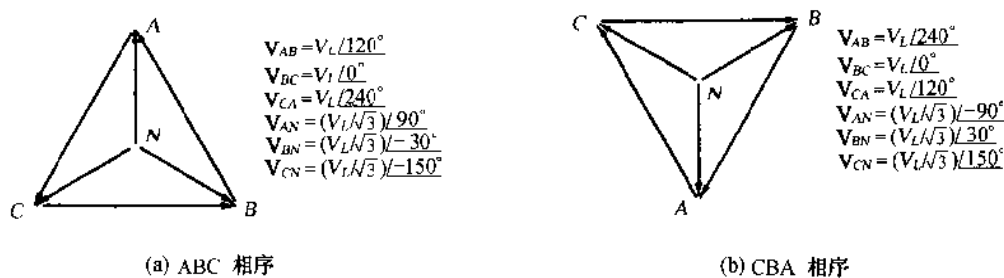


图 11-7

11.6 平衡的  $\Delta$  连接负载

三个相同的阻抗如图 11-8 所示进行连接可构成一个平衡的  $\Delta$  连接负载. 阻抗上的电流被认为是相电流或负载电流, 三个电流的幅值相等, 相互间的相位相差  $120^\circ$ . 线电流在幅值上也相等, 和另一个线电流相位相差  $120^\circ$ . 习惯上, 给定一个从电源到负载的电流方向.

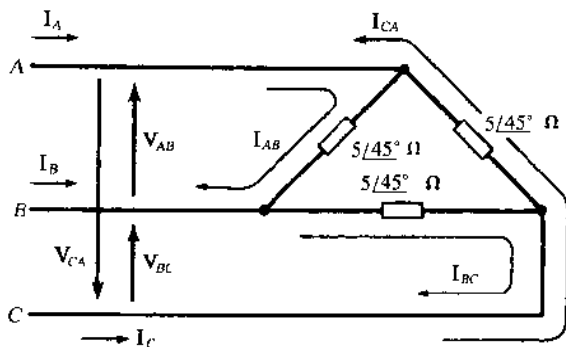


图 11-8

**例 11.2** 一个三相三线 ABC 系统, 线电压的有效值为 120V, 有一个  $5.0 \angle 45^\circ \Omega$  的阻抗以  $\Delta$  方式连接. 确定线电流, 并画出电压—电流相量图.

最大的线电压是  $120\sqrt{2} = 169.7\text{V}$ . 参考图 11-7(a), 电压为

$$V_{AB} = 169.7 \angle 120^\circ \text{V}, \quad V_{BC} = 169.7 \angle 0^\circ \text{V}, \quad V_{CA} = 169.7 \angle 240^\circ \text{V}$$

下标给了相电流的方向. 例如,  $I_{AB}$  从线 A 到线 B 通过阻抗. 所有电流方向示于图 11-8 中. 相电流为

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{169.7 \angle 120^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 33.9 \angle 75^\circ \text{A} \\ I_{BC} &= \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{169.7 \angle 0^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 33.9 \angle (-45^\circ) \text{A} \\ I_{CA} &= \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{169.7 \angle 240^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 33.9 \angle 195^\circ \text{A} \end{aligned}$$

由 KCL, 线电流  $I_A$  为

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 33.9 \angle 75^\circ \text{A} - 33.9 \angle 195^\circ \text{A} = 58.7 \angle 45^\circ \text{A}$$

同样,

$$I_B = 58.7 \angle (-75^\circ) \text{A}, \quad I_C = 58.7 \angle 165^\circ \text{A}.$$

线—线电压和全部电流相量图在 11-9 中给出. 特别注意电流的平衡. 在一个相电流被计算出来后, 其他电流都可以通过相量图的对称性得到. 注意  $33.9 \times \sqrt{3} = 58.7$ , 即对于平衡  $\Delta$  负载有  $I_L = \sqrt{3} I_{ph}$ .

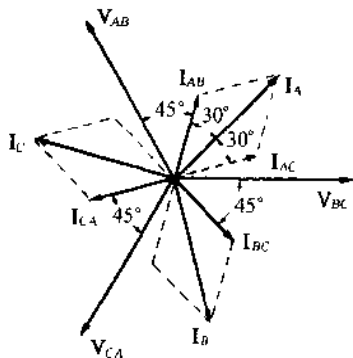


图 11-9

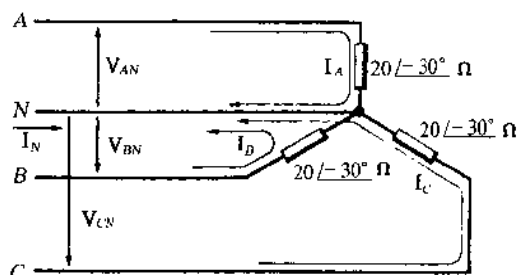


图 11-10

### 11.7 平衡的四线 Y 连接负载

三个相同的阻抗如图 11-10 所示连接构成平衡的 Y 形连接负载. 阻抗中的电流也是线电流. 和前面一样, 电流的方向也是从电源到负载.

**例 11.3** 一个三相四线 CBA 系统, 线电压的有效值为 120V, 有三个  $20 \angle (-30^\circ)$  的阻抗以 Y 形连接(图 11-10). 确定线电流并画出电压—电流相量图.

线电压的最大值是 169.7V, 并且线对中性点电压的幅值为  $169.7/\sqrt{3} = 98.0\text{V}$ . 由图 11-7(b)

$$V_{AN} = 98.0 \angle (-90^\circ) \text{V} \quad V_{BN} = 98.0 \angle 30^\circ \text{V} \quad V_{CN} = 98.0 \angle 150^\circ \text{V}$$

则

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{98.0 \angle -90^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 4.90 \angle (-60^\circ) \text{A}$$

类似,  $I_B = 4.90 \angle 60^\circ \text{A}$ ,  $I_C = 4.90 \angle 180^\circ \text{A}$ .

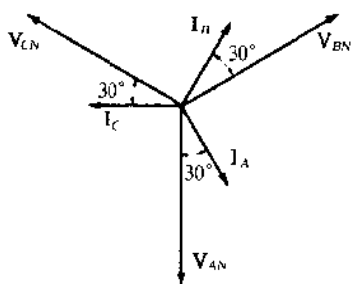


图 11-11

电压—电流相量图示于图 11-11 中. 注意计算出一个线电流, 其他两个可以通过相量图的对称性得到. 所有三个线电流通过中性点返回. 因此, 中性点电流是线电流之和的负数.

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = 0$$

由于 Y 形连接平衡的三相负载的中性点电流总为零, 为了计算方便, 中性点导体可以被去掉而对结果没有影响. 在实际功率电路中, 决不能在物理连接上把它去掉. 这是因为它要承载(小的)非平衡电流, 用于保护装置的运行承载短路电流或故障电流, 以及防止负载相上的过电压. 由于例 11.3 中进行计算没有困难, 在平衡负载的情况下计算线电流时仍包括

中性点, 即使系统实际上是三线的情况.

### 11.8 Y 和 $\Delta$ 连接的等效

图 11-12 显示了以  $\Delta$  方式连接的三个阻抗和以 Y 方式连接的三个阻抗的结构. 三个连接在一起的端点用字母  $\alpha, \beta, \gamma$  来标识. 在 Y 连接中,  $Z_1$  是连着端点  $\alpha$  的阻抗, 在  $\Delta$  连接中,  $Z_1$  是对着端点  $\alpha$  的阻抗等等. 由任意两个端点看去, 如果相应的输入、输出和转移阻抗是相等的, 则两种连接是等效的. 等效的判断如下:

Y 到  $\Delta$  转换

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1}$$

 $\Delta$  到 Y 转换

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

注意, 如果某种连接的三个阻抗相等, 则等效连接有  $Z_\Delta/Z_Y = 3$ .

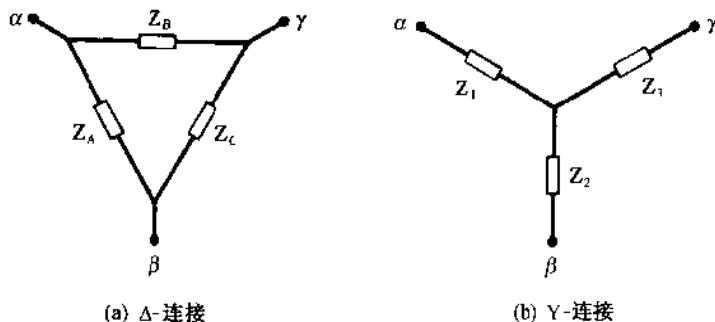


图 11-12

### 11.9 平衡三相负载的单线等效电路

图 11-13(a) 显示为一个平衡的 Y 连接负载. 在许多情况下, 如功率计算中, 仅需要三线电流的公共电流值  $I_L$ , 它可以从图 11-13(b) 所示的单线等效电路得到. 线对中性点电压随意给定为 0 相位角, 这就使得  $I_L = I_L \angle -\theta$ ,  $\theta$  是阻抗角. 如果希望求出实际线电流  $I_A, I_B, I_C$ , 它们的相位角可以用  $V_{AN}, V_{BN}, V_{CN}$  的相位角加上  $-\theta$  得到. 如图 11-7 所示. 可知,  $I_L$  的相角给每一相的功率因数为,  $\text{pf} = \cos\theta$ .

如果  $\Delta$  连接的负载用它的 Y 等效电路置换,  $Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta$  (11.8 节), 则这种方法可以用于平衡的  $\Delta$  连接负载.

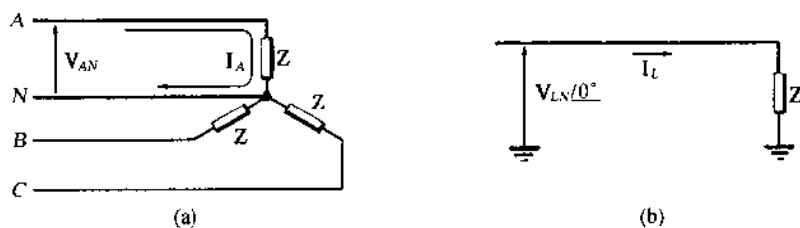


图 11-13

#### 例 11.4 用单线等效方法再解例 11.3.

参考图 11-14 (此处符号 Y 表示初始负载连接形式)

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{98.0 \angle 0^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 4.90 \angle 30^\circ \text{ A}$$

由图 11-7(b) 可知,  $V_{AN}, V_{BN}, V_{CN}$  的相位角是  $-90^\circ, 30^\circ$  和  $150^\circ$ . 因此,

$$I_A = 4.90 \angle -60^\circ \text{ A} \quad I_B = 4.90 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = 4.90 \angle 180^\circ \text{ A}$$

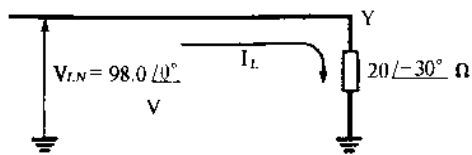


图 11-14

### 11.10 非平衡 $\Delta$ 连接负载

非平衡  $\Delta$  连接负载的求解在于计算相电流, 然后利用 KCL 表达式得到线电流. 由于这些电流不相等, 因此没有平衡情况的对称性.

例 11.5 一个 339.4V 的三相 ABC 系统, 有  $\Delta$  连接负载

$$Z_{AB} = 10 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 10 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 15 \angle -30^\circ \Omega$$

求相电流和线电流并画出相量图.

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{339.4 \angle 120^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 33.94 \angle 120^\circ \text{ A}$$

同样,  $I_{BC} = 33.94 \angle -30^\circ \text{ A}$ ,  $I_{CA} = 22.63 \angle 270^\circ \text{ A}$ , 则

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 33.94 \angle 120^\circ - 22.63 \angle 270^\circ = 54.72 \angle 108.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = 65.56 \angle -45^\circ \text{ A}, \quad I_C = 29.93 \angle -169.1^\circ \text{ A}$$

电压—电流相量图示于图 11-15(b) 中, 并具有幅值和角度.

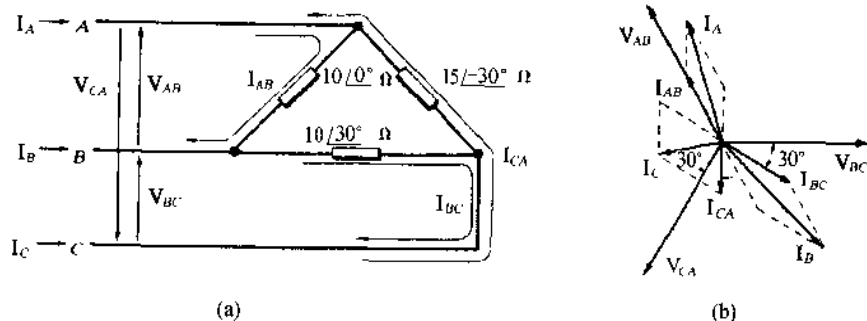


图 11-15

### 11.11 非平衡 Y 连接负载

#### 四线

中性点导线承载了 Y 连接负载的非平衡电流, 并保持了每一相负载两端的线对中性点的电压幅值. 其线电流是不相等的, 并且在相量图中电流也不对称.

例 11.6 一个三相四线 150V 的 CBA 系统, 有 Y 连接负载, 且  $Z_A = 6 \angle 0^\circ \Omega$ ,  $Z_B = 6 \angle 30^\circ \Omega$ ,  $Z_C = 5 \angle 45^\circ \Omega$ , 求所有线电流并画出相量图. 参看图 11-16(a).

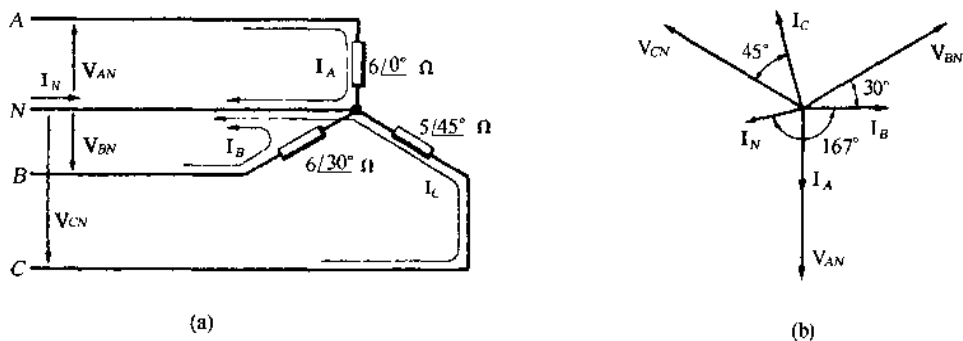


图 11-16

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{86.6 \angle -90^\circ}{6 \angle 0^\circ} = 14.43 \angle -90^\circ \text{ A}$$



$$I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = \frac{86.6 \angle 30^\circ}{6 \angle 30^\circ} = 14.43 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = \frac{86.6 \angle 150^\circ}{5 \angle 45^\circ} = 17.32 \angle 105^\circ \text{ A}$$

$$I_N = -(14.43 \angle -90^\circ + 14.43 \angle 0^\circ + 17.32 \angle 105^\circ) = 10.21 \angle -167.0^\circ \text{ A}$$

图 11-16(b) 是其相量图。

### 三线

由于没有中性点导线, Y 连接阻抗有一个来自线对中性点的幅值变化较显著的电压。

**例 11.7** 图 11-17(a) 表示了与例 11.6 同样的系统, 但没有中性点导线。求线电流并找出替代的中性点电压  $V_{ON}$ 。

电路重画如图 11-17(b) 所示, 有一个带有未知的节点电压  $V_{OB}$  的方程

$$\frac{V_{OB} - V_{AB}}{Z_A} + \frac{V_{OB}}{Z_B} + \frac{V_{OB} + V_{BC}}{Z_C} = 0$$

$$V_{OB} \left( \frac{1}{6 \angle 0^\circ} + \frac{1}{6 \angle 30^\circ} + \frac{1}{5 \angle 45^\circ} \right) = \frac{150 \angle 240^\circ}{6 \angle 0^\circ} - \frac{150 \angle 0^\circ}{5 \angle 45^\circ}$$

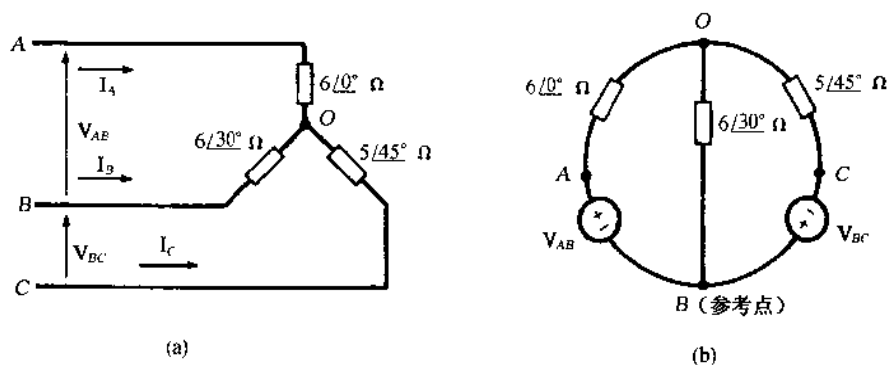


图 11-17

由  $V_{OB} = 66.76 \angle -152.85^\circ \text{ V}$  可得出

$$I_B = -\frac{V_{OB}}{Z_B} = 11.13 \angle -2.85^\circ \text{ A}$$

由  $V_{OA} + V_{AB} = V_{OB}$ ,  $V_{OA} = 100.7 \angle 81.08^\circ \text{ V}$ , 那么

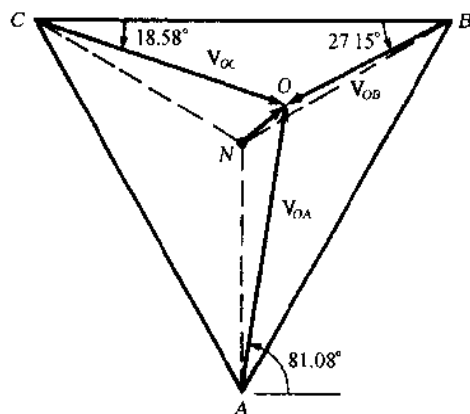


图 11-18

$$I_A = -\frac{V_{QA}}{Z_A} = 16.78 \angle -98.92^\circ \text{ A}$$

同样,  $V_{OC} = V_{OB} - V_{CB} = 95.58 \angle -18.58^\circ \text{ V}$ , 而

$$I_C = 19.12 \angle 116.4^\circ \text{ A}$$

从中性点 N 到点 O 偏移了一个相量电压  $V_{ON}$ ,

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = 100.7 \angle 81.08^\circ + \frac{150}{\sqrt{3}} \angle -90^\circ = 20.24 \angle 39.53^\circ \text{ V}$$

图 11-18 的相量图显示了等边三角形的重心 O 点的移动. 另一种方法参见题 11-13.

### 11.12 三相功率

由三相平衡发电机到三个具有相位角  $\theta$  的相等阻抗所产生的功率为

$$p_a(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_b(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta)$$

$$p_c(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta)$$

$$p_T(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = 3 V_p I_p \cos \theta + V_p I_p [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta)]$$

而对于所有的  $t$ ,  $\cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta) = 0$ , 因此,

$$p_T(t) = 3 V_p I_p \cos \theta = P$$

总的瞬时功率和总的平均功率相同, 可以写成线电压  $V_L$  和线电流  $I_L$  的形式. 则

$$\text{在 } \Delta \text{ 系统中, } V_L = V_p \text{ 及 } I_L = \sqrt{3} I_p, \text{ 因此 } P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

$$\text{在 Y 系统中, } V_L = \sqrt{3} V_p \text{ 及 } I_L = I_p, \text{ 因此 } P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

表达式  $\sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$  给出了三相平衡系统的功率, 而不考虑连接的结构. 三相系统的功率因数是  $\cos \theta$ . 在工业系统中线电压  $V_L$  总是知道的. 如果负载是平衡的, 总功率可以由线电流和功率因数计算得出.

总之, 在三相系统中, 功率、无功功率、视在功率和功率因数分别为

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad Q = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta \quad S = \sqrt{3} V_L I_L \quad \text{pf} = \frac{P}{S}$$

当然, 所有的电压和电流都是有效值.

### 11.13 功率测量和两瓦特表法

一个交流瓦特表有一个电压线圈和一个电流线圈, 并且对电压有效值、电流有效值和它们之间相角的余弦值的乘积进行响应. 在图 11-19 中, 瓦特表将指示提供到无源网络的平均功率.

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta = R_e(V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^*)$$

(见 10.7 节)

在三相三线系统中的任意两条线上接入两个瓦特表, 其读数之和直接显示出全部三相的功率. 如果在电压和电流之间的相位角超过了  $90^\circ$ , 该表的读数将趋向负值. 在这种情况下, 电流线圈可以反接并且

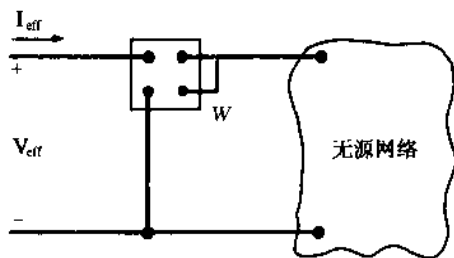


图 11-19

将读数在求和中以负数处理. 在图 11-20 中, 功率表接在 A 和 C 线中, 电势线圈以 B 线作参考. 它们的读数是

$$W_A = R_e(V_{AB\text{eff}} I_{A\text{eff}}^*) = R_e(V_{AB\text{eff}} I_{AB\text{eff}}^*) + R_e(V_{AB\text{eff}} I_{AC\text{eff}}^*)$$

$$W_C = R_e(V_{CB\text{eff}} I_{C\text{eff}}^*) = R_e(V_{CB\text{eff}} I_{CA\text{eff}}^*) + R_e(V_{CB\text{eff}} I_{CB\text{eff}}^*)$$

KCL 表达式  $I_A = I_{AB} + I_{AC}$  及  $I_C = I_{CA} + I_{CB}$  常用夹将线电流用相电流来代替. 在  $W_A$  中,

第一项被认为是  $P_{AB}$ , 为  $\Delta$  负载的  $AB$  相的平均功率. 同样,  $W_C$  的第二项是  $P_{CB}$ . 两个方程相加, 合并中间项, 根据 KVL 表达式,  $V_{AB} - V_{CB} = V_{AC}$ , 有:

$$W_A + W_C = P_{AB} + R_e[(V_{ABeff} - V_{CBeff})I_{ACeff}^*] + P_{CB} = P_{AB} + P_{AC} + P_{CB}$$

同理, Y 连接负载的结果类似.

### 平衡负载

三个相等阻抗  $Z \angle \theta$  以  $\Delta$  方式连接时, 相电流与它们的合成线电流有  $30^\circ$  夹角. 假定 ABC 相序时, 图 11-21 对应于图 11-20. 可知,  $V_{AB}$  超前  $I_A$  角度  $\theta + 30^\circ$ , 而  $V_{CB}$  超前  $I_C$  角度  $\theta - 30^\circ$ . 所以, 两个瓦特表读数为

$$W_A = V_{ABeff} I_{Aeff} \cos(\theta + 30^\circ)$$

$$W_C = V_{CBeff} I_{Ceff} \cos(\theta - 30^\circ)$$

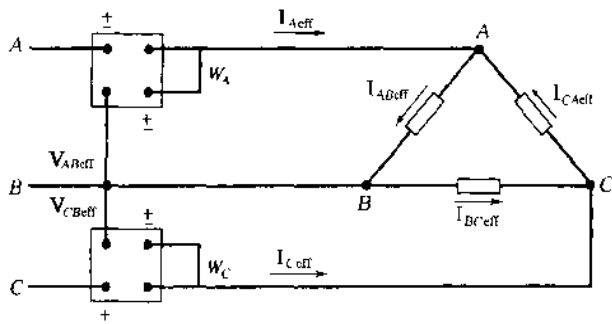


图 11-20

而一般情况下, 我们并不知道所选定的两条线的电压顺序, 可以写成

$$W_1 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta + 30^\circ)$$

$$W_2 = V_{Leff} I_{Leff} \cos(\theta - 30^\circ)$$

这些表达式也适用于平衡的 Y 连接方式.

消去两个读数间的  $V_{Leff} I_{Leff}$ , 可得

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left( \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right)$$

这样, 从瓦特表的读数中可以推导出阻抗角  $\theta$  的数值. 由于下标值 1 和 2 可以任意互换, 所以上面公式假定的  $\tan \theta$  的符号是无意义的. 然而在实际中, 平衡阻抗常是感性的 ( $\theta > 0$ ).

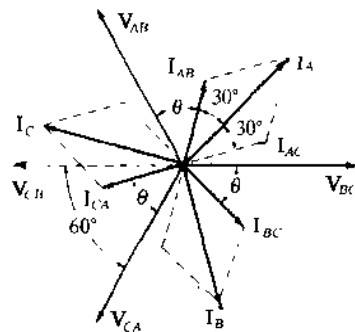


图 11-21

### 习题及解答

- 11.1 图 11-22 的两相平衡交流发电机有两个相等的负载. 两个电压源有  $180^\circ$  相位差. 求: (a) 线电流、线电压及它们的相位角. (b) 由发电机产生的瞬时功率和平均功率.

解 设:  $Z = |Z| \angle \theta$  及  $I_p = V_p / |Z|$

(a) 在相量域中的电压和电流为

$$V_{AN} = V_p \angle 0^\circ \quad V_{BN} = V_p \angle 180^\circ = V_p \angle 0^\circ \quad V_{AB} = V_{AN} \quad V_{BN} = 2V_p \angle 0^\circ$$

由上面给定的  $I_p$  和  $Z$ , 有

$$I_A = I_p \angle -\theta \quad I_B = I_p \angle (-180^\circ - \theta) = -I_p \angle -\theta \quad I_N = I_A + I_B = 0$$

(b) 产生的瞬时功率是

$$p_a(t) = v_a(t)i_a(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_b(t) = v_b(t)i_b(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

总的瞬时功率  $p_T(t)$  是

$$p_T(t) = p_a(t) + p_b(t) = 2V_p I_p \cos \theta + 2V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

平均功率为

$$P_{avg} = 2V_p I_p \cos \theta$$

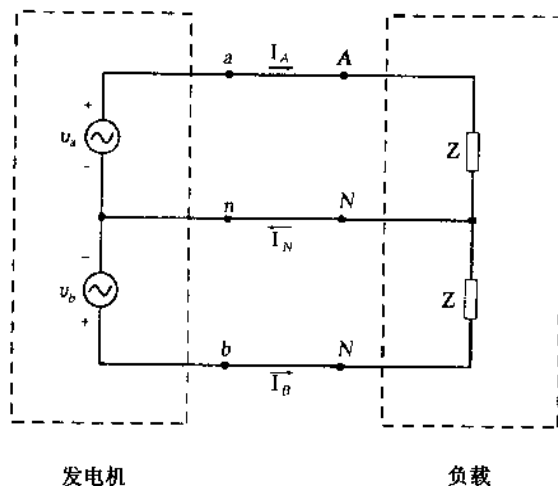


图 11-22

11.2 求解习题 11.1, 给定  $V_p = 110\text{V}$  (均方根) 及  $Z = 4 + j3\Omega$ .

解 (a) 用相量形式,  $Z = 4 + j3 = 5\angle 36.9^\circ\Omega$ , 则

$$V_{AN} = 110\angle 0^\circ\text{V} \quad V_{BN} = 110\angle -180^\circ\text{V}$$

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} = 110\angle 0^\circ - 110\angle -180^\circ = 220\angle 0^\circ\text{V}$$

$$I_A = V_{AN}/Z = 22\angle -36.9^\circ\text{A} \quad I_B = V_{BN}/Z = 22\angle -216.9^\circ = -22\angle -36.9^\circ\text{A}$$

$$I_N = I_A + I_B = 0$$

$$(b) p_a(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ - \cos(2\omega t - 36.9^\circ)] = 1936 + 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

$$p_b(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos(2\omega t - 36.9^\circ - 360^\circ)] = 1936 + 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) = 3872 + 4840\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

$$P_{avg} = 3872 \text{ (W)}$$

11.3 重复题 11.2, 但用题 11.1 的两个电压源, 相位差  $90^\circ$ .

解 (a)  $Z = 5\angle 36.9^\circ$ , 则

$$V_{AN} = 110\angle 0^\circ\text{V} \quad V_{BN} = 110\angle -90^\circ\text{V}$$

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} = 110\angle 0^\circ - 110\angle -90^\circ = 110(\sqrt{2}\angle -45^\circ) = 155.6\angle -45^\circ\text{V}$$

$$\text{及 } I_A = V_{AN}/Z = 22\angle -36.9^\circ\text{A} \quad I_B = V_{BN}/Z = 22\angle -126.9^\circ\text{A}$$

$$I_N = I_A + I_B = 22\angle -36.9^\circ + 22\angle -126.9^\circ = 22(\sqrt{2}\angle -81.9^\circ) = 31.1\angle -81.9^\circ\text{A}$$

$$(b) p_a(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos(2\omega t - 36.9^\circ)] = 1936 + 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

$$p_b(t) = 110(22)[\cos 36.9^\circ + \cos(2\omega t - 36.9^\circ - 180^\circ)] = 1936 - 2420\cos(2\omega t - 36.9^\circ) \text{ (W)}$$

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) = 2(1936) = 3872 \text{ (W)}$$

$$P_{avg} = p(t) = 3872 \text{ (W)}$$

11.4 证明在一个三相系统中, 线—线电压  $V_L$  是线—中性点电压  $V_{ph}$  的  $\sqrt{3}$  倍.

解 参考 ABC 序的电压相量图 (图 11-23).

11.5 一个 ABC 序的三相系统, 有效值电压为  $70.7\text{V}$ , 具有阻抗为  $20\angle 45^\circ\Omega$  的  $\Delta$  连接的平衡负载. 求线电流并画出电压—电流相量图.

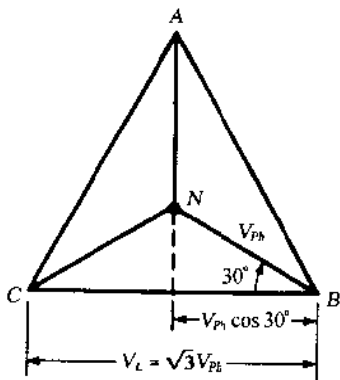


图 11-23

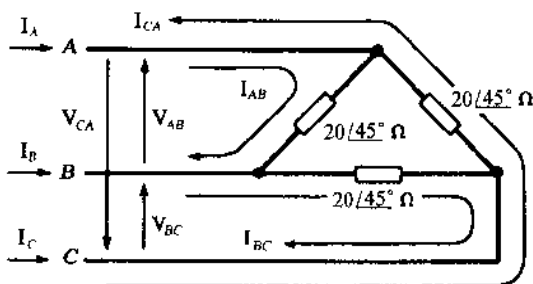


图 11-24

解 电路示于图 11-24 中. 相量电压的幅值  $V_{\max} = \sqrt{2} V_{\text{eff}} = 100\text{V}$ , 相位角从图 11-7(a) 得到, 则

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{100 \angle 120^\circ}{20 \angle 45^\circ} = 5.0 \angle 75^\circ \text{A}$$

同样,  $I_{BC} = 5.0 \angle -45^\circ \text{A}$ ,  $I_{CA} = 5.0 \angle 195^\circ \text{A}$ . 线电流为

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 5.0 \angle 75^\circ - 5.0 \angle 195^\circ = 8.65 \angle 45^\circ \text{A}$$

同理

$$I_B = 8.65 \angle -75^\circ \text{A}, I_C = 8.65 \angle 165^\circ \text{A}.$$

电压—电流相量图示于图 11-25 中.

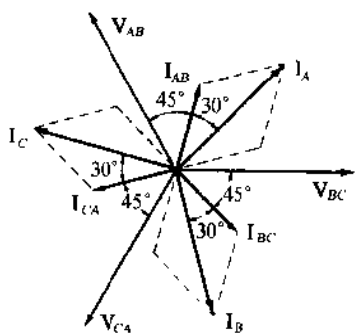


图 11-25

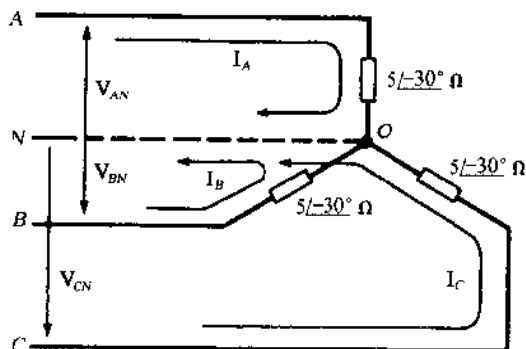


图 11-26

- 11.6 一个三相三线 CBA 系统, 线电压有效值为  $106.1\text{V}$ , 具有阻抗为  $5 \angle -30^\circ \Omega$  的 Y 形连接平衡负载. (图 11-26). 求电流并画出电压—电流相量图.

解 平衡 Y 形负载的中性点导线没有电流. 进一步考虑到此系统是三线的, 可以增加中性点以简化线电流的计算. 线电压的幅值是  $V_L = \sqrt{2}(106.1) = 150\text{V}$ . 这样线—中性点电压的幅值是  $V_{LN} = 150/\sqrt{3} = 86.6\text{V}$

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{86.6 \angle -90^\circ}{5 \angle -30^\circ} = 17.32 \angle -60^\circ \text{A}$$

同理  $I_B = 17.32 \angle 60^\circ \text{A}$ ,  $I_C = 17.32 \angle 180^\circ \text{A}$

相量图见图 11-27. 图中平衡的线电流组超前线—中性点电压  $30^\circ$ , 为阻抗角(负值).

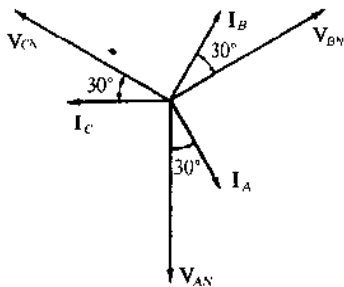


图 11-27

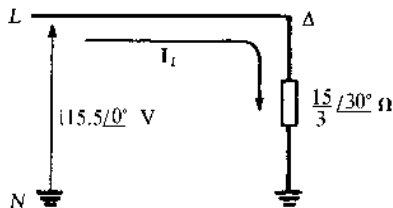


图 11-28

- 11.7 一个三相三线 CBA 系统, 线电压有效值为 106.1V, 具有阻抗为  $Z = 15 \angle 30^\circ \Omega$  的平衡  $\Delta$  形连接负载. 用单线等效电路方法求线和相电流.

解 参见图 11-28,  $V_{L,N} = (141.4\sqrt{2})/\sqrt{3} = 115.5 \text{ V}$

$$I_L = \frac{115.5 \angle 0^\circ}{(15/3) \angle 30^\circ} = 23.1 \angle -30^\circ \text{ A}$$

线电流滞后 ABC 相序(线—中性点电压)  $30^\circ$ .

$$I_A = 23.1 \angle 60^\circ \text{ A} \quad I_B = 23.1 \angle -60^\circ \text{ A} \quad I_C = 23.1 \angle 180^\circ \text{ A}$$

相电流具有幅值  $I_{ph} = I_L/\sqrt{3} = 13.3 \text{ A}$ , 滞后相应的线—线电压  $30^\circ$ .

$$I_{AB} = 13.3 \angle 90^\circ \text{ A} \quad I_{BC} = 13.3 \angle -30^\circ \text{ A} \quad I_{CA} = 13.3 \angle 210^\circ \text{ A}$$

画出相量图会使各角度更清楚.

- 11.8 一个线电压有效值为 176.8V 的三相三线系统, 有两个平衡负载. 一个以  $\Delta$  方式连接,  $Z_\Delta = 15 \angle 0^\circ \Omega$ . 另一个以 Y 方式连接,  $Z_Y = 10 \angle 30^\circ \Omega$ . 求总功率.

解 首先将  $\Delta$  负载转换为 Y 负载, 然后使用图 11-29 所示的单线等效电路求出线电流.

$$I_L = \frac{144.3 \angle 0^\circ}{5 \angle 0^\circ} + \frac{144.3 \angle 0^\circ}{10 \angle 30^\circ} = 42.0 \angle -9.9^\circ \text{ A}$$

则

$$P = \sqrt{3} V_{L,eff} I_{L,eff} \cos \theta = \sqrt{3} (176.8) (29.7) \cos 9.9^\circ = 8959 \text{ W}$$

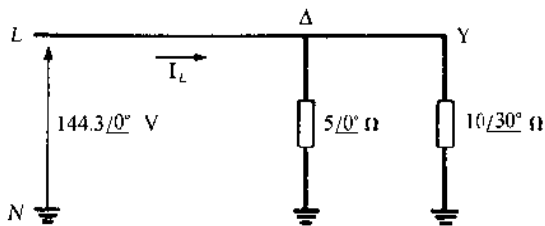


图 11-29

- 11.9 将两表法用于题 11.8 电路, 求表的读数.

解 电流  $I_L$  的角度  $-9.9^\circ$ , 是  $5 \angle 0^\circ \Omega$  和  $10 \angle 30^\circ \Omega$  的并联等效阻抗的相位角的负值. 因此, 在 11.13 节的公式中,  $\theta = 9.9^\circ$ .

$$W_1 = V_{L,eff} I_{L,eff} \cos(\theta + 30^\circ) = (176.8) (29.7) \cos 39.9^\circ = 4028 \text{ W}$$

$$W_2 = V_{L,eff} I_{L,eff} \cos(\theta - 30^\circ) = (176.8) (29.7) \cos(-20.1^\circ) = 4931 \text{ W}$$

进行检查,  $W_1 + W_2 = 8959 \text{ W}$ , 和题 11.8 一致.

- 11.10 具有线电压有效值为 240V 的三相电源, 以  $\Delta$  方式接有非平衡负载, 如图 11-30 所示.

求线电流和总功率。

**解** 在不知道系统相序时仍可以计算功率。相 A

电流有效值是

$$I_{AB\text{eff}} = \frac{240}{25} = 9.6 \text{ A} \quad I_{BC\text{eff}} = \frac{240}{15} = 16 \text{ A}$$

$$I_{CA\text{eff}} = \frac{240}{20} = 12 \text{ A}$$

因此,三复功率是

$$S_{AB} = (9.6)^2 (25 \angle 90^\circ) = 2304 \angle 90^\circ = 0 + j2304$$

$$S_{BC} = (16)^2 (15 \angle 30^\circ) = 3840 \angle 30^\circ = 3325 + j1920$$

$$S_{CA} = (12)^2 (20 \angle 0^\circ) = 2880 \angle 0^\circ = 2880 + j0$$

总的复功率为它们的和

$$S_T = 6205 + j4224$$

即:  $P_T = 6205 \text{ W}$ ,  $Q_T = 4224 \text{ 乏}$  (感性)

为求出电流,必须假定它们的相序。设定为 ABC,参考图 11-7(a)可知

$$I_{AB} = \frac{339.4 \angle 120^\circ}{25 \angle 90^\circ} = 13.6 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{339.4 \angle 0^\circ}{15 \angle 30^\circ} = 22.6 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{339.4 \angle 240^\circ}{20 \angle 0^\circ} = 17.0 \angle 240^\circ \text{ A}$$

在节点处应用 KCL 表达式可以求出线电流。

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 13.6 \angle 30^\circ - 17.0 \angle 240^\circ = 29.6 \angle 46.7^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BC} + I_{BA} = 22.6 \angle (-30^\circ) - 13.6 \angle 30^\circ = 19.7 \angle -66.7^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 17.0 \angle 240^\circ - 22.6 \angle (-30^\circ) = 28.3 \angle -173.1^\circ \text{ A}$$

**11.11** 求题 11.10 电路中 A 线和 B 线上瓦特表的读数(线 C 是两表的参考电位)。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad W_A &= R_e(V_{AC\text{eff}} I_{A\text{eff}}^*) = R_e[(240 \angle 60^\circ) \left( \frac{29.6}{\sqrt{2}} \angle -46.7^\circ \right)] \\ &= R_e(5023 \angle 13.3^\circ) = 4888 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_B &= R_e(V_{BC\text{eff}} I_{B\text{eff}}^*) = R_e[(240 \angle 0^\circ) \left( \frac{19.7}{\sqrt{2}} \angle 66.7^\circ \right)] \\ &= R_e(3343 \angle 66.7^\circ) = 1322 \text{ W} \end{aligned}$$

注意到  $W_A + W_B = 6210 \text{ W}$  与题 11.10 中求得的  $P_T$  一致。

**11.12** 一个线电压为  $V_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ$  的三相四线 ABC 系统,有 Y 方式连接的负载  $Z_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$ ,  $Z_B = 15 \angle 30^\circ \Omega$  及  $Z_C = 10 \angle -30^\circ \Omega$  (如图 11-31 所示),求线电流及中线电流。

**解**

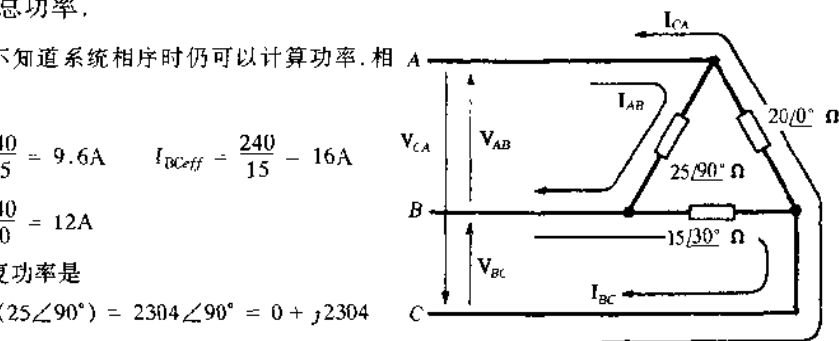


图 11-30

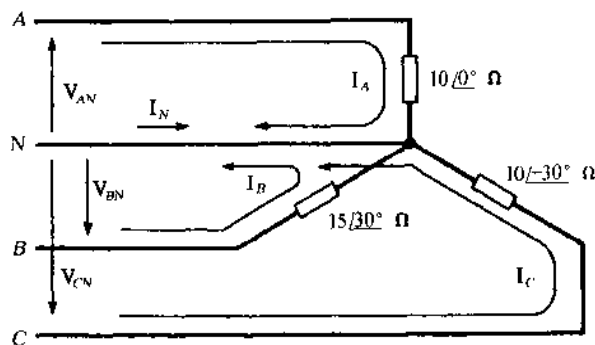


图 11-31

$$I_A = \frac{169.9 \angle 90^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 16.99 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_B = \frac{169.9 \angle -30^\circ}{15 \angle 30^\circ} = 11.33 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{169.9 \angle -150^\circ}{10 \angle -30^\circ} = 16.99 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = 8.04 \angle 69.5^\circ \text{ A}$$

11.13 图 11-32 中, Y 连接负载阻抗为  $Z_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$ ,  $Z_B = 15 \angle 30^\circ \Omega$  及  $Z_C = 10 \angle -30^\circ \Omega$ , 由  $V_{BC} = 208 \angle 0^\circ \text{ V}$  的三相三线 ABC 系统供电. 求阻抗两端电压及置换中点电压  $V_{ON}$ .

解 在此可以应用例 11.7 的方法, 用节点电压方程求解. 然而, 图 11-32 中设定的网孔电流  $I_1$  和  $I_2$  提供了另一种方法.

$$\begin{bmatrix} 10 \angle 0^\circ + 15 \angle 30^\circ & -15 \angle 30^\circ \\ -15 \angle 30^\circ & 15 \angle 30^\circ + 10 \angle -30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \angle 120^\circ \\ 208 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

解得  $I_1 = 14.16 \angle 86.09^\circ \text{ A}$  和  $I_2 = 10.21 \angle 52.41^\circ \text{ A}$ . 而线电流为:

$$I_A = I_1 = 14.16 \angle 86.09^\circ \text{ A} \quad I_B = I_2 - I_1 = 8.01 \angle -48.93^\circ \text{ A}$$

$$I_C = -I_2 = 10.21 \angle -127.59^\circ \text{ A}$$

现在就可以画出电压相量图.

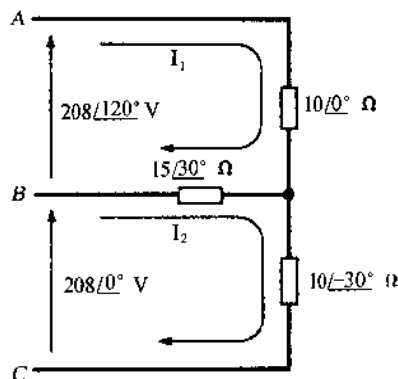


图 11-32

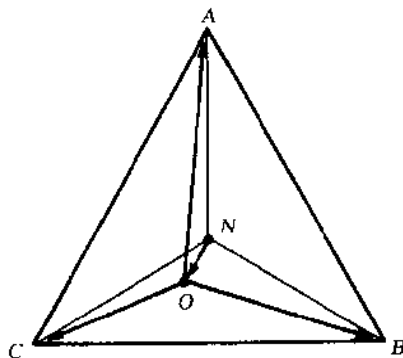


图 11-33

$$V_{AO} = I_A Z_A = 141.6 \angle 86.09^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 120.2 \angle -18.93^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C = 102.1 \angle -157.59^\circ \text{ V}$$

$$V_{ON} = V_{CA} + V_{AN} = 141.6 \angle -93.91^\circ + 120.1 \angle 90^\circ = 23.3 \angle -114.53^\circ \text{ V}$$

相量图画于图 11-33 中.

11.14 求题 11.13 中非平衡 Y 连接负载的总的平均功率, 并与连接在 B 和 C 线上的瓦特表读数进行比较.

解 相功率为

$$P_A = I_{Aeff}^2 R_A = \left( \frac{14.16}{\sqrt{2}} \right)^2 (10) = 1002.5 \text{ W}$$

$$P_B = I_{Beff}^2 R_B = \left( \frac{8.01}{\sqrt{2}} \right)^2 (15 \cos 30^\circ) = 417.0 \text{ W}$$

$$P_C = I_{Ceff}^2 R_C = \left( \frac{10.21}{\sqrt{2}} \right)^2 (10 \cos 30^\circ) = 451.4 \text{ W}$$

所以, 总的平均功率为 1870.9 W.

由题 11.13 的结果可知, 瓦特表的读数为



$$W_B = R_e(V_{BAeff}I_{Beff}^*) = R_e\left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}}\angle -60^\circ\right)\left(\frac{8.01}{\sqrt{2}}\angle 48.93^\circ\right)\right] = 817.1 \text{ W}$$

$$W_C = R_e(V_{CAeff}I_{Ceff}^*) = \left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}}\angle 240^\circ\right)\left(\frac{10.21}{\sqrt{2}}\angle 127.59^\circ\right)\right] = 1052.8 \text{ W}$$

根据两个瓦特表的读数,总功率为 1869.9 W.

- 11.15 一个平衡的  $\Delta$  连接负载,瓦特表的读数为 1154 W 和 577 W.如果线电压是 141.4 V,求负载阻抗.

解  $\pm \tan\theta = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{577}{1731}\right) = 0.577 \quad \theta = \pm 30.0^\circ$

使用  $P_T = \sqrt{3} V_{Leff} I_{Leff} \cos\theta$

$$Z_\Delta = \frac{V_{Leff}}{I_{Leff}} = \frac{\sqrt{3} V_{Leff}}{I_{Leff}} = \frac{3 V_{Leff}^2 \cos\theta}{P_T} = \frac{3(100)^2 \cos 30.0^\circ}{1154 + 577} \Omega = 15.0 \Omega$$

则  $Z_\Delta = 15.0 \angle \pm 30.0^\circ \Omega$

- 11.16 有  $Z_\Delta = 30 \angle 30.0^\circ$  的平衡  $\Delta$  连接负载由具有阻抗  $Z_C = 0.4 + j0.3 \Omega$  的导线连接成三相三线 250 V 的系统.求负载上线电压.

解 单线等效电路示于图 11-34 中,根据电压的分压原理,等效 Y 负载两端的电压是

$$V_{AN} = \left( \frac{10 \angle 30^\circ}{0.4 + j0.3 + 10 \angle 30^\circ} \right) \left( \frac{250}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \right) \\ = 137.4 \angle -0.33^\circ \text{ V}$$

因此

$$V_L = (137.4)(\sqrt{3}) = 238.0 \text{ V}$$

仅考虑幅值,负载上的线电压是 238.0V,表示有 12.0V 的电压降.电线的截面积和总的长度控制着  $Z_C$  的电阻值,而封装的导管材料(例如钢,铝或纤维)也同长度一样影响电阻.

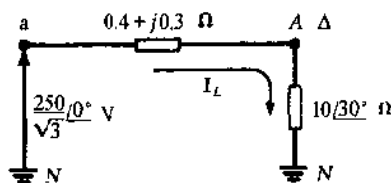


图 11-34

## 补充习题

在下面各题中,答案中不包括电压—电流相量图,即使有些题中问到了这一点也如此.一般规则,对每一个多相电路的习题都要画出相量图.

- 11.17 三个  $10.0 \angle 53.13^\circ \Omega$  的阻抗以  $\Delta$  方式连接.系统有三相, CBA 相序,有效线电压为 240V.求线电流.

答案:  $I_A = 58.8 \angle -143.13^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 58.8 \angle -23.13^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 58.8 \angle 96.87^\circ \text{ A}$

- 11.18 三个  $42.0 \angle -35^\circ \Omega$  的阻抗以  $\Delta$  方式连接到三相 ABC 系统中,且  $V_{BC} = 495.0 \angle 0^\circ \text{ V}$ .求线电流.

答案:  $I_A = 20.41 \angle 125^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 20.41 \angle 5^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 20.41 \angle -115^\circ \text{ A}$

- 11.19 一个三相三线系统,有效值线电压 100V,电流为:

$$I_A = 15.41 \angle -160^\circ \text{ A} \quad I_B = 15.41 \angle -40^\circ \text{ A} \quad I_C = 15.41 \angle 80^\circ \text{ A}$$

如果以  $\Delta$  方式连接,请问系统的相序和阻抗是多少?

答案: CBA,  $15.9 \angle 70^\circ \Omega$ .

- 11.20 一个阻抗为  $6.0 \angle 45^\circ \Omega$  的平衡 Y 连接负载接到三相四线 CBA 系统,线电压有效值为 208V.求四个线电流.

答案:  $I_A = 28.31 \angle -135^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 28.31 \angle -15^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 28.31 \angle 105^\circ \text{ A}$ ,  $I_N = 0$

- 11.21 一个阻抗为  $65.0 \angle -20^\circ \Omega$  的平衡 Y 连接负载接到三相三线 CBA 系统,  $V_{AB} = 678.8 \angle -120^\circ \text{ V}$ .求三个线电流.

答案:  $I_A = 6.03 \angle -70^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 6.03 \angle 50^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 6.03 \angle 170^\circ \text{ A}$

- 11.22 一个阻抗为  $Z_\Delta = 9.0 \angle -30^\circ \Omega$  的平衡  $\Delta$  连接负载和一个阻抗为  $Z_Y = 5.0 \angle 45^\circ \Omega$  的平衡 Y 连接负载由相同的三相 ABC 系统供电,线电压有效值为 480V.使用单线等效电路方法求线电流.

答案:  $I_A = 168.9 \angle 93.36^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 168.9 \angle -26.64^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 168.9 \angle -146.64^\circ \text{ A}$

- 11.23 一个阻抗为  $27.0 \angle -25^\circ \Omega$  的平衡  $\Delta$  连接负载和一个阻抗为  $10.0 \angle -30^\circ \Omega$  的平衡 Y 连接负载由相

同的三相 ABC 系统供电,  $V_{CN} = 169.8 \angle -150^\circ \text{ V}$ . 求线电流.

答案:  $I_A = 35.8 \angle 117.36^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 35.8 \angle -2.64^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 35.8 \angle -122.64^\circ \text{ A}$

- 11.24 一个阻抗为  $10.0 \angle -36.9^\circ \Omega$  的平衡  $\Delta$  连接负载和一个平衡 Y 连接负载由相同的三相 ABC 系统供电,  $V_{CA} = 141.4 \angle 240^\circ \text{ V}$ . 如果  $I_B = 40.44 \angle 13.41^\circ \text{ A}$ . Y 连接负载的阻抗是多少?

答案:  $5.0 \angle -53.3^\circ \Omega$

- 11.25 一个三相 ABC 系统, 有效值线电压为 500V, 有  $\Delta$  连接负载:

$$Z_{AB} = 10.0 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 25.0 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 20.0 \angle -30^\circ \Omega$$

求线电流.

答案:  $I_A = 106.1 \angle 90.0^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 76.15 \angle -68.20^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 45.28 \angle -128.65^\circ \text{ A}$

- 11.26 一个三相 ABC 系统,  $V_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ \text{ V}$ , 有  $\Delta$  连接负载:

$$Z_{AB} = 5.0 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 4.0 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 6.0 \angle -15^\circ \Omega$$

求线电流.

答案:  $I_A = 99.7 \angle 99.7^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 127.9 \angle -43.3^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 77.1 \angle -172.1^\circ \text{ A}$

- 11.27 一个三相四线 CBA 系统, 有效值线电压为 100V, Y 连接负载为

$$Z_A = 3.0 \angle 0^\circ \Omega \quad Z_B = 3.61 \angle 56.31^\circ \Omega \quad Z_C = 2.24 \angle -26.57^\circ \Omega$$

求电流  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  和  $I_N$ .

答案:  $27.2 \angle -90^\circ \text{ A}$ ,  $22.6 \angle -26.3^\circ \text{ A}$ ,  $36.4 \angle 176.6^\circ \text{ A}$ ,  $38.6 \angle 65.3^\circ \text{ A}$

- 11.28 一个三相四线 ABC 系统,  $V_{BC} = 294.2 \angle 0^\circ \text{ V}$ , 有 Y 连接负载

$$Z_A = 12.0 \angle 45^\circ \Omega \quad Z_B = 10.0 \angle 30^\circ \Omega \quad Z_C = 8.0 \angle 0^\circ \Omega$$

求电流  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  和  $I_N$ .

答案:  $14.16 \angle 45^\circ \text{ A}$ ,  $16.99 \angle -60^\circ \text{ A}$ ,  $21.24 \angle -150^\circ \text{ A}$ ,  $15.32 \angle 90.4^\circ \text{ A}$

- 11.29 一个 Y 连接负载,  $Z_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$ ,  $Z_B = 10 \angle 60^\circ \Omega$ ,  $Z_C = 10 \angle -60^\circ \Omega$ , 连接到三相三线 ABC 系统, 线电压有效值为 141.4V. 求负载电压  $V_{AO}$ ,  $V_{BO}$ ,  $V_{CO}$  和替代中点电压  $V_{ON}$ . 构造似图 11-18 的相量图.

答案:  $173.2 \angle 90^\circ \text{ V}$ ,  $100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $100 \angle 180^\circ \text{ V}$ ,  $57.73 \angle -90^\circ \text{ V}$

- 11.30 一个 Y 连接负载,  $Z_A = 10 \angle -60^\circ \Omega$ ,  $Z_B = 10 \angle 0^\circ \Omega$ ,  $Z_C = 10 \angle 60^\circ \Omega$ , 连接到三相三线 CBA 系统, 有效值线电压为 147.1V. 求线电流  $I_A$ ,  $I_B$  和  $I_C$ .

答案:  $20.8 \angle -60^\circ \text{ A}$ ,  $0$ ,  $20.8 \angle 120^\circ \text{ A}$ .

- 11.31 一个具有平衡负载的三相三线 ABC 系统, 有效值线电压为 200V 及最大线电流  $I_A = 13.61 \angle 60^\circ \text{ A}$ . 求总功率.

答案: 2887 W.

- 11.32 两个阻抗为  $20 \angle -60^\circ \Omega$  和  $18 \angle 45^\circ \Omega$  的平衡  $\Delta$  连接负载分别连接到一个三相系统中, 线电压  $V_{BC} = 212.1 \angle 0^\circ \text{ V}$ . 求每一个负载的相功率.

答案: 562.3 W, 883.6 W,  $4337.5 \text{ W} = 3(562.3 \text{ W}) + 3(883.6 \text{ W})$

- 11.33 在题 11.5 中, 具有  $Z = 20 \angle 45^\circ \Omega$  的  $\Delta$  连接负载在最大值线电压 100V 时最大值线电流为 8.65A. 求测量总平均功率使用的两瓦特表的读数.

答案: 111.9 W, 417.7 W.

- 11.34 求接在具有线电压有效值为 240V 和平衡  $\Delta$  连接负载为  $20 \angle 80^\circ \Omega$  的三相三线系统中的两瓦特表的读数.

答案: -1706 W, 3206 W.

- 11.35 一个三相三线 ABC 系统, 线电压  $V_{BC} = 311.1 \angle 0^\circ \text{ V}$ , 线电流为

$$I_A = 61.5 \angle 116.6^\circ \text{ A}, I_B = 61.2 \angle -48^\circ \text{ A}, I_C = 16.1 \angle 218^\circ \text{ A}$$

求瓦特表读数? (a) 接在 A 和 B 线上, (b) 接在 B 和 C 线上, (c) 接在 A 和 C 线上.

答案: (a) 5266 W, 6370 W; (b) 9312 W, 2322 W; (c) 9549 W, 1973 W

- 11.36 一个三相三线 ABC 系统, 线电压有效值为 440V, 线电流为

$$I_A = 27.9 \angle 90^\circ \text{ A}, I_B = 81.0 \angle -9.9^\circ \text{ A}, I_C = 81.0 \angle 189.9^\circ \text{ A}$$

求瓦特表读数? (a) 接在 A 和 B 线上, (b) 接在 B 和 C 线上.

答案: (a) 7.52 KW, 24.8 KW; (b) 16.16 KW, 16.16 KW

- 11.37 连接在电压有效值为 120V 的三相三线中的两个瓦特表的读数是 1500W 和 500W.  $\Delta$  连接负载的阻抗是多少?

答案:  $16.3 \angle \pm 40.9^\circ \Omega$

- 11.38 一个三相三线 ABC 系统线电压有效值为 173.2V. 在 A 线和 B 线的瓦特表读数分别为 -301W 和 1327W. 求平衡 Y 连接负载的阻抗. (由于相序是特定的, 可以确定阻抗角的符号).

答案:  $10 \angle -70^\circ \Omega$

- 11.39 三相三线系统, 线电压  $V_{BC} = 339.4 \angle 0^\circ \text{ V}$ , 有平衡 Y 连接负载  $Z_Y = 15 \angle 60^\circ \Omega$ . 在系统和负载之间的导线上有  $2.24 \angle 26.57^\circ \Omega$  的阻抗. 求负载上的线电压幅值.

答案: 301.1 V

- 11.40 重复 11.39 题, 阻抗为  $Z_Y = 15 \angle -60^\circ \Omega$ . 根据两种情况画出电压相量图, 说明对于给定的线阻抗, 阻抗角对电压降的影响.

答案: 332.9V

## 第 12 章 频率响应, 滤波器和谐振

### 12.1 频率响应

线性电路对正弦输入的响应为正弦信号, 并且具有相同的频率, 但可能有不同的幅值和相位角, 这种响应是频率的函数. 我们已经看到, 一个正弦信号可以用它的幅值和相位表示成相量. 频率响应定义为输出相量对输入相量之比, 它是  $j\omega$  的实函数.

$$H(j\omega) = R_e[H] + jI_m[H] = |H|e^{j\theta} \quad (1a)$$

此处  $R_e[H]$  和  $I_m[H]$  是  $H(j\omega)$  的实部和虚部,  $|H|$  和  $\theta$  是它的幅值和相位角.  $R_e[H]$ ,  $I_m[H]$ ,  $|H|$  和  $\theta$  一般都是  $\omega$  的函数. 也可以写成

$$|H|^2 = |H(j\omega)|^2 = R_e^2[H] + I_m^2[H] \quad (1b)$$

$$\theta = \angle H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{I_m[H]}{R_e[H]} \quad (1c)$$

因此, 频率响应取决于输入和输出变量的选择. 例如, 若一个电流源连接到图 12-1(a) 所示的网络中, 端电流是输入, 则端电压为输出. 在这种情况下输入阻抗  $Z = V_1/I_1$ , 构成了频率响应. 相反, 如果一个电压源施加在输入端, 测量端电流, 则输入导纳  $Y = I_1/V_1 = 1/Z$  表示了频率响应.

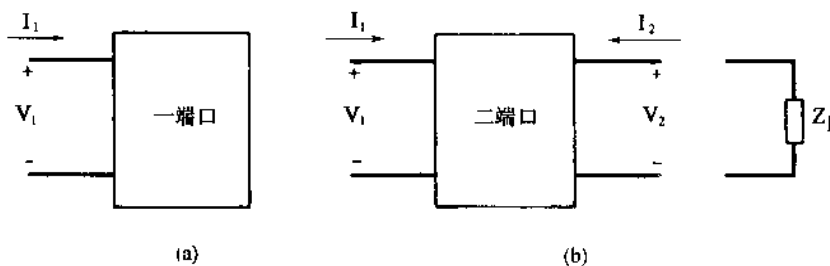


图 12-1

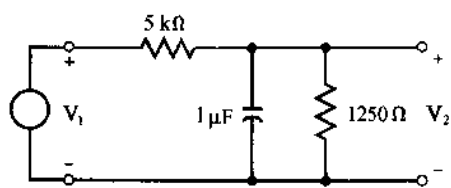


图 12-2

对于图 12-1(b) 的二端口网络, 可以定义如下频率响应

输入阻抗:  $Z_{in}(j\omega) = V_1/I_1$

输入导纳:  $Y_{in}(j\omega) = 1/Z_{in}(j\omega) = I_1/V_1$

电压传输率:  $H_v(j\omega) = V_2/V_1$

电流传输率:  $H_i(j\omega) = I_2/I_1$

传输阻抗:  $V_2/I_1$  及  $V_1/I_2$

**例 12.1** 求出图 12-2 所示二端口网络的频率响应  $V_2/V_1$ .

设  $Y_{RC}$  为并联 RC 的导纳, 则  $Y_{RC} = 10^{-6}j\omega + 1/1250$ .  $V_2/V_1$  由  $Z_{RC}$  和  $5K\Omega$  电阻对  $V_1$  分压得到.

$$H(j\omega) = V_2/V_1 = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + 5000} = \frac{1}{1 + 5000Y_{RC}} = \frac{1}{5(1 + 10^{-3}j\omega)} \quad (2a)$$

$$|H| = \frac{1}{5\sqrt{1 + 10^{-6}\omega^2}} \quad \theta = -\tan^{-1}(10^{-3}\omega) \quad (2b)$$

另一种解法: 我们首先求出电路中电阻部分的戴维南等效电路,  $V_{Th} = V_1/5$  及  $R_{Th} = 1K\Omega$ , 然后在  $R_{Th}$  和  $1\mu F$  电容之间对  $V_{Th}$  分压得到.

## 12.2 高通和低通网络

一个无负载情况下的阻性分压器可见图 12-3. 具有标准的二端口电压和电流. 电压传递函数和输入阻抗为

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad H_{Z\infty}(\omega) = R_1 + R_2$$

下标 $\infty$ 表示无负载情况.  $H_{v\infty}$ 和 $H_{Z\infty}$ 都是实常数, 与频率无关, 这是因为不存在电抗元件. 如果网络中含有电感或电容, 则 $H_{v\infty}$ 和 $H_{Z\infty}$ 将是复数并随频率而变化. 如果 $|H_{v\infty}|$ 随频率的增加而减少, 则这种性能称为高频滑落, 并且这种电路称为低通网络. 相反, 一个高通网络有低频滑落, 则 $|H_{v\infty}|$ 将随着频率的减小而减小. 在图 12-4 中, 画了 4 个二元件电路, 2 个高通, 2 个低通.

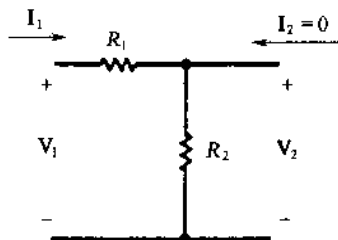


图 12-3

图 12-5 中 RL 高通电路是开路或无负载的. 用绘制幅值和相位角来确定输入阻抗频率响应.

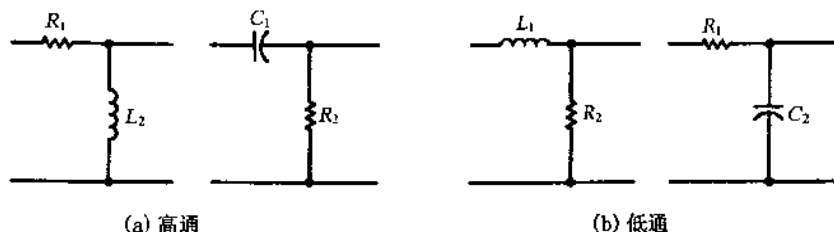


图 12-4

$$H_{Z\infty}(\omega) = R_1 + j\omega L_2 = |H_Z| \angle \theta_H$$

归一化, 写成  $\omega_x \equiv R_1/L_2$

$$\frac{H_{Z\infty}(\omega)}{R_1} = 1 + j(\omega/\omega_x) = \sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2} \angle \tan^{-1}(\omega/\omega_x)$$

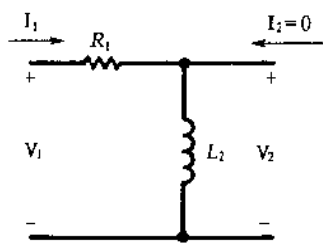


图 12-5

如图 12-6 所示, 有 5 个  $\omega$  数值就可以, 画出  $|H_z|/R_1$  和  $\theta_H$  图. 随着频率的增加, 幅值接近于无限大, 这样, 在非常高的频率时, 网络电流  $I_1$  将为 0.

用类似的方法可以得到输出对输入电压比率的频率响应. 无负载时对电压进行分压得出

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} = \frac{1}{1 - j(\omega_x/\omega)}$$

所以

$$|H_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_x/\omega)^2}} \quad \text{及} \quad \theta_H = \tan^{-1}(\omega_x/\omega)$$

幅值和相角画于图 12-7 中. 这个传递函数在高频阶段接近于单位 1. 此时, 输出电压与输入电压相同. 因此, 可以描述为“低频滑落”, 并称为“高通”.

无负载时 RL 高通电路的转移阻抗为

$$H_{\infty}(\omega) = \frac{V_2}{I_1} = j\omega L_2 \quad \text{或} \quad \frac{H_{\infty}(\omega)}{R_1} = j \frac{\omega}{\omega_x}$$

相角是  $90^\circ$  常数. 幅值对  $\omega$  的图形是一条直线见图 12-8, 类似于  $\omega_L$  对  $\omega$  的电抗图.

互换 R 和 L 的位置, 得到一个具有高频滑落的低通网络. 对于开路情况,

$\omega$	$ H_d /R_1$	$\theta_H$
0	1	0°
$0.5\omega_x$	$0.5\sqrt{5}$	26.6°
$\omega_x$	$\sqrt{2}$	45°
$2\omega_x$	$\sqrt{5}$	63.4°
$\infty$	$\infty$	90°

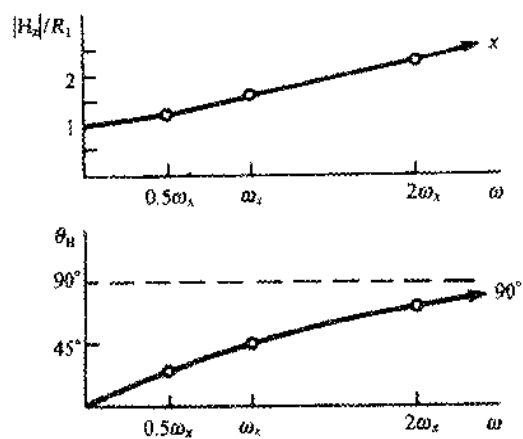


图 12-6

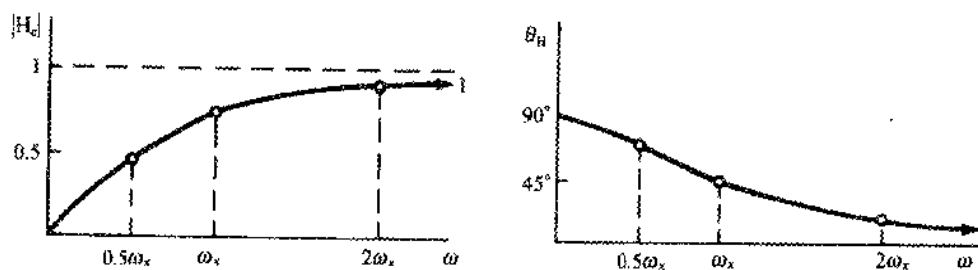


图 12-7

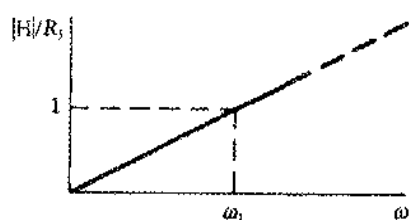


图 12-8

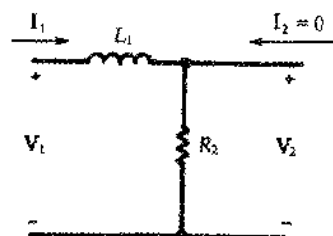


图 12-9

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_1} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)}$$

其中  $\omega_x = R_2/L_1$ , 即

$$|H_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}} \quad \text{及} \quad \theta_H = \tan^{-1}(-\omega/\omega_x)$$

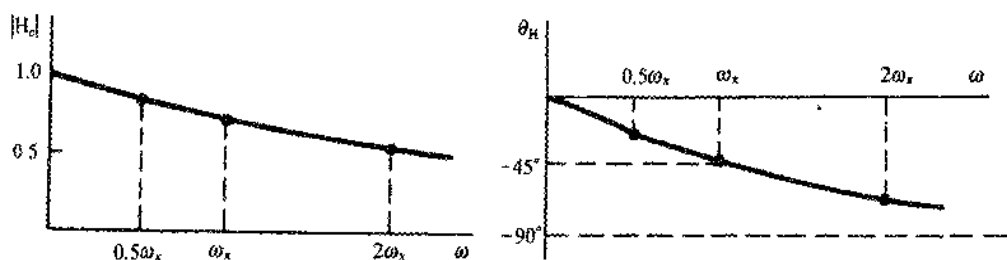


图 12-10

图 12-10 画出了幅值—相位角图. 电压传递函数  $H_\infty(\omega)$  在高频区接近于 0, 在  $\omega = 0$  处为单位 1. 因此称为“低通”.

低通网络的其他网络函数在习题中给出.

**例 12.2** 对于图 12-11 所示的开路电路, 求电压传递函数  $H_{v\infty}$ . 如果 (a)  $C_2 = 10 \text{ nF}$ , (b)  $C_2 = 1 \text{ nF}$ , 在什么频率时(以赫兹表示)使  $|H_v| = 1/\sqrt{2}$ ?

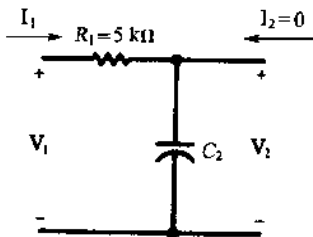


图 12-11

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{1/j\omega C_2}{R_1 + (1/j\omega C_2)} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)}$$

这里,

$$\omega_x = \frac{1}{R_1 C_2} = \frac{2 \times 10^{-4}}{C_2} \text{ (rad/s)}$$

$$(a) \quad |H_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}}$$

$$\text{当 } \omega = \omega_x = \frac{2 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-9}} = 2 \times 10^4 \text{ rad/s 或 } f = (2 \times 10^4)/2\pi = 3.18 \text{ kHz 时有}$$

$$|H_v| = 1/\sqrt{2}$$

$$(b) \quad f = \frac{10}{1}(3.18) = 31.8 \text{ kHz}$$

比较(a)和(b), 看出对  $C_2$  有较大值时,  $|H_v|$  将降到它的峰值 0.707 倍以下, 即在图 12-10 中的  $|H_v|$  的图形向左方移动. 所以, 任何和  $C_2$  并联的零散电容都会降低电路的响应.

### 12.3 半功率频率

例 12.2 中计算的频率  $\omega_x$ , 在  $|H_v| = 0.707 |H_v|_{\max}$  处的这个频率叫做半功率频率. 在这种情况下, 由习题 12.5 证明, 说明图 12-11 电路当  $\left| \frac{1}{j\omega C_2} \right| = R_1$  即  $\omega = \omega_x$  时, 输入功率是最大值的一半.

一般, 任何非正常网络函数  $H(\omega)$  在频率  $\omega_x$  处获得它的最大绝对值. 我们将一个频率在:

$$|H(\omega)| = 0.707 |H(\omega_x)|$$

处的频率叫做半功率频率(或半功率点), 而不管这个频率是否真有 50% 的功率. 更多的情况,  $0 < \omega_x < \infty$  有两个半功率频率. 一个在峰值频率上方, 一个在峰值频率下方, 将其称为上半功率频率点和下半功率频率点, 由于它们是分开的, 可作为波峰锐度的测量即带宽.

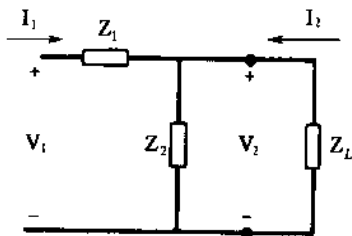


图 12-12

### 12.4 一般化的二端口, 两元件网络

在 12.2 节中典型的基本  $RL$  或  $RC$  网络, 可以用  $Z_1$  和  $Z_2$  进行概括. 如图 12-12 所示, 负载阻抗  $Z_L$  连接在输出端.

根据电压的分压原理可知

$$V_2 = \frac{Z'}{Z_1 + Z'} V_1 \quad \text{或} \quad H_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z'}{Z_1 + Z'}$$

其中,  $Z' = Z_2 Z_L / (Z_2 + Z_L)$  为  $Z_2$  和  $Z_L$  并联的等效阻抗. 其他传递函数可类似计算出来, 示于表 12-1 中.

表 12-1

网络函数	$H_z = \frac{V_1}{I_1}(\Omega)$	$H_v = \frac{V_2}{V_1}$	$H_i = \frac{I_2}{I_1}$	$H_v H_z = \frac{V_2}{I_1}(\Omega)$	$\frac{H_i}{H_z} = \frac{I_2}{V_1}(S)$
输出情况					
短路 $Z_L = 0$	$Z_1$	0	-1	0	$-\frac{1}{Z_1}$
开路 $Z_L = \infty$	$Z_1 + Z_2$	$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$	0	$Z_2$	0
负载 $Z_L$	$Z_1 + Z'$	$\frac{Z'}{Z_1 + Z'}$	$\frac{-Z_2}{Z_2 + Z_L}$	$Z'$	$\frac{Z'}{Z_L(Z_1 + Z')}$

## 12.5 频率响应和网络函数

网络的频率响应可以用将它的网络函数中的  $s$  用  $j\omega$  替换的方法得到. 下面的例子说明这种有用的方法.

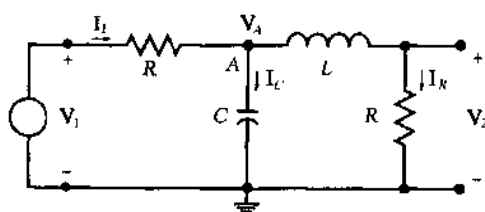


图 12-13

例 12.3 求出图 12-13 所示电路中(a)网络函数  $H(s) = V_2/V_1$ , (b) 对于  $LC = 2/\omega_0^2$  和  $L/C = R^2$  的  $H(j\omega)$ , (c) 在 (b) 中对于  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  的  $H(j\omega)$  的幅值与相角. (a) 设  $V_2$  已知, 使用一般化的阻抗  $Ls$  和  $1/Cs$  并求  $V_1$ .

由  $I_R = V_2/R$

$$V_A = (R + Ls)I_R = \frac{R + Ls}{R}V_2 \quad (3)$$

$$I_C = CsV_A = \frac{Cs(R + Ls)}{R}V_2$$

$$I_1 = I_R + I_C = \frac{V_2}{R} + \frac{Cs(R + Ls)}{R}V_2 = \frac{1 + Cs(R + Ls)}{R}V_2$$

则

$$V_1 = V_A + RI_1 = \frac{R + Ls}{R}V_2 + [1 + Cs(R + Ls)]V_2$$

及

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2 + (L/R + CR)s + LCs^2} \quad (4a)$$

(b) 由  $LC = 2/\omega_0^2$  及  $L/C = R^2$ , 得到  $L = \sqrt{2}R/\omega_0$  及  $C = \sqrt{2}/R\omega_0$ . 将  $L$  和  $C$  代入 (4a) 中, 得

$$H(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \right)$$

或

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + j\sqrt{2}(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2} \right) \quad (4b)$$

$$|H|^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^4} \right) \quad \text{及} \quad \theta = -\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

注意,  $H(j\omega)$  是独立于  $R$  的. 该网络通过低频正弦信号而阻止或衰减高频正弦信号. 它是一个具有  $\omega = \omega_0$  的半功率频率的低通滤波器. 在这种情况下, 频率响应的幅值是  $|H(j\omega_0)| = |H(0)|/\sqrt{2} = \sqrt{2}/4$ , 它的相角是  $\angle H(j\omega_0) = -\pi/2$ .

(c) 对  $\omega_0 = 1$



$$H(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2} \right) \quad \text{或} \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + j\sqrt{2}\omega - \omega^2} \right) \quad (4c)$$

$$|H|^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1 + (\omega)^4} \right) \quad \text{及} \quad \theta = -\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \omega^2} \right)$$

将图 12-4(b) 的 RC 网络定义为一阶低通滤波器, 在  $\omega_0 = 1/R_1C_2$  处有半功率频率. 图 12-13 的电路叫做二阶 Butterworth 滤波器, 它有一个锐截止频率.

## 12.6 由零极点位置决定的频率响应

一个网络的频率响应是网络函数  $H(s)$  在  $s = j\omega$  时的值. 这可以用来估计  $H(j\omega)$  图. 图解方法可以很快产生  $H(j\omega)$  的草图, 使我们只注意零极点的性能而不需要得到完全解.

**例 12.4** 求  $H(s) = 10s/(s^2 + 2s + 26)$  的极点和零点, 将它们放在  $s$  域中并根据零极点画出  $H(j\omega)$  草图.

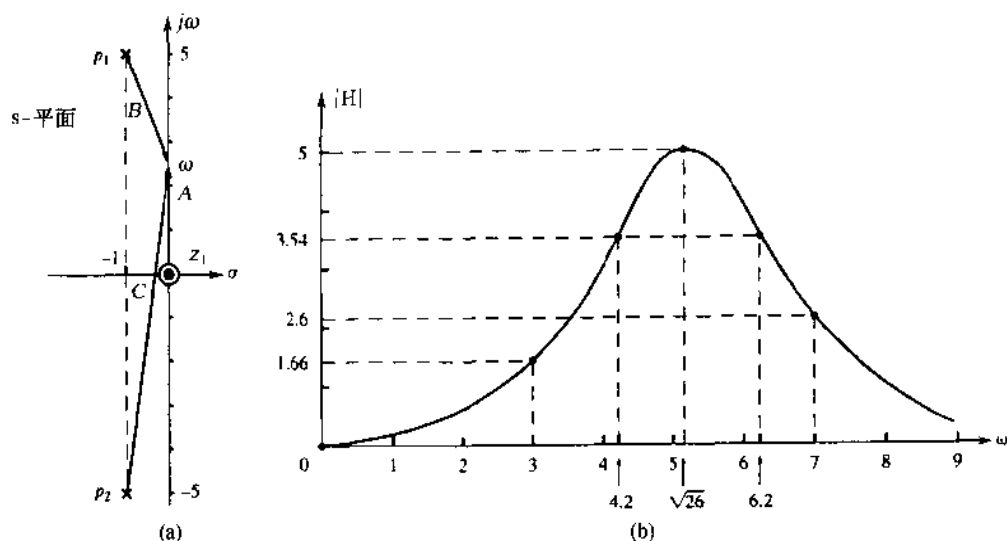


图 12-14

$H(s)$  在  $z_1 = 0$  处有一个零点. 由  $s^2 + 2s + 26 = 0$  可求得两个极点  $p_1$  和  $p_2$ .  $p_1 = -1 + j5$ ,  $p_2 = -1 - j5$ . 极一零点画于图 12-14(a) 中. 网络函数可以写成

$$H(s) = (10) \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

对于  $s$  的每一个值,  $(s - z_1)$  是一个  $s$  域中的矢量, 由零点  $z_1$  开始, 到  $s$  点结束. 同样,  $s - p_1$  和  $s - p_2$  是从极点  $p_1$  和  $p_2$  画到  $s$  点的矢量. 因此, 对  $s$  的任意值, 网络函数可以用三个矢量  $A, B, C$  的方式表示如下

$$H(s) = (10) \frac{A}{B \times C} \quad \text{此处, } A = (s - z_1), B = (s - p_1), C = (s - p_2)$$

$H(s)$  在  $s$  平面中任一点的幅值和相角可以由下式求出

$$|H(s)| = (10) \frac{|A|}{|B| \times |C|} \quad (5a)$$

$$\angle H(s) = \angle A - \angle B - \angle C \quad (5b)$$

根据  $j\omega$  轴上  $s$  的位置 [图 12-14(a)],  $\omega$  由 0 到  $\infty$  变化, 及测量  $A, B, C$  的幅值和相角, 我们可以用 (5a) 和 (5b) 式来得到幅值和相角的图形. 图 12-14(b) 为幅值图.

## 12.7 理想与实际滤波器

一般来讲, 网络具有频率选择性. 滤波器是设计有特定频率选择特性的一种网络. 它们允

许一定频率通过(通带),而禁止其他频率通过(禁带).在通带中,理想情况  $H(j\omega) = 1$ ,在禁带中,  $H(j\omega) = 0$ .因此,我们将滤波器划分为如下几类:低通[图 12-15(a)],高通[图 12-15(b)],带通[图 12-15(c)]以及带阻[图 12-15(d)].理想滤波器不能在物理上实现,但我们可以设计和建立一个我们所希望的接近于理想的实际滤波器.越接近理想特性,实际滤波器的电路就越复杂.

在 12.2 节的 RC 和 RL 电路是一阶滤波器,它们离理想滤波器很远.下面的例子说明,如果我们增加滤波器的阶数,可以使滤波器的频率响应接近理想滤波器.

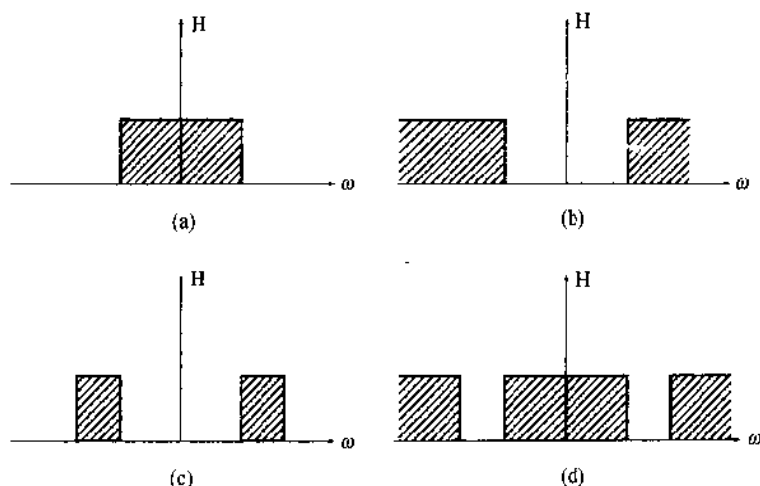


图 12-15

例 12.5 给定三个网络函数  $H_1, H_2, H_3$

$$(a) H_1 = \frac{1}{s+1} \quad (b) H_2 = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (c) H_3 = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

求它们频率响应的幅值,并说明所有三个函数都是具有  $\omega_0 = 1$  的半功率频率的低通滤波器.

(a)

$$|H_1|^2 = \frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

(b)

$$|H_2|^2 = \frac{1}{(1-\omega^2 + j\sqrt{2}\omega)(1-\omega^2 - j\sqrt{2}\omega)} = \frac{1}{1+\omega^4}$$

(c)

$$|H_3|^2 = \frac{1}{(1+\omega^2)(1-\omega^2 + j\omega)(1-\omega^2 - j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^6}$$

对于三个函数,在  $\omega = 0, 1$  和  $\infty$  处,分别有  $|H|^2 = 1, 1/2$  和  $0$ .因此,三个网络函数都是具有相同的半功率频率  $\omega_0 = 1$  的低通滤波器.它们分别是 1 阶, 2 阶和 3 阶 Butterworth 滤波器.滤波器的阶次越高,频率响应的截止区域越陡.

## 12.8 无源和有源滤波器

仅含有电阻、电感和电容的滤波器称为无源滤波器.含有另外独立电源的滤波器叫做有源滤波器.无源滤波器不需要额外能源并且它们可以持续很久.有源滤波器一般由 RC 电路和放大器组成.图 12-16(a)的电路是一个 2 阶低通无源滤波器.图 12-16(b)是一个与 12-16(a)电路等效的具有频率响应为  $V_2/V_1$  的有源滤波器.

例 12.6 求出下述电路的网络函数  $V_2/V_1$  (a) 如图 12-16(a), (b) 如图 12-16(b).

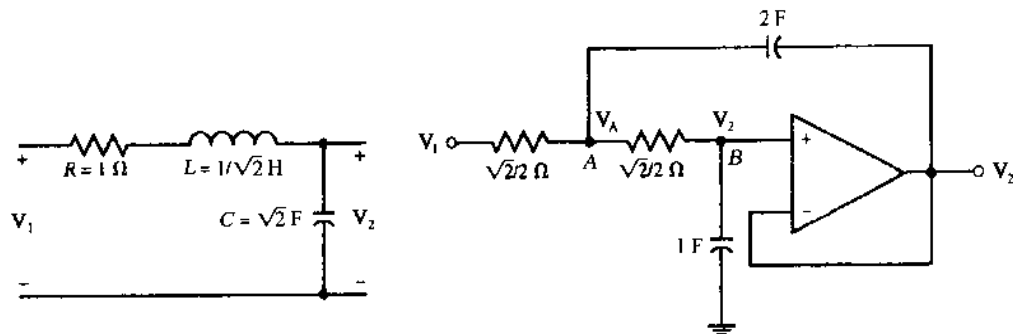


图 12-16

(a) 在图 12-16(a) 中, 由电压  $V_1$  分压求出  $V_2$

$$V_2 = \frac{1}{Cs} \cdot \frac{V_1}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{V_1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{LC} \frac{V_1}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

代入  $R=1, L=1/\sqrt{2}, C=\sqrt{2}$ , 并且除以  $V_1$  得到

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

(b) 在图 12-16(b) 中, 在节点 A 和 B 应用 KCL 表达式, 且  $V_B = V_2$

$$\text{节点 A} \quad (V_A - V_1)\sqrt{2} + (V_A - V_2)\sqrt{2} + (V_A - V_2)2s = 0 \quad (6a)$$

$$\text{节点 B} \quad V_2s + (V_2 - V_A)\sqrt{2} = 0 \quad (6b)$$

消去(6a)和(6b)中的  $V_A$ , 就得到网络函数  $H(s) = V_2/V_1$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

注意, 图 12-16(a) 和 (b) 的电路具有相同的网络函数. 它们是在  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  有半功率频率的 2 阶 Butterworth 低通滤波器.

## 12.9 带通滤波器和谐振

下面网络函数叫做带通函数

$$H(s) = \frac{ks}{s^2 + as + b} \quad \text{这里, } a > 0, b > 0, k > 0 \quad (7)$$

当极点是复数, 靠近  $j\omega$  轴时, 以及在  $s$  域中远离原点时, 这个称呼非常合适. 带通函数的频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{kj\omega}{b - \omega^2 + aj\omega} \quad |H|^2 = \frac{k^2\omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} = \frac{k^2}{a^2 + (b - \omega^2)^2/\omega^2} \quad (8)$$

$|H|$  的最大值发生在  $b - \omega^2 = 0$  或  $\omega = \sqrt{b}$  时, 叫做中心频率  $\omega_0$ . 在中心频率处, 有  $|H|_{\max} = |H(\omega_0)| = k/a$ . 半功率频率在  $\omega_l$  和  $\omega_h$  处

$$|H(\omega_l)|^2 = |H(\omega_h)|^2 = \frac{1}{2} |H(\omega_0)|^2 \quad (9a)$$

使用(8)到(9a),  $\omega_l$  和  $\omega_h$  是下列方程的根

$$\frac{(b - \omega^2)^2}{\omega^2} = a^2 \quad (9b)$$

解出

$$\omega_l = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 \quad (9c)$$

$$\omega_h = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 \quad (9d)$$

由(9c)到(9d), 有

$$\omega_h - \omega_l = a \quad \text{及} \quad \omega_h \omega_l = b = \omega_0^2 \quad (10a)$$

带宽  $\beta$  定义为

$$\beta = \omega_h - \omega_l = a \quad (10b)$$

品质因数  $Q$  定义为

$$Q = \omega_0 / \beta = \sqrt{b} / a \quad (10c)$$

品质因数度量围绕中心频率的频率响应的锐度, 这种性能也称为谐振(见 12.11 到 12.15 节). 品质因数高时,  $\omega_l$  和  $\omega_h$  可以分别近似表示为  $\omega_0 - \beta/2$  和  $\omega_0 + \beta/2$ .

**例 12.7** 考虑网络函数  $H(s) = 10s / (s^2 + 300s + 10^6)$ . 求出中心频率, 低端和高端半功率频率, 带宽和品质因数.

由于  $\omega_0^2 = 10^6$ , 中心频率  $\omega_0 = 1000$  rad/s

低端和高端半功率频率分别为

$$\omega_l = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} - 300/2 = 861.2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} + 300/2 = 1161.2 \text{ rad/s}$$

带宽  $\beta = \omega_h - \omega_l = 1161.2 - 861.2 = 300$  rad/s

品质因数  $Q = 1000/300 = 3.3$

**例 12.8** 重做例 12.7,  $H(s) = 10s / (s^2 + 30s + 10^6)$ . 由于  $\omega_0^2 = 10^6$ ,  $\omega_0 = 1000$  rad/s 则

$$\omega_l = \sqrt{30^2/4 + 10^6} - 30/2 = 985.1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \sqrt{30^2/4 + 10^6} + 30/2 = 1015.1 \text{ rad/s}$$

$$\beta = a = 30 \text{ rad/s} \quad \text{及} \quad Q = 1000/30 = 33.3$$

注意,  $\omega_l$  和  $\omega_h$  也可以更精确地近似为

$$\omega_l = \omega_0 - \beta/2 = 1000 - 30/2 = 985 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \omega_0 + \beta/2 = 1000 + 30/2 = 1015 \text{ rad/s}$$

## 12.10 自然频率和阻尼系数

(7)式的带通函数的分母可以写成

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

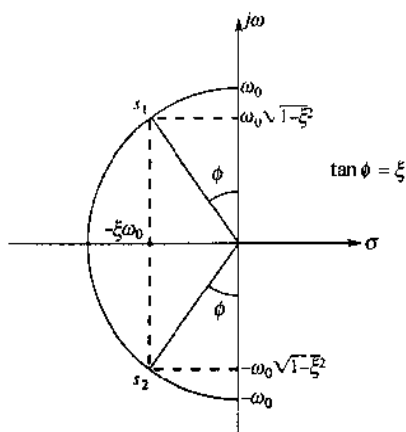


图 12-17

此处  $\omega_0 = \sqrt{b}$  称做自然频率,  $\xi = a/(2\sqrt{b})$  称为阻尼系数. 对  $\xi > 1$ , 电路在负实轴上有两个不同的极点, 称为过阻尼. 对  $\xi = 1$ , 电路在  $-\omega_0$  处有一个二阶的实极点, 称为临界阻尼. 对  $\xi < 1$ , 电路在  $-\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$  和  $-\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$  处有一对共轭极点. 这些极点位于左半平面以  $\omega_0$  为半径的半圆上. 极点的位置角是  $\phi = \tan^{-1}\xi$  (见图 12-17). 这个电路是欠阻尼的, 可以保持衰减振荡. 注意, 阻尼系数等于品质因数倒数的一半.

## 12.11 RLC 串联电路, 串联谐振

图 12-18 所示 RLC 电路, 在开路情况下具有输入或驱动阻抗

$$Z_{in}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

当  $Z_{in}(\omega)$  是实数 (即  $|Z_{in}(\omega)|$  为最小值) 时, 将电路称为串联谐振电路 (或低阻抗谐振).

此时

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{或} \quad \omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

图 12-19 表示了频率响应. 容抗与  $\omega$  成反比, 并在低频段较高. 而感抗与  $\omega$  成正比, 并在高频段较高. 因而, 网络阻抗在  $\omega_0$  以下是容性的,  $Z_{in}$  的角度是负值. 在  $\omega_0$  以上频率, 电路表现出感性,  $Z_{in}$  的角度是正的.

根据分压原则, 图 12-18 的电压传递函数为

$$H_{\infty}(\omega) = \frac{R}{Z_{in}(\omega)} = R Y_{in}(\omega)$$

频率响应的幅频图如图 12-20 所示. 这条曲线恰恰对应于图 12-19(a). 注意, 曲线的最大点或最小点都发

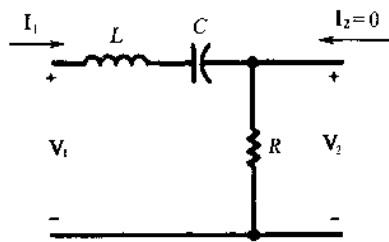
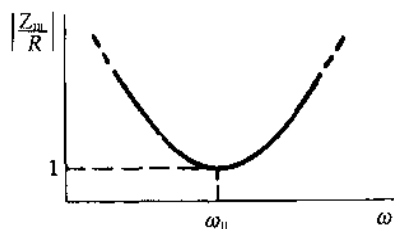
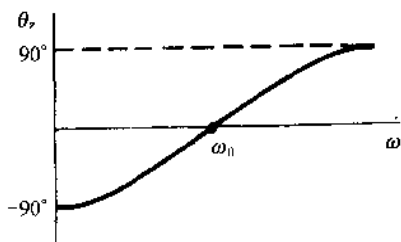


图 12-18



(a)



(b)

图 12-19

生在串联谐振频率  $\omega_0$  处. 在响应为 0.707 倍的点, 即半功率点 (见 12.3 节) 是在  $\omega_l$  和  $\omega_h$  频率处. 这两个频率之间的宽度是带宽:  $\beta = \omega_h - \omega_l$ .

品质因数  $Q_0 = \omega_0 L / R$  可以定义为串联 RLC 电路谐振点 (见 12.12 节  $Q$  的一般推导). 半功率频率可以用电路元件表示, 或用  $\omega_0$  和  $Q_0$  项表示

$$\omega_h = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} + \frac{1}{2Q_0} \right)$$

$$\omega_l = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} - \frac{1}{2Q_0} \right)$$

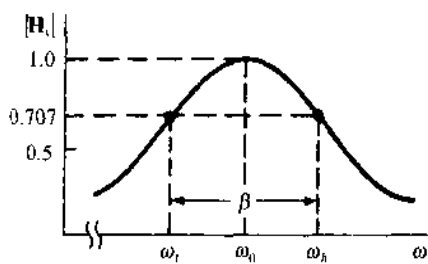


图 12-20

见习题 12.5. 二式相减得

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

表明品质越高, 带宽越窄.

## 12.12 品质因数

一个组合的或完全的电路可以指定一个品质因数或品质图. 将品质因数定义为

$$Q \equiv 2\pi \left( \frac{\text{最大储能值}}{\text{每周周期耗能}} \right)$$

这是一个无量纲数. 这个定义和 12.9 和 12.11 节给出的定义是一致的.

一个实际电感, 包含有电阻和电抗, 如图 12-21 所示, 最大的储能是  $\frac{1}{2} L I_{\max}^2$ , 而每周周期耗能为

$$(I_{\text{eff}}^2 R) \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) = \frac{I_{\max}^2 R \pi}{\omega}$$

因此

$$Q_{ind} = \frac{\omega L}{R}$$

一个实际电容可以化作电阻和电容的并联,如图 12-22 所示. 储能的最大值是  $\frac{1}{2} CV_{\max}^2$ , 每周耗能为  $V_{\max}^2 \pi / R\omega$ . 这样,  $Q_{cap} = \omega CR$ .

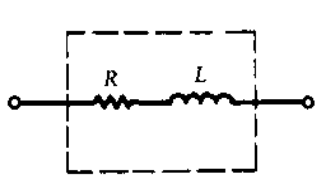


图 12-21

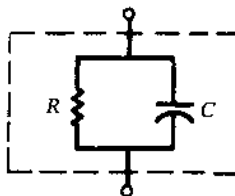


图 12-22

$RLC$  串联电路的  $Q$  可以在习题及解答 12.6(a) 中得到. 通常用于谐振电路. 这种情况下的等效形式为

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

### 12.13 $RLC$ 并联电路, 并联谐振

一个并联  $RLC$  网络如图 12-23 所示. 注意,  $V_2 = V_1$ . 在开路情况下, 输入导纳是

$$Y_{in}(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{Z_{in}(\omega)}$$

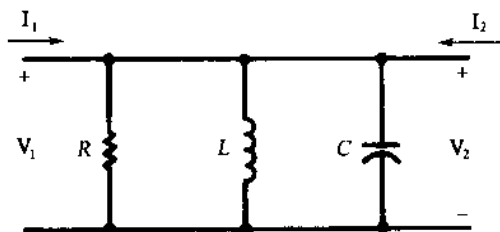


图 12-23

当  $Y_{in}(\omega)$  即  $Z_{in}(\omega)$  为实数 ( $|Y_{in}(\omega)|$  为最小值,  $|Z_{in}(\omega)|$  为最大值) 时, 此网络称为并联谐振 (或高阻抗谐振) 电路. 此时

$$-\frac{1}{\omega L} + \omega C = 0 \quad \text{或} \quad \omega = \omega_a \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

符号  $\omega_a$  习惯上用来表示品质  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ , 以区分此种谐振和低阻抗的谐振. 复杂的串联—并联网路可能有几个高阻抗谐振频率  $\omega_a$  和几个低阻抗谐振频率  $\omega_0$ .

图 12-24 画出了标准化的输入阻抗 (仅有幅值情况)

$$\frac{Z_{in}(\omega)}{R} = \frac{1}{1 + jR \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}$$

图中标出了半功率频率  $\omega_l$  和  $\omega_h$ , 类似于串联谐振. 带宽为

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a}$$

$Q_a$  是  $\omega = \omega_a$  处并联电路的品质因数, 等效表达式为

$$Q_a = \frac{R}{\omega_a L} = \omega_a RC = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

可参见习题 12.6(b).

### 12.14 实际的 LC 并联电路

并联的 LC 谐振电路常常在电子装置中作为调谐或频率选择的装置用。

电容器经常作为纯电容来处理, 但在电感器中则要包含损耗. 实际谐振器的合理模型示于图

12-25. 输入导纳为

$$Y_{in}(\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

对于谐振,

$$\omega_a C = \frac{\omega_a L}{R^2 + (\omega_a L)^2} \quad \text{或} \quad \omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

在谐振频率处,  $Y_{in}(\omega_a) = RC/L$ . 由 12.11 节, 电感的  $Q$  值是

$$Q_{ind} = \frac{\omega_a L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - 1}$$

如果  $Q_{ind} \geq 10$ , 则  $\omega_a \approx 1/\sqrt{LC}$ , 且:

$$\left| \frac{Z_{in}(\omega_a)}{R} \right| \approx Q_{ind}^2$$

频率响应类似于并联 RLC 电路, 对于低的  $Q_{ind}$ , 希望高阻抗谐振发生在低频处. 若将  $\omega_a$  的表达式写成如下形式就更加明显

$$\omega_a = \left( \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (1/Q_{ind}^2)}}$$

### 12.15 串并联转换

在电路分析中, 将串联 RL 电路转换为并联 RC 电路的形式常常会带来许多方便 (见图 12-26). 给定  $R_s, L_s$  及运行频率  $\omega$ , 等效并联电路的元素  $R_p, L_p$  由导纳方程确定

$$Y_s = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad \text{及} \quad Y_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

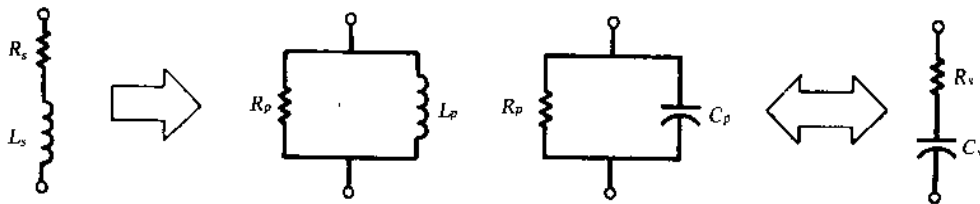


图 12-26

图 12-27

结果为

$$R_p = R_s \left[ 1 + \left( \frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$L_p = L_s \left[ 1 + \left( \frac{R_s}{\omega L_s} \right)^2 \right] = L_s \left( 1 + \frac{1}{Q_s^2} \right)$$

如果  $Q_s \geq 10$ , 则  $R_p \approx R_s Q_s^2$  及  $L_p \approx L_s$

有时常会将一种 RC 电路转换到另一种形式(见图 12-27). 通过阻抗或导纳方程, 将并联转换到串联

$$R_s = \frac{R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2} = \frac{R_p}{1 + Q_p^2}$$

$$C_s = C_p \left[ 1 + \frac{1}{(\omega C_p R_p)^2} \right] = C_p \left( 1 + \frac{1}{Q_p^2} \right)$$

将串联转换到并联

$$R_p = R_s \left[ 1 + \frac{1}{(\omega C_s R_s)^2} \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$C_p = \frac{C_s}{1 + (\omega C_s R_s)^2} = \frac{C_s}{1 + (1/Q_s)^2}$$

另外, 等效值将依赖于运行频率.

### 12.16 轨迹图

此前, 网络的频率响应已经分别用合适的网络函数相对于频率  $\omega$  的幅值和相位角的图形表示了. 同样的信息可以用单一图形表示: 找到  $\omega$  从 0 变化到  $\infty$  的网络函数的对应点在复平面上轨迹的曲线(轨迹图). 在这一节中, 我们将讨论输入阻抗或输入导纳的轨迹图. 某些情况下可变的不再是  $\omega$  而是另一个参数(例如电阻  $R$ ).

对串联 RL 电路, 图 12-28(a) 显示了当  $\omega L$  是固定的, 而  $R$  是变化的  $Z$  轨迹. 图 12-28(b) 显示了  $R$  是固定的, 而  $L$  或  $\omega$  是变化的  $Z$  轨迹. 图 12-28(c) 显示了  $R$  是固定的, 而  $L$  或  $\omega$  变化的  $Y$  轨迹. 后者的轨迹是这样得到的

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle \tan^{-1}(-\omega L/R)$$

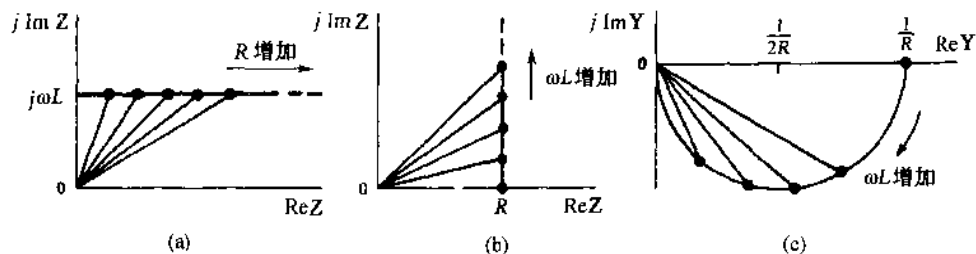


图 12-28

注意, 对  $\omega L = 0$ ,  $Y = (1/R) \angle 0^\circ$ ; 对  $\omega L \rightarrow \infty$ ,  $Y \rightarrow 0 \angle -90^\circ$ . 当  $\omega L = R$  时,

$$Y = \frac{1}{R\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

有少量的其他点被确认为半圆轨迹, 中心点在  $1/2R$ , 半径为  $1/2R$ . 图 11-28(b) 或 (c) 给出了电路的频率响应.

并联 RC 电路具有  $Y$  和  $Z$  轨迹, 示于图 12-29. 轨迹由下式得到

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C \quad \text{及} \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \angle \tan^{-1}(-\omega CR)$$

对于 RLC 串联电路, 以  $\omega$  为变量的  $Y$  轨迹可以写成

$$Y = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

因此,



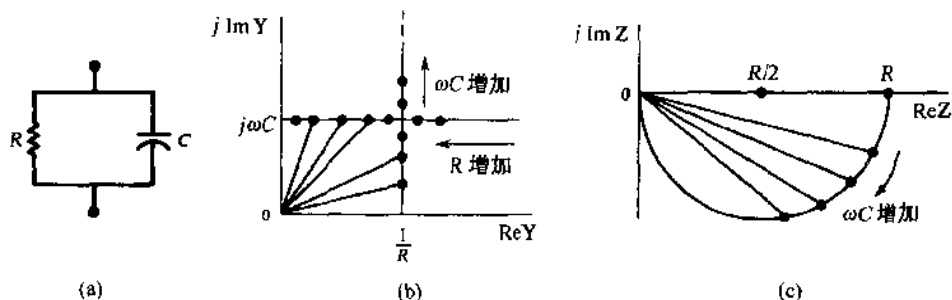


图 12-29

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$G$  和  $B$  都与  $X$  与  $\omega$  有关. 在两个表达式中消去  $X$  得到的轨迹方程为

$$G^2 + B^2 = \frac{G}{R} \quad \text{或} \quad \left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$$

即在图 12-30 中显示的图形. 注意轨迹上的点对应于  $\omega = \omega_l$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega = \omega_h$ .

为了检查 12.14 节的实际谐振电路, 可以用  $C$  支路轨迹和  $RL$  支路轨迹构造  $Y$  轨迹. 为了进一步说明, 将对应于频率  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$  的点在单个轨迹和综合轨迹上标记出来, 示于图 12-31(c) 中. 可知  $|Y|_{\min}$  发生在比  $\omega_a$  要大的频率处, 即谐振是高阻抗但不是最大阻抗. 这是因为  $G$  随着  $\omega$  的变化而变化(见 12.14 节), 并且不能强令  $B=0$  而自动使  $G^2 + B^2$  为最小. 由于线圈的  $Q$  值决定了谐振的分离点和最小导纳频率, 较高的  $Q_{ind}$  对应于较低的  $R$  值. 由图 12-31(b) 可知, 低的  $R$  导致较大的半圆, 和  $Y_C$  轨迹结合, 得到较高的  $\omega_a$  和较低的最小导纳频率. 当  $Q_{ind} \geq 10$  时, 两个频率将会重合.

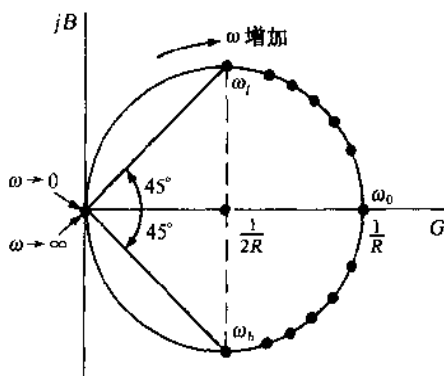


图 12-30

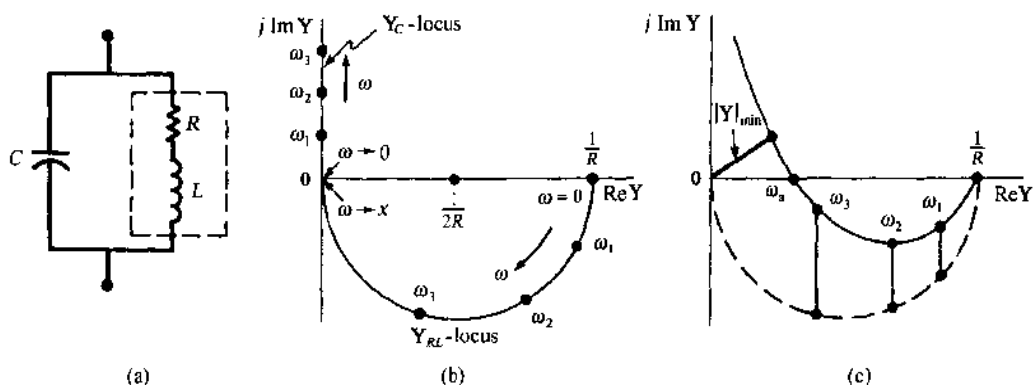


图 12-31

图 12-32(a) 所示的两支路  $RC$  和  $RL$  电路可以用增加两条支路的导纳轨迹进行检查. 选定  $V = V \angle 0^\circ$ , 计算两条支路电流的全部轨迹. 考虑到  $R_1, R_2, L$  和  $\omega$  是常数,  $C$  是无限制可变情况. 如图 12-32(b) 所示电流  $I_L$  是固定的,  $I_C$  的半圆轨迹加到  $I_L$  上得到  $I_T$  轨迹.

电路的谐振对应于  $\theta_T = 0$ . 这可以发生在正实参数  $C$  的两个值 [图 12-32(b) 说明了该情况]、一个值或没有值时, 而这取决于方程  $\text{Im } Y_T(C) = 0$  的正实根的数目.

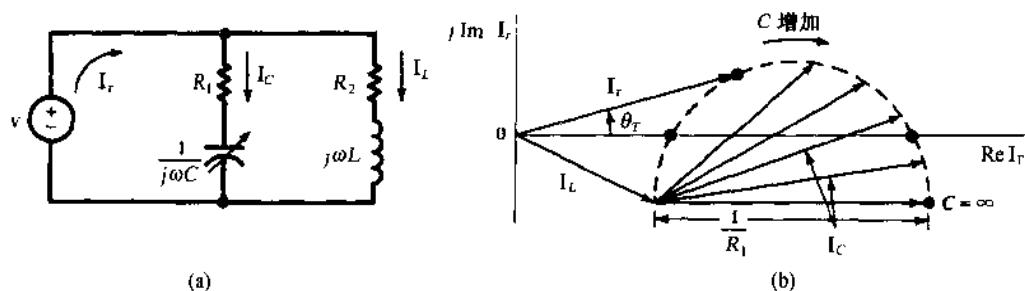


图 12-32

## 习题及解答

- 12.1 在图 12-33 所示的两端口网络中,  $R_1 = 7 \text{ k}\Omega$  和  $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$ . 求电压比率  $V_2/V_1$ . (a) 无负载时, (b)  $R_L = 20 \text{ k}\Omega$  时.

解 (a) 无负载时, 进行电压分压得到

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{7 + 3} = 0.30$$

(b)  $R_L = 20 \text{ k}\Omega$

$$R_p = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \frac{60}{23} \text{ k}\Omega$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_p}{R_1 + R_p} = \frac{60}{221} = 0.27$$

电压比独立于频率,  $20 \text{ k}\Omega$  的负载电阻使电压比率由 0.3 减小到 0.27.

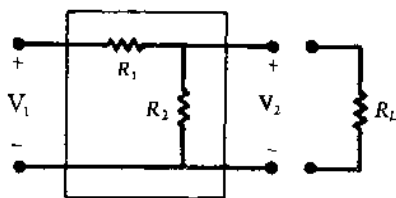


图 12-33

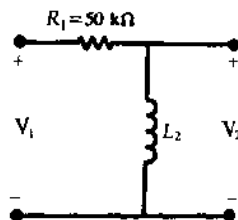


图 12-34

- 12.2 在图 12-34 所示的高通滤波电路中, 问 (a) 如果在  $50 \text{ MHz}$  频率时  $|H_v(\omega)| = 0.5$ , 求  $L_2$ ? (b) 在什么频率下  $|H_v| = 0.90$ ?

解 (a) 由 12.2 节, 有  $\omega_x \equiv R_1/L_2$

$$|H_v(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_x/\omega)^2}}$$

则:  $0.50 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x/50)^2}}$  或  $f_x = 50\sqrt{3} \text{ MHz}$

$$L_2 = \frac{R_1}{2\pi f_x} = \frac{50 \times 10^3}{2\pi(50\sqrt{3} \times 10^6)} = 91.9 \mu\text{H}$$

(b)  $0.90 = \frac{1}{1 + (50\sqrt{3}/f)^2}$  或  $f = 179 \text{ MHz}$

- 12.3 一个用于高频的分压器可以由图 12-12 所示的一般二端口网络中的两个电容  $C_1$  和  $C_2$  组成. 在开路时, 如果  $C_1 = 0.01 \mu\text{F}$  及  $|H_v| = 0.20$ , 求  $C_2$ .

解 由表 12-1 可知,

$$H_v = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/j\omega C_2}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

因此,  $0.20 = \frac{0.01}{0.01 + C_2}$  或  $C_2 = 0.04 \mu\text{F}$

可见, 在开路情况下, 电压比率与频率无关.

12.4 对于图 12-35 所示的低通 RC 网络, 求在  $|H_v| = 0.50$  时的频率.

解  $H_v(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)}$  此处  $\omega_x \equiv \frac{1}{R_1 C_2}$

则:  $0.50^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_x)^2}$  并推出,  $\frac{\omega}{\omega_x} = \sqrt{3}$

$$\omega = \sqrt{3} \left( \frac{1}{R_1 C_2} \right) = 8660 \text{ rad/s} \quad \text{或} \quad f = 1378 \text{ Hz}$$

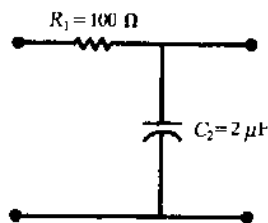


图 12-35

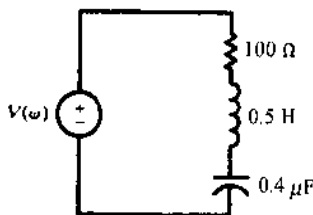


图 12-36

12.5 求图 12-36 所示串联 RLC 电路的谐振频率  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , 并求半功率频率和带宽  $\beta$ .

解  $Z_m(\omega) = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$

在谐振频率点,  $Z_m(\omega) = R$  及  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.5(0.4 \times 10^{-6})}} = 2236.1 \text{ rad/s} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 355.9 \text{ Hz}$$

功率公式为

$$P = I_{eff}^2 R = \frac{V_{eff}^2 R}{|Z_m|^2}$$

说明在  $\omega = \omega_0$  处,  $P_{\max} = V_{eff}^2/R$ , 并且在  $|Z_m|^2 = 2R^2$  时,  $P = \frac{1}{2} P_{\max}$ , 即

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R \quad \text{或} \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L} \omega - \frac{1}{LC} = 0$$

对应于上面的符号, 有一个正实根

$$\omega_h = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left( \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2338.3 \text{ rad/s} \quad \text{或} \quad f_h = 372.1 \text{ Hz}$$

对应于下面的符号, 另一个正实根为

$$\omega_l = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left( \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2138.3 \text{ rad/s} \quad \text{或} \quad f_l = 340.3 \text{ Hz}$$

12.6 推导 Q 值: (a) 串联 RLC 电路, (b) 并联 RLC 电路.

解 (a) 在时间域中, 电路中的储能瞬时值为

$$W_s = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{q^2}{2C}$$

求最大值

$$\frac{dW_s}{dt} = L i \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = i \left( L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right) = i(v_L + v_C) = 0$$

这样, 在  $i=0$  或  $v_L + v_C = 0$  时, 储能  $W_s$  达到最大值. 而电容器的电压和电荷落后电流  $90^\circ$ , 因此,  $i=0$  意味着  $q = \pm Q_{\max}$  且

$$W_s \Big|_{i=0} = \frac{Q_{\max}^2}{2C} = \frac{1}{2} C V_{C\max}^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{I_{\max}}{\omega C} \right)^2 = \frac{I_{\max}^2}{2C\omega^2}$$

另一方面,  $v_L + v_C = 0$  意味着  $v_L = v_C = 0$  和  $i = \pm I_{\max}$  (见图 12-37 的相量图), 所以

$$W_s \Big|_{v_L + v_C = 0} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

这样, 得到如下形式

$$W_{s\max} = \begin{cases} I_{\max}^2 / 2C\omega^2 & (\omega \leq \omega_0) \\ LI_{\max}^2 / 2 & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

每周期的耗能(在电阻上)是  $W_d = I_{\max}^2 R\pi / \omega$ , 所以

$$Q = 2\pi \frac{W_{s\max}}{W_d} = \begin{cases} 1/\omega CR & (\omega \leq \omega_0) \\ \omega L/R & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

(b) 对于施加电压  $v(t)$  的并联电路,

$$W_s = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{q_C^2}{2C}$$

$$\text{和 } \frac{dW_s}{dt} = L i_L \frac{di_L}{dt} + \frac{q_C}{C} i_C = v(i_L + i_C) = 0$$

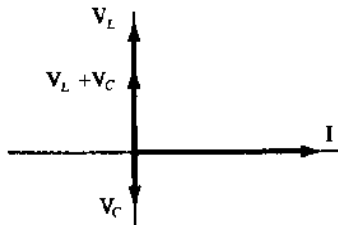


图 12-37

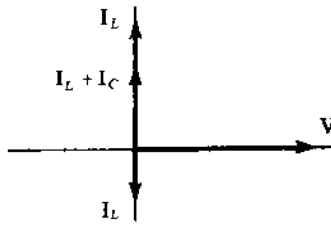


图 12-38

如果  $v = 0$ , 则  $q_C = 0$ , 并且

$$i_L = \pm I_{L\max} = \pm \frac{V_{\max}}{\omega L}$$

给定

$$W_s \Big|_{v=0} = \frac{V_{\max}^2}{2L\omega^2}$$

如果  $i_L + i_C = 0$ , 则  $i_L = i_C = 0$  和  $q_C = \pm CV_{\max}$  (见图 12-38), 有

$$W_s \Big|_{i_L + i_C = 0} = \frac{1}{2} C V_{\max}^2$$

因此

$$W_{s\max} = \begin{cases} V_{\max}^2 / 2L\omega^2 & (\omega \leq \omega_0) \\ CV_{\max}^2 / 2 & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

电阻上每周期消耗的能量为  $W_d = V_{\max}^2 \pi / R\omega$ . 因此

$$Q = 2\pi \frac{W_{s\max}}{W_d} = \begin{cases} R/L\omega & (\omega \leq \omega_0) \\ \omega CR & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

**12.7** 一个三元件的串联电路  $R = 10\Omega$ ,  $L = 5 \text{ mH}$ ,  $C = 12.5 \mu\text{F}$ . 画出以  $\omega$  为变量的函数  $Z$  的幅值和相角图,  $\omega$  的值从  $0.8\omega_0$  到  $1.2\omega_0$ .

**解**  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 4000 \text{ rad/s}$ . 在  $\omega_0$  处,

$$X_L = (4000)(5 \times 10^{-3}) = 20 \Omega \quad X_C = \frac{1}{(4000)(12.5 \times 10^{-6})} = 20 \Omega$$

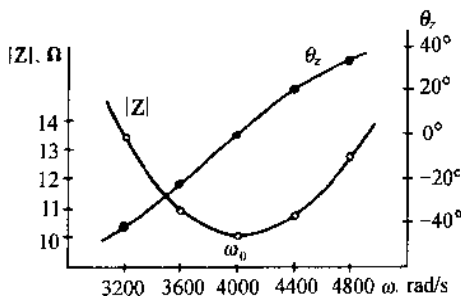
$$Z = 10 + j(X_L - X_C) = 10 + j0 \Omega$$

很容易得到在其它频率下的电抗值. 图 12-39(a) 是电抗和阻抗的表格, 图 12-39(b) 显示了所要求的曲线图.

**12.8** 证明对于  $RLC$  串联电路,  $\omega_0 = \sqrt{\omega_L \omega_C}$ .

$\omega$	$X_L$	$X_C$	$Z$	
3200	16	25	$10 - j9$	$13.4/-42^\circ$
3600	18	22.2	$10 - j4.2$	$10.8/-22.8^\circ$
4000	20	20	10	$10/0^\circ$
4400	22	18.2	$10 + j3.8$	$10.7/20.8^\circ$
4800	24	16.7	$10 + j7.3$	$12.4/36.2^\circ$

(a)



(b)

图 12-39

证明 根据题 12.5 的结果

$$\omega_L \omega_h = \left[ \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} - \frac{R}{2L} \right] \left[ \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} + \frac{R}{2L} \right] = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

- 12.9 计算  $RLC$  串联电路的品质因数  $Q$ , 其中  $R = 20\Omega$ ,  $L = 50 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ . 要求使用 (a)  $Q = \omega_0 L/R$ , (b)  $Q = 1/\omega_0 CR$ , (c)  $Q = \omega_0/\beta$ .

解

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.05 \times 10^{-6}}} = 4472 \text{ rad/s}$$

$$\omega_L = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4276.6 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4676.6 \text{ rad/s}$$

而  $\beta = \omega_h - \omega_L = 400 \text{ rad/s}$ .

$$(a) \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{4472(0.050)}{20} = 11.2$$

$$(b) \quad Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{4472(10^{-6})20} = 11.2$$

$$(c) \quad Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{4472}{400} = 11.2$$

- 12.10 用  $L = 50 \text{ mH}$  和  $R = 15\Omega$  的串联组合来表示一个线圈. 计算在下列条件下的品质因数 (a)  $10 \text{ kHz}$ , (b)  $50 \text{ kHz}$ .

解 (a)  $Q_{\text{cal}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi(10 \times 10^3)(50 \times 10^{-3})}{15} = 209$

$$(b) Q_{\text{cal}} = 209 \left( \frac{50}{10} \right) = 1047$$

- 12.11 将题 12.10 的电路在下列条件下转换到并联形式: (a) 在  $10 \text{ kHz}$ , (b) 在  $250 \text{ Hz}$ .

解

(a)

$$R_p = R_s \left[ 1 + \left( \frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 \right] = R_s [1 + Q_s^2] = 15[1 + (209)^2] = 655 \text{ k}\Omega$$

或由于  $Q_s \gg 10$ ,  $R_p \approx R_s Q_s^2 = 15(209)^2 = 655 \text{ k}\Omega$

$$L_p = L_s \left( 1 + \frac{1}{Q_s^2} \right) \approx L_s = 50 \text{ mH}$$

(b) 在  $250 \text{ Hz}$

$$Q_s = \frac{2\pi(250)(50 \times 10^{-3})}{15} = 5.24$$

$$R_p = R_s [1 + Q_s^2] = 15[1 + (5.24)^2] = 426.9 \Omega$$

$$L_p = L_s \left( 1 + \frac{1}{Q_s^2} \right) = (50 \times 10^{-3}) \left[ 1 + \frac{1}{(5.24)^2} \right] = 51.8 \text{ mH}$$

电路元件从串联到并联的转换可以在一个特定的频率下实现,但这种等效只在这个频率下保持.注意在(b)中,当  $Q_s < 10$  时,  $L_p$  和  $L_s$  有显著的区别.

- 12.12 对于图 12-40 所示电路,求(a)电压传递函数  $H_v(\omega)$ , (b)当这个传递函数是实数时的频率.

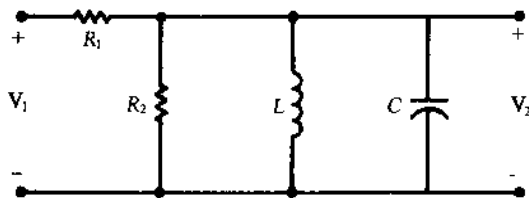


图 12-40

解 (a) 用  $Z_2$  和  $Y_2$  表示  $R_2LC$  并联谐振的阻抗和导纳.

$$\begin{aligned} H_v(\omega) &= \frac{Z_2}{R_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + R_1 Y_2} = \frac{1}{1 + R_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1 \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \end{aligned}$$

(b) 当  $Y_2$  是实数时传递函数也是实数. 即当

$$\omega = \omega_a \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

在  $\omega = \omega_a$  处, 不仅  $|Z_2|$  和  $|H_v|$  是最大值, 而且  $|Z_{in}| = |R_1 + Z_2|$  也是最大值 (因为  $R_1$  是正的实数, 见图 12-41 轨迹图).

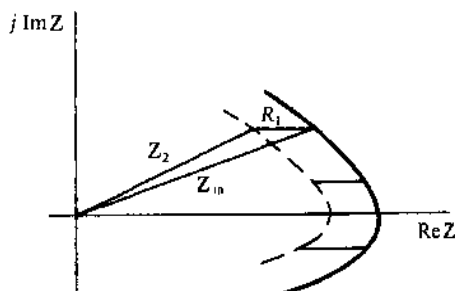


图 12-41

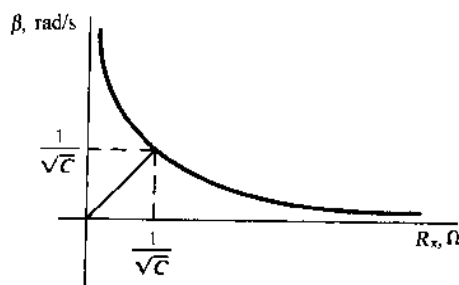


图 12-42

- 12.13 求图 12-40 的电路的带宽  $\beta$ , 并画出对参数  $R_x$  的  $\beta$  图.

解

$$R_x \equiv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

这里, 半功率频率由  $|H_v(\omega)| = 0.707 |H_v|_{\max}$  确定, 或者由题 12.12(a),

$$R_1 \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \pm \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \quad \text{或} \quad R_x \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \pm 1$$

但是, 这仅仅是  $R_x LC$  并联电路的半功率频率的方程 (见 12.13 节). 因此,

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a} = \frac{1}{CR_x}$$

图 12-42 显示了其双曲线图.

- 12.14 图 12-40 的电路中, 设  $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 40 \text{ nF}$ . 求谐振频率和带宽, 并与  $R_1 = 0$  (即纯并联电路) 的结果进行比较.

解 12.14

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{(10 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-9})}} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

或  $f_a = 7958 \text{ Hz}$ . 用  $R_x = 2^2/4 = 1 \text{ k}\Omega$  代入题 12.13 的公式, 得到

$$\beta = \frac{1}{(40 \times 10^{-9})(1 \times 10^3)} = 2.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

题 12.12 和 12.13 的结果不能用于  $R_1 \rightarrow 0$ , 因为, 在这个限制下, 电压比率等于单位 1, 不能提供  $R_2LC$  并联电路的任何信息. (注意, 由于  $R_1 \rightarrow 0$  则  $\beta \rightarrow \infty$ ). 我们必须转向输入阻抗函数, 在 12.13 节, 根据

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

如前所述

$$\beta = \frac{1}{CR_2} = 1.25 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

- 12.15 对于图 12-40 所示电路,  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$ . 如果在  $15 \text{ kHz}$  时  $V_2/V_1 = 0.8 \angle 0^\circ$ , 计算  $R_2$ ,  $L$  和带宽.

解 12.15 电压比率  $H_v$  中零的相位角表明电路作为一个整体, 在谐振点可以自激的并联谐振 (见题 12.14). 则

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad L = \frac{1}{\omega_a^2 C} = \frac{1}{[2\pi(15 \times 10^3)]^2 (10 \times 10^{-9})} = 11.26 \text{ mH}$$

由题 12.12 可得

$$H_v(\omega_a) = 0.8 \angle 0^\circ = \frac{1}{1 + (R_1/R_2)} \quad \text{因此} \quad R_2 = \frac{R_1}{0.25} = 20 \text{ k}\Omega$$

而  $R_x = (5)(20)/25 = 4 \text{ k}\Omega$ , 由题 12.3 给出

$$\beta = \frac{1}{(10 \times 10^{-9})(4 \times 10^3)} = 2.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

- 12.16 比较图 12-43 所示电路对于  $R = 0$  和  $R = 50 \Omega$  时的谐振频率.

解 12.16 对于  $R = 0$ , 电路是一个  $LC$  并联谐振电路, 有

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.2)(30 \times 10^{-6})}} = 408.2 \text{ rad/s}$$

或

$$f_a = 65 \text{ Hz}$$

对于  $R = 50 \Omega$

$$Y_{in} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

对于谐振,  $Y_{in}$  的虚部为零, 所以

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

很明显, 随着  $R \rightarrow 0$ , 这个表达式简化为纯  $LC$  谐振的表达式. 由于根号的原因, 数值上产生了一个 0.791 的值; 因此

$$\omega_a = 408.2 (0.791) = 322.9 \text{ rad/s} \quad \text{或} \quad f_a = 51.4 \text{ Hz}$$

- 12.17 在  $10 \text{ MHz}$  下测量一个实际电感得到  $L = 8.0 \mu\text{H}$  和  $Q_{ind} = 40$ . 求 (a) 在  $10 \text{ MHz}$  时并联谐振的理想电容器  $C$  并计算相应的带宽  $\beta$ . (b) 如果用在  $10 \text{ MHz}$  下有损耗因子  $D = Q_{cap}^{-1} \approx 0.005$  的实际电容器代替理想电容器, 重新计算.

解 12.17 (a) 由 12.4 节可得

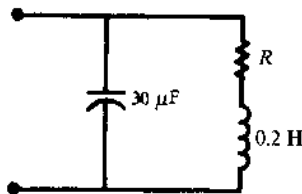


图 12-43

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{ind}^2}}$$

或

$$C = \frac{1}{\omega_a^2 L (1 + Q_{ind}^2)} = \frac{1}{[2\pi(10 \times 10^6)]^2 (8.0 \times 10^{-6}) \left(1 + \frac{1}{1600}\right)} = 31.6 \text{ Pf}$$

使用 12.15 节的方法将图 12-25 的串联  $RL$  支路转换为在谐振频率的并联形式

$$R_p = R(1 + Q_{ind}^2) = \frac{\omega_a L}{Q_{ind}}(1 + Q_{ind}^2)$$

根据 12.13 节可知

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a} = \frac{\omega_a^2 L}{R_p} = \frac{\omega_a Q_{ind}}{1 + Q_{ind}^2} = \frac{2\pi(10 \times 10^6)(40)}{1 + 1600} \text{ rad/s}$$

或 0.25 MHz.

(b) 电路画于图 12-44 中; (a) 部分给出了实际电感的电阻为

$$R = \frac{\omega_a L}{Q_{ind}} = 4\pi \Omega$$

由给定的损耗因子, 可知

$$\frac{1}{\omega_a C R_C} = 0.005$$

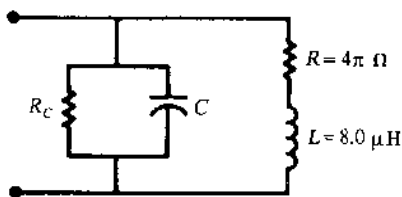


图 12-44

输入导纳为

$$Y_{in} = \frac{1}{R_C} + j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \left[ \frac{1}{R_C} + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \right] + j \left[ \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

这和(a)部分仅有实部的输入导纳有区别. 由于虚部包含了相同的  $L$  和  $R$ , 并且在同一频率下为零,  $C$  也就必须和(a)部分相同, 即  $C = 31.6 \text{ Pf}$ .

由于固定  $C$ , 带宽和电阻成反比. 使用实际电容, 网络的并联电阻为

$$R' = \frac{R_p R_C}{R_p + R_C}$$

这里的  $R_p$  在(a)中计算过. 因此

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{0.25 \text{ MHz}} &= \frac{R_p}{R'} = 1 + \frac{R_p}{R_C} = 1 + \frac{(\omega_a L / Q_{ind})(1 + Q_{ind}^2)}{1 / \omega_a C (0.005)} \\ &= 1 + \frac{(1 + Q_{ind}^2)(0.005)}{Q_{ind}(1 + Q_{ind}^2)} \\ &= 1 + \frac{(1 + 1600)(0.005)}{40 \left(1 + \frac{1}{1600}\right)} = 1.2 \end{aligned}$$

所以,  $\beta = 0.30 \text{ MHz}$ .

一个有损耗的电容器与在谐振回路两端放置一个负载电阻的作用相同, 减少了  $Q_a$  值, 增加了带宽, 而  $f_a$  不变.

**12.18** 在串联电路模型中, 一个有损耗电容器由  $R = 25\Omega$ ,  $C = 20\text{pF}$  组成. 求在  $50\text{kHz}$  下的等效并联模型.

**解** 由 12.15 节, 或在题 12.6 (a) 中令  $L \rightarrow 0$ ,

$$Q_s = \frac{1}{\omega C_s R_s} = \frac{1}{2\pi(50 \times 10^3)(20 \times 10^{-12})(25)} = 6370$$

由此  $Q_s$  值得

$$R_p \approx R_s Q_s^2 = 1010 \text{ M}\Omega \quad C_p \approx C_s \approx 20\text{pF}$$

**12.19** 一个  $V = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$  的可变频率的电源加到一个有  $R = 20\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$  的串联  $RL$  电路上. 计算  $\omega = 0, 500, 1000, 2000, 5000 \text{ rad/s}$  时的电流  $I$ . 在同一相量图中画出所有电流并标注电流轨迹.

**解**

$$Z = R + jX_L = R + j\omega L$$



表 12-2 显示了所要求的计算值. 相量电压为  $0^\circ$  角度时, 作为  $\omega$  变量的电流  $I$  在图 12-45 中是一个半圆. 由于  $I = VY$  且  $V$  是常数, 图 12-45 基本上与图 12-28(c) 所画的串联  $RL$  电路的导纳轨迹图相同.

表 12-2

$\omega, \text{rad/s}$	$X_L, \Omega$	$R, \Omega$	$Z, \Omega$	$I, \text{A}$
0	0	20	$20 \angle 0^\circ$	$5 \angle 0^\circ$
500	5	20	$20.6 \angle 14.04^\circ$	$4.85 \angle -14.04^\circ$
1000	10	20	$22.4 \angle 26.57^\circ$	$4.46 \angle -26.57^\circ$
2000	20	20	$28.3 \angle 45^\circ$	$3.54 \angle -45^\circ$
5000	50	20	$53.9 \angle 68.20^\circ$	$1.86 \angle -68.20^\circ$

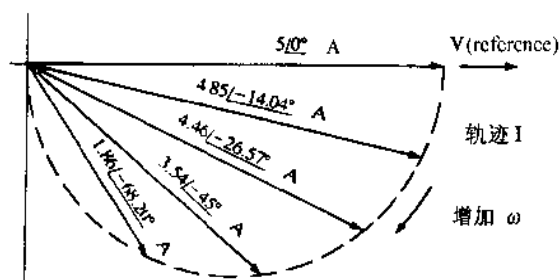


图 12-45

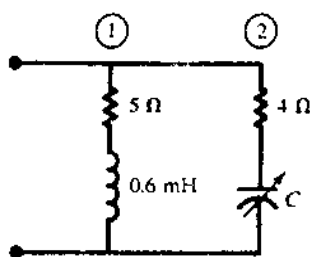


图 12-46

- 12.20 图 12-46 所示电路在驱动电压的频率为  $5000 \text{ rad/s}$  时对于  $C$  的两个值都谐振. 求  $C$  的这两个值并构造导纳轨迹图对此进行说明.

**解** 在给定频率下,  $X_L = 3 \Omega$ . 则固定分支的导纳是

$$Y_1 = \frac{1}{5 + j3} = 0.147 - j0.088 \text{ S}$$

分支 2 的半圆形导纳轨迹半径为  $r = 1/2R = 0.125 \text{ S}$ . 总的导纳是固定部分导纳  $Y_1$  和可变部分导纳  $Y_2$  的和. 在图 12-47 中, 半圆的轨迹加到固定的复数  $Y_1$  上. 电路的谐振发生在  $a$  和  $b$  点处, 在此  $Y_T$  是实数.

$$Y_T = 0.147 - j0.088 + \frac{1}{4 - jX_C}$$

$Y_T$  是实数的条件是

$$X_C^2 - 11.36X_C + 16 = 0$$

或  $X_{C1} = 9.71 \Omega$ ,  $X_{C2} = 1.65 \Omega$ .  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ ,

$$C_1 = 20.6 \mu\text{F} \quad C_2 = 121 \mu\text{F}$$

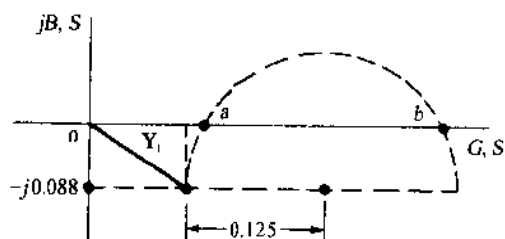


图 12-47

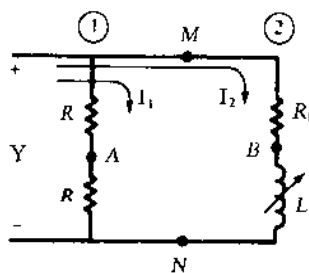


图 12-48

- 12.21 根据轨迹图证明图 12-48 中  $A$  点和  $B$  点之间的电压幅值总是随  $L$  而变化的电源电压的幅值的一半.

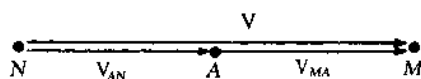


图 12-49

**解** 支路 1 的电流  $I_1$  流经两个相等的电阻  $R$ . 这样,  $A$  是电压相量  $V$  的中点, 如图 12-49 所示.

支路 2 有一个半圆的  $Y$ -轨迹[见图 12-28(c)]. 电流轨迹也是半圆, 如图 12-50(a)所示. 图 12-50(b)的电压相量图由电感两端的电压  $V_{BN}$  和电阻  $R_1$  两端的电压  $V_{MB}$  组成. 两个电压的矢量和

$$V = V_{MN} = V_{BN} + V_{MB}$$

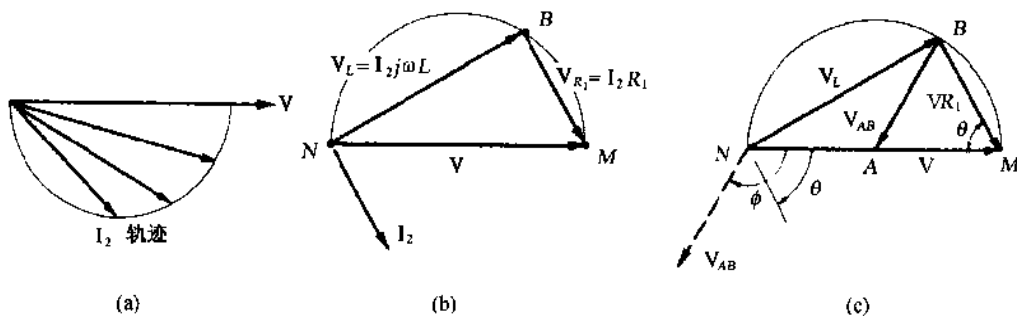


图 12-50

由于  $I_2$  落后于  $V_{BN} 90^\circ$ , 在图 12-50(b)中, 对于所有  $L$  值,  $V_{BN}$  和  $V_{MB}$  都是垂直的. 随着  $L$  由 0 变化到  $\infty$ ,  $B$  点沿着半圆从  $N$  移向  $M$ . 图 12-49 和图 12-50(b)叠加到图 12-50(c)中. 很清楚  $V_{AB}$  是半圆的半径, 因此

$$|V_{AB}| = \frac{1}{2} |V|$$

$V_{AB}$  落后于  $V$  的角度  $\phi$  等于  $2\theta$ , 这里,  $\theta = \tan^{-1} \omega L / R_1$ .

### 补充习题

- 12.22 一个高通  $RL$  电路,  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $L_2 = 0.2 \text{ mH}$ . (a) 如果电压传递函数的幅值是  $|H_{v\infty}| = 0.90$ , 求  $\omega$ ? (b) 在  $L_2$  的两端接一个负载  $R = 1 \text{ M}\Omega$ , 求在  $\omega = 7.5 \times 10^8 \text{ rad/s}$  的  $|H_v|$ .  
答案: (a)  $5.16 \times 10^8 \text{ rad/s}$ ; (b) 0.908
- 12.23 一个高通  $RL$  电路,  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 0.05 \text{ H}$ ,  $\omega = 2.5 \omega_r$ , 求  $H_{v\infty}$ ?  
答案:  $0.928 \angle 21.80^\circ$
- 12.24 一个低通  $RC$  电路无负载时  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ . (a) 如果在  $10 \text{ kHz}$  时  $|H_v| = 0.5$ , 求  $C_2$ . (b) 求在  $5 \text{ kHz}$  时的  $H_v$ . (c)  $C_2$  取什么值使得在  $8 \text{ kHz}$  时  $|H_v| = 0.90$ ? (d) 使用 (a) 中求得的  $C_2$ , 求在  $8 \text{ kHz}$  时使  $|H_v| = 0.90$  的  $R_1$  的新值.  
答案: (a)  $5.51 \mu\text{F}$ ; (b)  $0.756 \angle -40.89^\circ$ ; (c)  $1.93 \mu\text{F}$ ; (d)  $1749 \Omega$
- 12.25 一个由  $R_1$  和  $R_2$  组成的简单分压器. 如果存在寄生电容  $C_S$ , 分压器一般就与频率有关. 请说明在图 12-51 所示的电路中, 如果补偿电容  $C_1$  有一定值时,  $V_2/V_1$  与频率无关.  
答案:  $C_1 = (R_2/R_1)C_S$

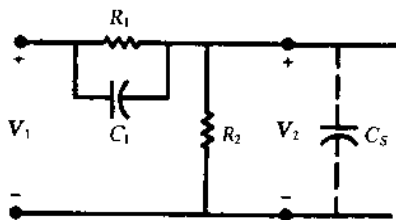


图 12-51

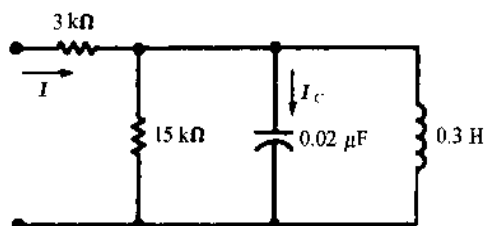


图 12-52

- 12.26 假设有一个频率可变的正弦电压源  $V_{\text{max}} = 50 \text{ V}$ , 加到图 12-52 所示的电路中. (a) 在什么频率  $f$  下

$|I|$ 为最小值? (b)计算电流最小值. (c)在这个频率下 $|I_C|$ 是多少?

答案: (a) 2.05 kHz; (b) 2.78 mA; (c) 10.8 mA

- 12.27 一个  $20\mu\text{F}$  的电容器与一个  $L = 1\text{ mH}$  串联一个  $R = 7\Omega$  电阻的实际电感器并联. 求并联电路的谐振频率, 以 rad/s 和 Hz 表示.

答案: 1000 rad/s, 159.2 Hz

- 12.28 如果图 12-53 所示的网络在所有频率下都谐振,  $R_L$  和  $R_C$  的值必须是什么关系?

答案:  $R_L = R_C = 5\Omega$

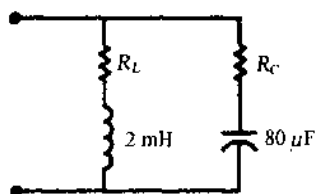


图 12-53

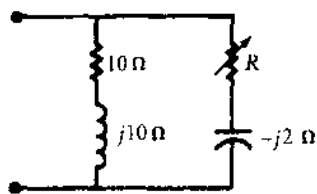


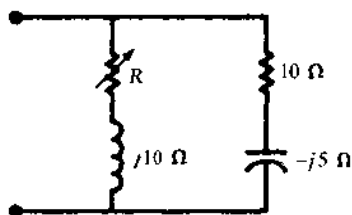
图 12-54

- 12.29 对于图 12-54 所示并联网络, 求 (a) 谐振时的  $R$  值; (b) 将 RC 支路转换为并联等效电路.

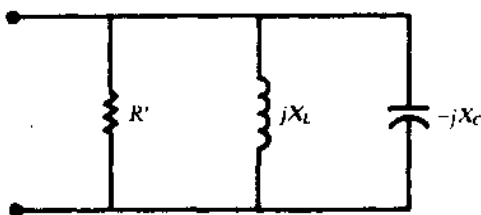
答案: (a) 6.0 Ω; (b)  $R_p = 6.67\Omega$ ,  $X_{C_p} = 20\Omega$

- 12.30 对于图 12-55(a) 求谐振时的  $R$  值, 在图 12-55(b) 中并联等效电路的  $R'$ ,  $X_L$  和  $X_C$  的值.

答案:  $R = 12.25\Omega$ ,  $R' = 7.75\Omega$ ,  $X_L = 25\Omega$ ,  $X_C = 25\Omega$



(a)



(b)

图 12-55

- 12.31 两个支路的并联电路中, 支路 1 在  $\omega = 5000\text{ rad/s}$  时阻抗  $Z_1 = 8 + j6\Omega$ , 支路 2 有一个串联可变电容 C 的电阻  $R = 8.34\Omega$ . 求 (a) 谐振时电容 C. (b) 画出导纳轨迹草图.

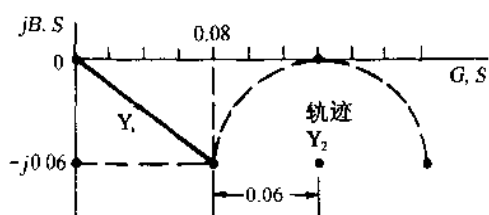


图 12-56

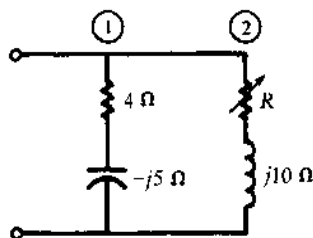


图 12-57

答案: (a) 24  $\mu\text{F}$ . (b) 见图 12-56

- 12.32 求图 12-57 所示网络的谐振电阻  $R$ , 画出导纳轨迹草图.

答案: 谐振不能靠改变电阻  $R$  实现, 轨迹图见图 12-58.

- 12.33 在题 12.32 中, 电感的电抗取什么值时可以使电路在可变电阻  $R$  的某一值谐振?

答案:  $X_L \leq 8.2\Omega$

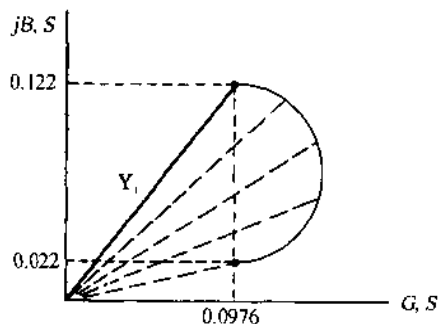


图 12-58

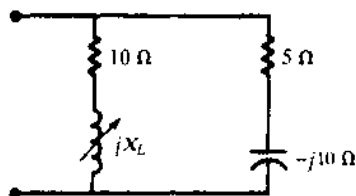


图 12-59

- 12.34 (a)画出图 12-59 所示电路的导纳轨迹图。(b)在  $RL$  支路中,电阻取什么值可以使电路仅在一个  $X_L$  值时谐振?

答案:(a)见图 12-60。(b)6.25  $\Omega$ 。

- 12.35 确定图 12-61 所示电路在 5000 rad/s 处谐振时的  $L$  的值。

答案:2.43 mH, 66.0  $\mu\text{H}$

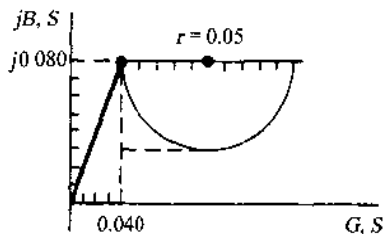


图 12-60

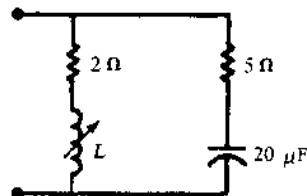


图 12-61

- 12.36 一个三支路的并联电路有两个支路的元件是固定的;第三个支路中,一个元件是可变的.电压—电流相量图示于图 12-62.如果  $\omega = 5000$  rad/s,求所有元件。

答案:支路 1:  $R = 8.05 \Omega$ ,  $L = 0.431$  mH;

支路 2:  $R = 4.16 \Omega$ ,  $C = 27.7$   $\mu\text{F}$ ;

支路 3:  $L = 2.74$  mH,  $R$  可变。

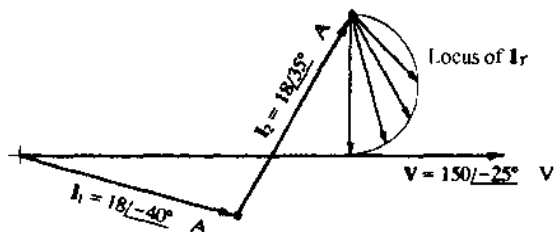


图 12-62

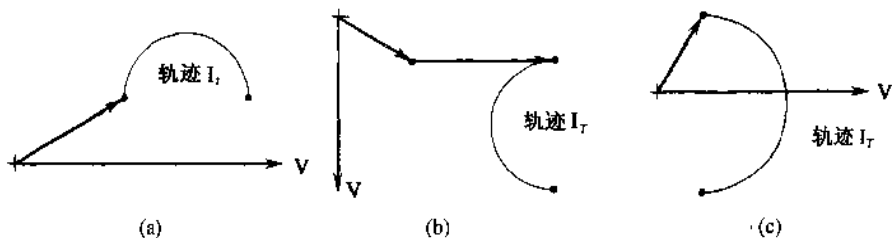


图 12-63

**12.37** 描述图 12-63 中每一个轨迹图所对应的电路, 设在每一个电路中只有一个可变元件.

答案: (a) 两支路的并联电路. 支路 1: 固定的  $R$  和  $X_C$ ; 支路 2: 固定的  $R$ , 可变的  $X_C$ .

(b) 三支路的并联电路. 支路 1: 固定的  $R$  和  $X_C$ ; 支路 2: 固定的  $X_C$ ; 支路 3: 固定的  $R$ , 可变的  $X_L$ .

(c) 两支路的并联电路. 支路 1: 固定的  $R$  和  $X_C$ ; 支路 2: 固定的  $X_L$ , 可变的  $R$ .

## 第 13 章 二端口网络

### 13.1 端点和端口

在两端点网络中,端点电压、端点电流与阻抗之间的关系为: $Z = V/I$ .在四端点网络中,每一对端点(端口)分别连接到另外一个电路,如图 13-1 所示,四个变量  $i_1, i_2, v_1, v_2$  由两个端口特性的方程进行联系.这两个方程加上连接电路的端点特性,提供了求解四个变量所需的方程.

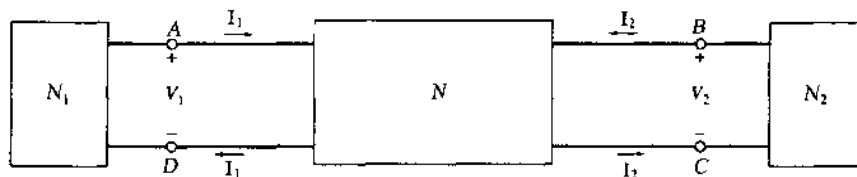


图 13-1

### 13.2 Z 参数

具有线性元件和独立电源的两端口网络的端点特性可以在  $s$  域中写成

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (1)$$

系数  $Z_{ij}$  具有阻抗量纲,称为网络的  $Z$  参数。 $Z$  参数也叫开路阻抗参数,因为它们可以在端点开路时在端点测量到.它们是:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (2)$$

例 13.1 求图 13-2 所示电路的  $Z$  参数.

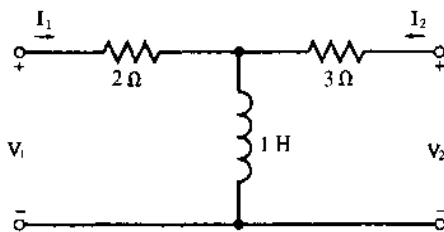


图 13-2

对图 13-2 电路带有回路电流  $I_1$  和  $I_2$  的两个回路应用 KVL, 得到

$$\begin{aligned} V_1 &= 2I_1 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + sI_2 \\ V_2 &= 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2 \end{aligned} \quad (3)$$

比较(1)和(3)式, 电路的  $Z$  参数为

$$\begin{aligned} Z_{11} &= s + 2 \\ Z_{12} &= Z_{21} = s \\ Z_{22} &= s + 3 \end{aligned} \quad (4)$$

注意,在这个例子中,  $Z_{12} = Z_{21}$ .

### 互补和非互补网络

如果开路电路传递阻抗相等,即  $Z_{12} = Z_{21}$ ,则这二端口网络就称为互补的.在互补二端口网络中,用电流  $I$  输入一个端口,在另一个端口测量得到的开路电压都是相等的.电压等于  $V = Z_{12}I = Z_{21}I$ .含有电阻、电感和电容的网络一般是互补的.有额外非独立电源的网络一般是非互补的(见例 13.2)

**例 13.2** 图 13-3 所示二端口电路中有一个电流控制电压源.求它的  $Z$  参数.

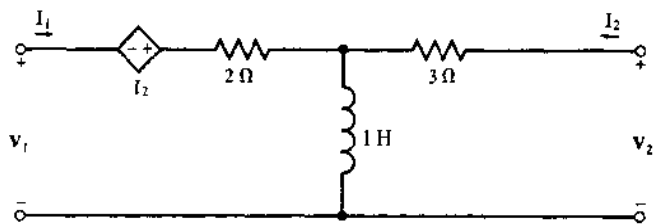


图 13-3

同例 13.1,对两个回路用 KVL

$$V_1 = 2I_1 - I_2 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + (s - 1)I_2$$

$$V_2 = 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2$$

$Z$  参数为

$$Z_{11} = s + 2$$

$$Z_{12} = s - 1$$

$$Z_{21} = s$$

$$Z_{22} = s + 3 \quad (5)$$

在有非独立电源的电路中,  $Z_{12} \neq Z_{21}$ ,所以这个二端口电路是非互补的.

### 13.3 互补网络的 T 等效电路

一个互补网络可以用图 13-4 所示的 T 等效电路作为模型.  $Z_a$ ,  $Z_b$  和  $Z_c$  可以从  $Z$  参数得到

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12}$$

$$Z_b = Z_{22} - Z_{21} \quad (6)$$

$$Z_c = Z_{12} = Z_{21}$$

T 等效网络不要求一定能够实现.

**例 13.3** 求图 13-4 电路的  $Z$  参数.

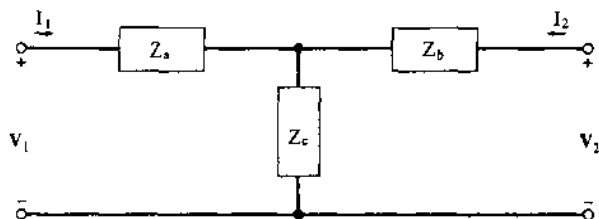


图 13-4

应用 KVL, 得到

$$V_1 = Z_a I_1 + Z_c (I_1 + I_2) = (Z_a + Z_c) I_1 + Z_c I_2$$

$$V_2 = Z_b I_2 + Z_c (I_1 + I_2) = Z_c I_1 + (Z_b + Z_c) I_2 \quad (7)$$

比较(1)和(7)式,求得  $Z$  参数

$$Z_{11} = Z_a + Z_c$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_c$$

$$Z_{22} = Z_b + Z_c \quad (8)$$

### 13.4 Y 参数

端点特性也可以写成(9)式的形式,这里将  $I_1$  和  $I_2$  用  $V_1$  和  $V_2$  表示为

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \quad (9)$$

系数  $Y_{ij}$  有导纳的量纲,称为  $Y$  参数或短路导纳参数,因为它们可以在一个端口短路时从另一个端口测量到。 $Y$  参数是

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad (10)$$

例 13.4 求图 13-5 所示电路的  $Y$  参数。

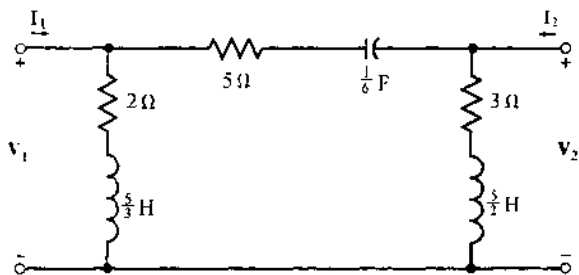


图 13-5

对输入和输出节点应用 KCL(为方便,我们设电路的三条支路的导纳为  $Y_a, Y_b, Y_c$ , 如图 13-6 所示),有

$$Y_a = \frac{1}{2 + 5s/3} = \frac{3}{5s + 6}$$

$$Y_b = \frac{1}{3 + 5s/2} = \frac{2}{5s + 6}$$

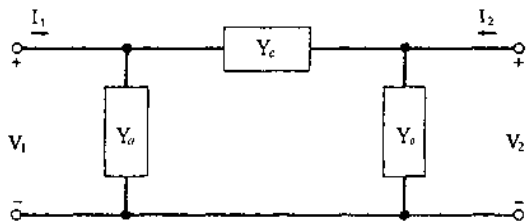


图 13-6



$$Y_c = \frac{1}{5 + 6/s} = \frac{s}{5s + 6} \quad (11)$$

节点方程是

$$\begin{aligned} I_1 &= V_1 Y_a + (V_1 - V_2) Y_c = (Y_a + Y_c) V_1 - Y_c V_2 \\ I_2 &= V_2 Y_b + (V_2 - V_1) Y_c = -Y_c V_1 + (Y_b + Y_c) V_2 \end{aligned} \quad (12)$$

比较(9)和(12)式, 得到

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_a + Y_c \\ Y_{12} &= Y_{21} = -Y_c \\ Y_{22} &= Y_b + Y_c \end{aligned} \quad (13)$$

将(11)式中的  $Y_a, Y_b, Y_c$  代入(13)式, 有

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{s+3}{5s+6} \\ Y_{12} &= Y_{21} = \frac{-s}{5s+6} \\ Y_{22} &= \frac{s+2}{5s+6} \end{aligned} \quad (14)$$

由于  $Y_{12} = Y_{21}$ , 则这个二端口网络是互补的。

### 13.5 互补网络的 Pi 等效电路

一个互补网络可以用图 13-6 所示的 Pi 等效电路作为模型. Pi 等效电路的三个元件可以用反推方法求得. 首先求出图 13-6 电路的 Y 参数, 由(10)式得

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_a + Y_c & [\text{图 13-7(a)}] \\ Y_{12} &= -Y_c & [\text{图 13-7(b)}] \\ Y_{21} &= -Y_c & [\text{图 13-7(a)}] \\ Y_{22} &= Y_b + Y_c & [\text{图 13-7(b)}] \end{aligned} \quad (15)$$

由此可得

$$Y_a = Y_{11} + Y_{12} \quad Y_b = Y_{22} + Y_{12} \quad Y_c = -Y_{12} = -Y_{21} \quad (16)$$

Pi 等效网络并非一定能够实现。

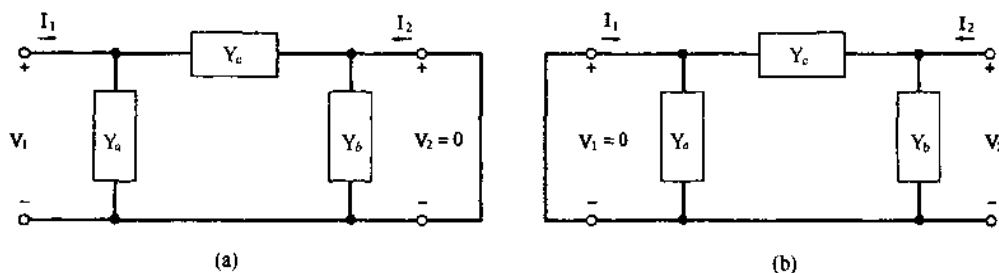


图 13-7

### 13.6 端点特性的应用

在二端口网络中四个端点变量  $I_1, I_2, V_1, V_2$ , 由两个方程(1)或(9)式相关联. 如图 13-1 所示, 根据将二端口电路连接到外部电路的情况, 可以得到附加的两个方程. 这四个方程就可以确定  $I_1, I_2, V_1, V_2$ , 而不需要了解电路的内部结构。

**例 13.5** 给定二端口网络的 Z 参数

$$Z_{11} = 2s + 1/s \quad Z_{12} = Z_{21} = 2s \quad Z_{22} = 2s + 4$$

如图 13-8 所示, 将网络连接到电源和负载上, 求  $I_1, I_2, V_1$  和  $V_2$ 。

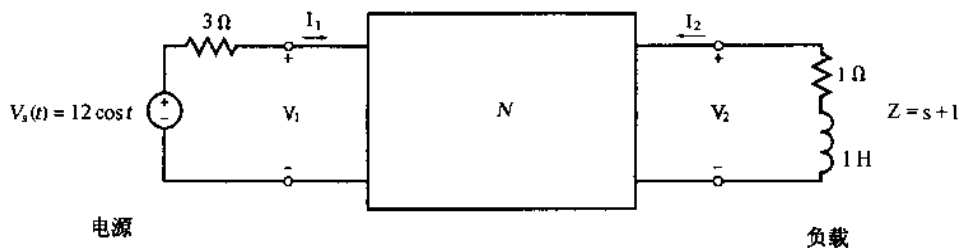


图 13-8

端点特性由下式给出

$$\begin{aligned} V_1 &= (2s + 1/s)I_1 + 2sI_2 \\ V_2 &= 2sI_1 + (2s + 4)I_2 \end{aligned} \quad (17)$$

电压  $v_s(t)$  的相量表示为  $V_s = 12V$ ,  $s = j$ , 由输入回路和输出回路的 KVL 方程得到两个附加方程(18):

$$\begin{aligned} V_s &= 3I_1 + V_1 \\ 0 &= (1 + s)I_2 + V_2 \end{aligned} \quad (18)$$

将  $s = j$  和  $V_s = 12V$  代入(17)和(18)式中得

$$\begin{aligned} V_1 &= jI_1 + 2jI_2 \\ V_2 &= 2jI_1 + (4 + 2j)I_2 \\ 12 &= 3I_1 + V_1 \\ 0 &= (1 + j)I_2 + V_2 \end{aligned}$$

由此得:

$$\begin{aligned} I_1 &= 3.29 \angle -10.2^\circ & I_2 &= 1.13 \angle -131.2^\circ \\ V_1 &= 2.88 \angle 37.5^\circ & V_2 &= 1.6 \angle 93.8^\circ \end{aligned}$$

### 13.7 Z 参数与 Y 参数间的转换

Y 参数可以通过求解(1)式中的  $I_1$  和  $I_2$  的 Z 参数得到. 对(1)式应用克莱姆法则得到

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Z_{22}}{D_{zz}}V_1 - \frac{Z_{12}}{D_{zz}}V_2 \\ I_2 &= \frac{-Z_{21}}{D_{zz}}V_1 + \frac{Z_{11}}{D_{zz}}V_2 \end{aligned} \quad (19)$$

这里,  $D_{zz} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$  由(1)式中的系数确定. 比较式(7)和(19), 有

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{D_{zz}} \\ Y_{12} &= \frac{-Z_{12}}{D_{zz}} \\ Y_{21} &= \frac{-Z_{21}}{D_{zz}} \\ Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{D_{zz}} \end{aligned} \quad (20)$$

给定 Z 参数, 要使 Y 参数存在,  $D_{zz}$  必须不为零.

相反, 给定 Y 参数, Z 参数为:

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{D_{YY}}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{12} &= \frac{-Y_{12}}{D_{YY}} \\
 Z_{21} &= \frac{-Y_{21}}{D_{YY}} \\
 Z_{22} &= \frac{Y_{11}}{D_{YY}}
 \end{aligned} \quad (21)$$

这里,  $D_{YY} = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$  由 (9) 式中的系数所确定. 为了由二端口电路的  $Y$  参数求出它的  $Z$  参数,  $D_{YY}$  不能为零.

**例 13.6** 参考例 13.4, 由图 13-5 的电路的  $Y$  参数求其  $Z$  参数.

电路的  $Y$  参数已求出为 [见 (14) 式]

$$Y_{11} = \frac{s+3}{5s+6} \quad Y_{12} = Y_{21} = \frac{-s}{5s+6} \quad Y_{22} = \frac{s+2}{5s+6}$$

代入式 (21) 中,  $D_{YY} = 1/(5s+6)$ , 得到:

$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= s+2 \\
 Z_{12} &= Z_{21} = s \\
 Z_{22} &= s+3
 \end{aligned} \quad (22)$$

式 (22) 的  $Z$  参数与图 13-2 电路的  $Z$  参数相同. 就涉及到的端点而言, 两个电路是等效的, 这是由设计而定的. 图 13-2 是图 13-5 的 T 型等效电路. 图 13-2 和图 13-5 之间的等效电路可以将 (6) 式用于 (22) 式的  $Z$  参数来得到 T 型等效网络的方法进行检验.

### 13.8 h 参数

一些二端口电路或电子器件可以用下面的端点方程进行最好的描述:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\
 I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2
 \end{aligned} \quad (23)$$

这里,  $h_{ij}$  被称做混合参数或  $h$  参数.

**例 13.7** 求图 13-9 电路的  $h$  参数.

这是一个在线性区域内工作的双极性连接的晶体管的简单模型. 通过观察, 图 13-9 电路的端点特性为

$$V_1 = 50I_1 \quad \text{及} \quad I_2 = 300I_1 \quad (24)$$

比较 (23) 和 (24) 式, 得出

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= 50 & h_{12} &= 0 \\
 h_{21} &= 300 & h_{22} &= 0
 \end{aligned} \quad (25)$$

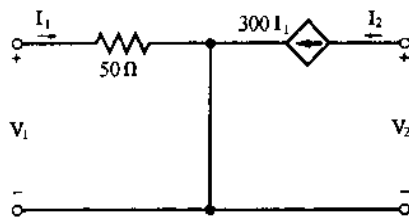


图 13-9

### 13.9 g 参数

二端口电路的端点特性也可以用 (26) 式给出的另一种混合参数的形式描述

$$\begin{aligned}
 I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\
 V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2
 \end{aligned} \quad (26)$$

系数  $g_{ij}$  称为反转混合参数或  $g$  参数.

**例 13.8** 求图 13-10 所示电路的  $g$  参数.

这是一个在线性区域内工作的场效应管的简化模型. 为了求  $g$  参数, 我们首先在端点应用基尔霍夫定律, 从而得出端点方程

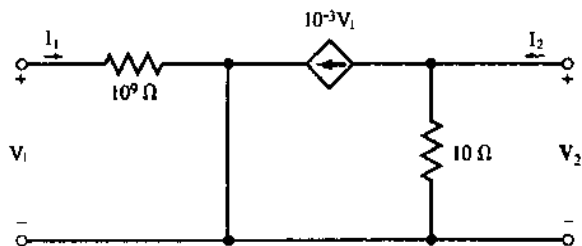


图 13-10

输入端  $V_1 = 10^9 I_1$

输出端  $V_2 = 10(I_2 - 10^{-3} V_1)$

或

$$I_1 = 10^{-9} V_1 \quad \text{及} \quad V_2 = 10 I_2 - 10^{-2} V_1 \quad (27)$$

比较(27)和(26)式, 得出

$$g_{11} = 10^{-9}, \quad g_{12} = 0, \quad g_{21} = -10^{-2}, \quad g_{22} = 10 \quad (28)$$

### 13.10 传递参数

传递参数  $A, B, C, D$  用所在的目标变量  $V_2$  和  $I_2$  来表示所需的源变量  $V_1$  和  $I_1$ , 称为 **ABCD 或 T 参数**. 由下式定义:

$$V_1 = A V_2 - B I_2$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2 \quad (29)$$

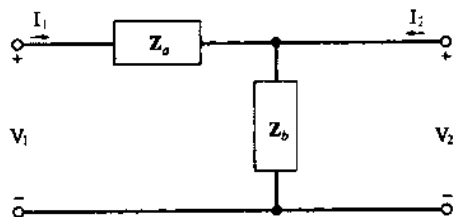


图 13-11

**例 13.9** 求图 13-11 中的 T 参数, 此处,  $Z_a$  和  $Z_b$  都不为零.

这是简化的集中模型. 由(29)式得出

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_a + Z_b}{Z_b} = 1 + Z_a Y_b$$

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = Z_a$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = Y_b \quad (30)$$

$$D = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = 1$$

### 13.11 互联二端口网络

二端口网络可以用各种形式进行连接, 如串联、并联或级联, 从而构成新的二端口网络. 对于每一种结构, 都有一组确定的参数有效地描述这个网络.

**串联:**

图 13-12 表示了两个有开路阻抗  $Z_a$  和  $Z_b$  的二端口网络 **a** 和 **b** 的串联情况. 在这种结构中, 由于它们以两个阻抗的串联方式进行结合, 因此, 我们使用 **Z 参数**. 串联的 **Z 参数** 为 (见题 13.10)

$$Z_{11} = Z_{11,a} + Z_{11,b}$$

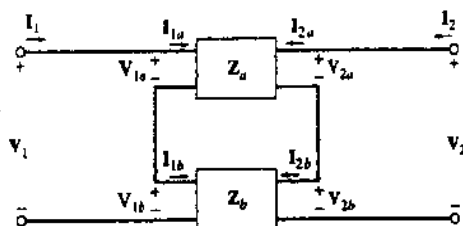


图 13-12

$$Z_{12} = Z_{12,a} + Z_{12,b}$$

$$Z_{21} = Z_{21,a} + Z_{21,b}$$

$$Z_{22} = Z_{22,a} + Z_{22,b} \quad (31a)$$

以矩阵形式表示

$$[Z] = [Z_a] + [Z_b] \quad (31b)$$

### 并联

图 13-13 表示了两个具有短路导纳  $Y_a$  和  $Y_b$  的二端口网络 a 和 b 并联时的情况. 此时, 使用 Y 参数很方便. 并联的 Y 参数为(见题 13.11)

$$Y_{11} = Y_{11,a} + Y_{11,b}$$

$$Y_{12} = Y_{12,a} + Y_{12,b}$$

$$Y_{21} = Y_{21,a} + Y_{21,b}$$

$$Y_{22} = Y_{22,a} + Y_{22,b}$$

(32a)

以矩阵形式表示

$$[Y] = [Y_a] + [Y_b] \quad (32b)$$

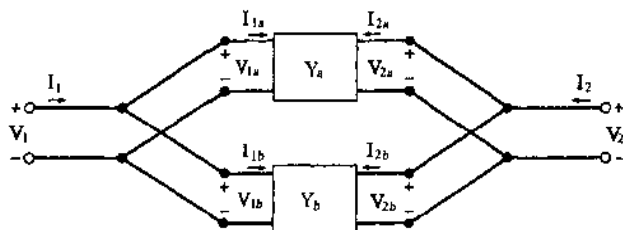


图 13-13

### 级联

两个二端口网络 a 和 b 级联的情况示于图 13-14 中. 此时, 使用 T 参数非常方便. 级联的 T 参数是

$$A = A_a A_b + B_a C_b$$

$$B = A_a B_b + B_a D_b$$

$$C = C_a A_b + D_a C_b$$

$$D = C_a B_b + D_a D_b$$

(33a)

以矩阵形式表示

$$[T] = [T_a][T_b] \quad (33b)$$

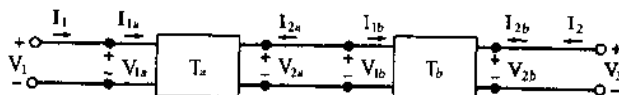


图 13-14

### 13.12 参数类型的选择

采用什么形式的参数更适合并能更好地描述给定的二端口网络或器件? 有几种因素影响参数的选择. (1)可能某些类型的参数不存在或无定义. (2)当网络与其他网络相连时, 某些参

数更方便,如在 13.11 节所述.在这方面,将二端口网络转换到它的 T 或 Pi 等效电路,然后使用熟悉的分析技术,例如减少元件数目和电流分流,我们就可以大大简化整个电路.(3)对某些网络或器件,当使用内部互联电路时,某类型的参数会产生较好的计算精度和较好的灵敏度.

**例 13.10** 求图 13-15 所示电路的 Z 和 Y 参数.

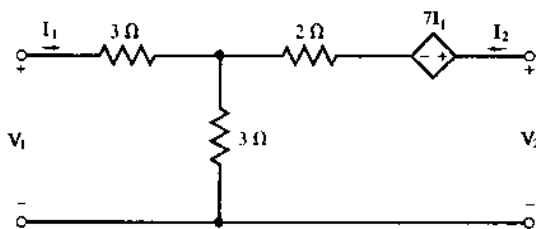


图 13-15

对输入和输出回路应用 KVL 方程,

$$\text{输入回路} \quad V_1 = 3I_1 + 3(I_1 + I_2)$$

$$\text{输出回路} \quad V_2 = 7I_2 + 2I_2 + 3(I_1 + I_2)$$

$$\text{或} \quad V_1 = 6I_1 + 3I_2 \quad \text{及} \quad V_2 = 10I_1 + 5I_2$$

比较(34)和(2)式,得出

$$Z_{11} = 6 \quad Z_{12} = 3 \quad Z_{21} = 10 \quad Z_{22} = 5$$

而 Y 参数没有定义,这是由于应用(10)式的直接方法或由(19)式的 Z 参数进行转换,得到  $D_{zz} = 6(5) - 3(10) = 0$ .

### 13.13 端点参数及转换的总结

端点参数由下述方程定义

**Z 参数**

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

$$[V] = [Z][I]$$

**Y 参数**

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

$$[I] = [Y][V]$$

**h 参数**

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

**T 参数**

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

**g 参数**

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

表 13-1 总结了 Z, Y, h, g 和 T 参数之间的转换.

表 13-1

	Z	Y	h	g	T
Z	$Z_{11} \quad Z_{12}$	$\frac{Y_{22}}{D_{YY}} \quad \frac{-Y_{12}}{D_{YY}}$	$\frac{D_{hh}}{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}} \quad \frac{-g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C} \quad \frac{D_{TT}}{C}$
	$Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{-Y_{21}}{D_{YY}} \quad \frac{Y_{11}}{D_{YY}}$	$\frac{-h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}} \quad \frac{D_{gg}}{g_{11}}$	$\frac{1}{C} \quad \frac{D}{C}$
Y	$\frac{Z_{22}}{D_{ZZ}} \quad \frac{-Z_{12}}{D_{ZZ}}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$	$\frac{1}{h_{11}} \quad \frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{22}} \quad \frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B} \quad \frac{-D_{TT}}{B}$
	$\frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}} \quad \frac{Z_{11}}{D_{ZZ}}$	$Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}} \quad \frac{-D_{hh}}{h_{11}}$	$\frac{-g_{21}}{g_{22}} \quad \frac{1}{g_{22}}$	$\frac{-1}{B} \quad \frac{A}{B}$

续表

	$Z$	$Y$	$h$	$g$	$T$
$h$	$\frac{D_{ZZ}}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $\frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{D_{YY}}{Y_{11}}$	$h_{11} \quad h_{12}$ $h_{21} \quad h_{22}$	$\frac{g_{22}}{D_{gg}} \quad \frac{g_{12}}{D_{gg}}$ $\frac{g_{21}}{D_{gg}} \quad \frac{g_{11}}{D_{gg}}$	$\frac{B}{D} \quad \frac{D_{TT}}{D}$ $\frac{-1}{D} \quad \frac{C}{D}$
$g$	$\frac{1}{Z_{11}} \quad \frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad \frac{D_{ZZ}}{Z_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{Y_{22}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $\frac{-Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{D_{hh}} \quad \frac{-h_{12}}{D_{hh}}$ $\frac{-h_{21}}{D_{hh}} \quad \frac{h_{11}}{D_{hh}}$	$g_{11} \quad g_{12}$ $g_{21} \quad g_{22}$	$\frac{C}{A} \quad \frac{-D_{TT}}{A}$ $\frac{1}{A} \quad \frac{B}{A}$
$T$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{D_{ZZ}}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{-1}{Y_{21}}$ $\frac{-D_{YY}}{Y_{21}} \quad \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{-D_{hh}}{h_{21}} \quad \frac{-h_{11}}{h_{21}}$ $\frac{-h_{22}}{h_{21}} \quad \frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}} \quad \frac{g_{22}}{g_{21}}$ $\frac{g_{11}}{g_{21}} \quad \frac{D_{gg}}{g_{21}}$	$A \quad B$ $C \quad D$

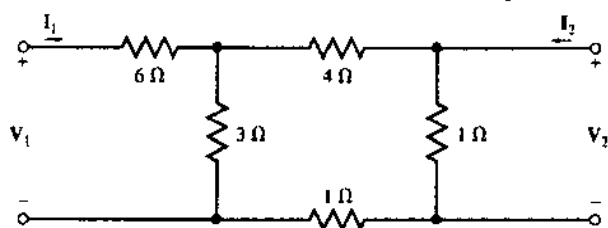
$D_{PP} = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$  由  $Z, Y, h, g$  或  $T$  参数确定.

## 习题及解答

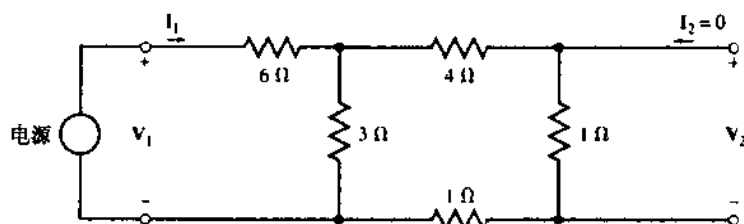
13.1 求图 13-16(a)电路的  $Z$  参数.

解 把电源接到 #1 端口使 #2 端口开路 [如图 13-16(b)], 得到  $Z_{11}$  和  $Z_{21}$ . 电阻的并联与串联结合使得

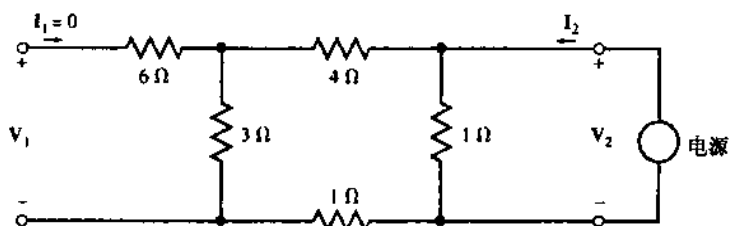
$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = 8 \quad \text{及} \quad Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = 1/3$$



(a)



(b)



(c)

图 13-16

同样,将电源连接到#2端口使#1端口开路得到 $Z_{22}$ 和 $Z_{12}$ [图13-16(c)].

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = 8/9 \quad \text{及} \quad Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = 1/3$$

因为 $Z_{12} = Z_{21}$ ,所以电路是互补的.

### 13.2 二端口网络 $N$ 的 $Z$ 参数给定为

$$Z_{11} = 2s + 1/s \quad Z_{12} = Z_{21} = 2s \quad Z_{22} = 2s + 4$$

(a)求 $N$ 的 $T$ 等效电路.(b)将网络 $N$ 如图13-8所示电路那样连接电源和负载,用 $T$ 等效电路代替 $N$ ,求解 $i_1, i_2, v_1$ 和 $v_2$ .

解 (a) $T$ 等效电路的三个支路为(图13-4):

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 2s + 1/s - 2s = 1/s$$

$$Z_b = Z_{22} - Z_{12} = 2s + 4 - 2s = 4$$

$$Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 2s$$

(b)仅连接输入和输出的 $N$ 网络的 $T$ 等效电路在相量域中表示如图13-17所示.

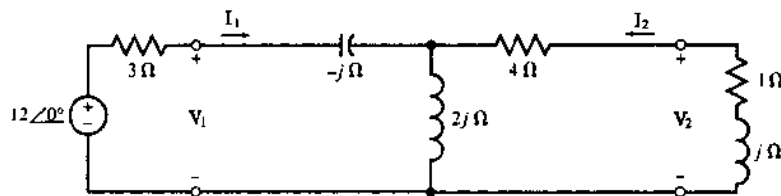


图 13-17

对图13-17使用分析技术,包括简化元件和电流分流,求得 $i_1, i_2, v_1$ 和 $v_2$ .

相量域中

$$I_1 = 3.29 \angle -10.2^\circ$$

$$I_2 = 1.13 \angle -131.2^\circ$$

$$V_1 = 2.88 \angle 37.5^\circ$$

$$V_2 = 1.6 \angle 93.8^\circ$$

时间域中

$$i_1 = 3.29 \cos(t - 10.2^\circ)$$

$$i_2 = 1.13 \cos(t - 131.2^\circ)$$

$$v_1 = 2.88 \cos(t + 37.5^\circ)$$

$$v_2 = 1.6 \cos(t + 93.8^\circ)$$

### 13.3 求图13-18所示的二端口网络的 $Z$ 参数.

解 将KVL用于输入和输出端口,得到:

$$\text{输入端口: } V_1 = 4I_1 - 3I_2 + (I_1 + I_2) = 5I_1 - 2I_2$$

$$\text{输出端口: } V_2 = I_2 + (I_1 + I_2) = I_1 + 2I_2$$

将(2)式用于上式,有 $Z_{11} = 5, Z_{12} = -2, Z_{21} = 1, Z_{22} = 2$ .

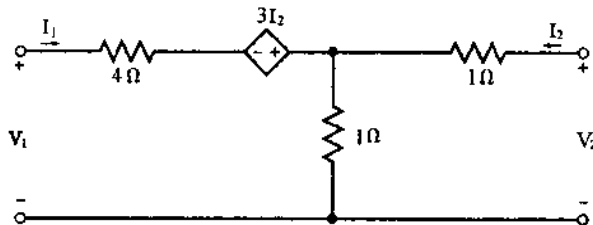


图 13-18

### 13.4 求图13-19所示的二端口网络的 $Z$ 参数,并和题13.3的结果进行比较.

解 由KVL得到:

$$V_1 = 5I_1 - 2I_2 \quad \text{及} \quad V_2 = I_1 + 2I_2$$

上述方程和图13-18网路得到的端点特性相同.因此,这两个网络是等效的.

### 13.5 使用 $Z$ 参数求图13-19所示电路的 $Y$ 参数.



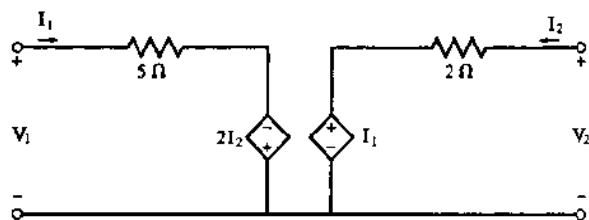


图 13-19

解 由题 13.4 得到:

$$Z_{11} = 5, \quad Z_{12} = -2, \quad Z_{21} = 1, \quad Z_{22} = 2$$

$$\text{由于 } D_{ZZ} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = (5)(2) - (-2)(1) = 12$$

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_{ZZ}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{D_{ZZ}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}} = \frac{-1}{12} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_{ZZ}} = \frac{5}{12}$$

13.6 求图 13-20 所示的二端口网络的  $Y$  参数, 证明图 13-19 和图 13-20 的网络是等效的.

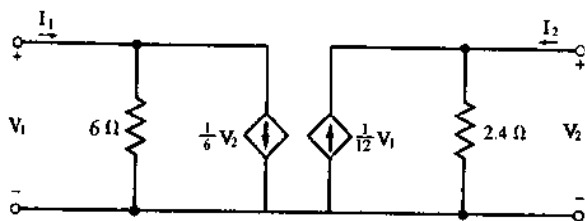


图 13-20

解 在端口应用 KCL 得到端点特性和  $Y$  参数:

$$\text{输入端口} \quad I_1 = \frac{V_1}{6} + \frac{V_2}{6}$$

$$\text{输出端口} \quad I_2 = \frac{V_2}{2.4} - \frac{V_1}{12}$$

$$\text{以及} \quad Y_{11} = \frac{1}{6} \quad Y_{12} = \frac{1}{6} \quad Y_{21} = \frac{-1}{12} \quad Y_{22} = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$$

这和对图 13-19 的题 13.5 所求得的  $Y$  参数是相同的. 因此, 这两个网络是等效的.

13.7 应用短路方程(10)求图 13-21 所示的二端口网络的  $Y$  参数.

解

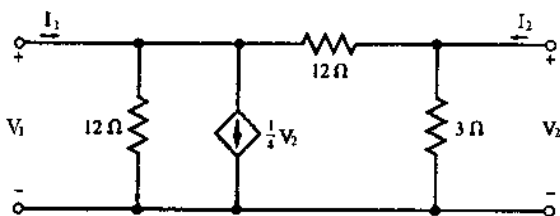


图 13-21

$$I_1 = Y_{11} V_1 \Big|_{V_2=0} = \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) V_1 \quad \text{或} \quad Y_{11} = \frac{1}{6}$$

$$I_1 = Y_{12} V_2 \Big|_{V_1=0} = \frac{V_2}{4} - \frac{V_2}{12} = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) V_2 \quad \text{或} \quad Y_{12} = \frac{1}{6}$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 \Big|_{V_2=0} = -\frac{V_1}{12} \quad \text{或} \quad Y_{21} = -\frac{1}{12}$$

$$I_2 = Y_{22} V_2 \Big|_{V_1=0} = \frac{V_2}{3} + \frac{V_2}{12} = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) V_2 \quad \text{或} \quad Y_{22} = \frac{5}{12}$$

13.8 在图 13-21 所示的网络的节点应用 KCL, 求它的端口特性和  $Y$  参数. 证明图 13-18 和图 13-21 的二端口网络是全等效的.

解 输入节点  $I_1 = \frac{V_1}{12} + \frac{V_1 - V_2}{12} + \frac{V_2}{4}$

输出节点  $I_2 = \frac{V_2}{3} + \frac{V_2 - V_1}{12}$

$$I_1 = \frac{1}{6} V_1 + \frac{1}{6} V_2 \quad I_2 = -\frac{1}{12} V_1 + \frac{5}{12} V_2$$

从上面的特性方程观察到的  $Y$  参数和图 13-18, 13-19, 13-20 的电路的  $Y$  参数是相同的. 因此, 这四个电路都是等效的.

13.9 图 13-22(a) 中的二端口网络的  $Z$  参数是:  $Z_{11} = 4s$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ ,  $Z_{22} = 9s$ . 求 (a) 用 T 等效电路替代  $N$ . (b) 使用 (a) 部分求  $v_s = \cos 1000t$  (V) 时的输入电流  $i_1$ .

解 (a) 这个网络是互补的. 因此, 存在 T 等效电路. 它的参数可以由式 (6) 和图 13-22(b) 所示的电路中得到.

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 4s - 3s = s$$

$$Z_b = Z_{22} - Z_{21} = 9s - 3s = 6s$$

$$Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 3s$$

(b) 图 13-22(b) 的电路进行串联和并联的重新组合, 电阻以  $k\Omega$ ,  $s$  用  $k\text{rad/s}$  为单位. 以  $k\Omega$  为单位的  $Z_{in}$  如下

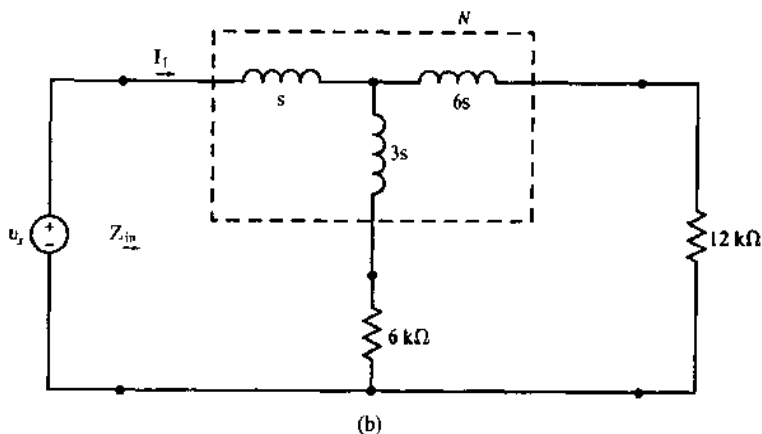
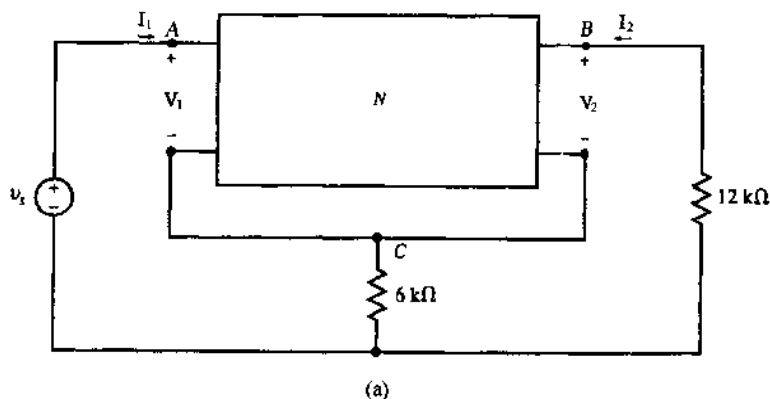


图 13-22

$$Z_{in}(s) = V_s/I_1 = s + \frac{(3s+6)(6s+12)}{9s+18} = 3s+4$$

或

$$Z_{in}(j) = 3j+4 = 5\angle 36.9^\circ \text{ k}\Omega$$

及

$$i_1 = 0.2\cos(1000t - 36.9^\circ) \text{ (mA)}$$

- 13.10 具有开路阻抗  $Z_a$  和  $Z_b$  的两个二端口网络 **a** 和 **b** 以串联方式进行连接(见图 13-12), 证明  $Z$  参数方程(31a).

**证明** 由网络 **a** 有

$$V_{1a} = Z_{11,a} I_{1a} + Z_{12,a} I_{2a}$$

$$V_{2a} = Z_{21,a} I_{1a} + Z_{22,a} I_{2a}$$

由网络 **b** 有

$$V_{1b} = Z_{11,b} I_{1b} + Z_{12,b} I_{2b}$$

$$V_{2b} = Z_{21,b} I_{1b} + Z_{22,b} I_{2b}$$

根据 **a** 和 **b** 之间的连接, 有

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b} \quad V_1 = V_{1a} + V_{1b}$$

$$I_2 = I_{2a} = I_{2b} \quad V_2 = V_{2a} + V_{2b}$$

所以

$$V_1 = (Z_{11,a} + Z_{11,b})I_1 + (Z_{12,a} + Z_{12,b})I_2$$

$$V_2 = (Z_{21,a} + Z_{21,b})I_1 + (Z_{22,a} + Z_{22,b})I_2$$

从而,  $Z$  参数(31a)式被证明.

- 13.11 有短路导纳  $Y_a$  和  $Y_b$  的两个二端口网络以并联方式进行连接(见图 13-13), 证明  $Y$  参数方程(32a).

**证明** 由网络 **a** 有

$$I_{1a} = Y_{11,a} V_{1a} + Y_{12,a} V_{2a}$$

$$I_{2a} = Y_{21,a} V_{1a} + Y_{22,a} V_{2a}$$

由网络 **b** 有

$$I_{1b} = Y_{11,b} V_{1b} + Y_{12,b} V_{2b}$$

$$I_{2b} = Y_{21,b} V_{1b} + Y_{22,b} V_{2b}$$

由 **a** 和 **b** 之间的连接有

$$V_1 = V_{1a} = V_{1b} \quad I_1 = I_{1a} + I_{1b}$$

$$V_2 = V_{2a} = V_{2b} \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

因此

$$I_1 = (Y_{11,a} + Y_{11,b})V_1 + (Y_{12,a} + Y_{12,b})V_2$$

$$I_2 = (Y_{21,a} + Y_{21,b})V_1 + (Y_{22,a} + Y_{22,b})V_2$$

由此得到  $Y$  参数(32a)式.

- 13.12 求(a)图 13-23(a)的电路的  $Z$  参数.(b)具有两个电阻和一个受控电压源的等效模型.

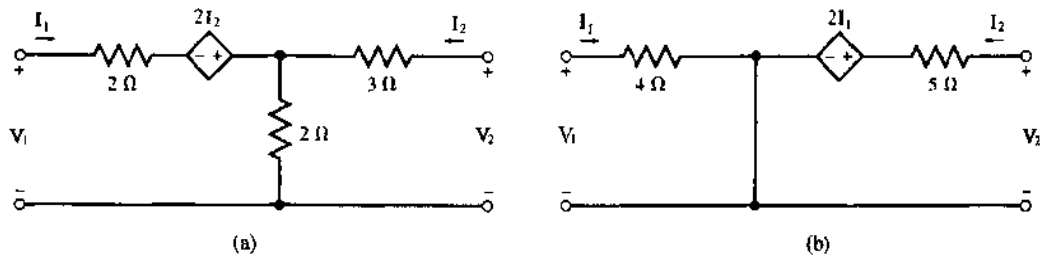


图 13-23

解 (a) 对输入和输出回路应用 KVL, 分别得到

$$V_1 = 2I_1 - 2I_2 + 2(I_1 + I_2) = 4I_1$$

$$V_2 = 3I_2 + 2(I_1 + I_2) = 2I_1 + 5I_2$$

Z 参数为  $Z_{11} = 4, Z_{12} = 0, Z_{21} = 2, Z_{22} = 5$ .

(b) 具有两个电阻一个电压源的图 13-23(b) 所示电路具有与图 13-23(a) 电路相同的 Z 参数. 这点可以通过对输入和输出回路应用 KVL 得到证明.

- 13.13 (a) 由图 13-23(a) 电路的 Z 参数, 求它的 Y 参数. (b) 求具有两个电阻和一个受控电流源的等效电路模型.

解 (a) 由题 13.12 可知:  $Z_{11} = 4, Z_{12} = 0, Z_{21} = 2, Z_{22} = 5$  以及  $D_{zz} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 20$ . 因此,

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_{zz}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{D_{zz}} = 0$$

$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{D_{zz}} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_{zz}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(b) 图 13-24 中有两个电阻和一个电流源, 与图 13-23(a) 有相同的 Y 参数. 这点可以通过对输入和输出节点应用 KCL 得到证明.

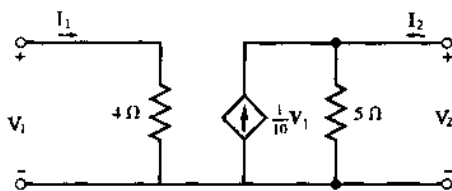


图 13-24

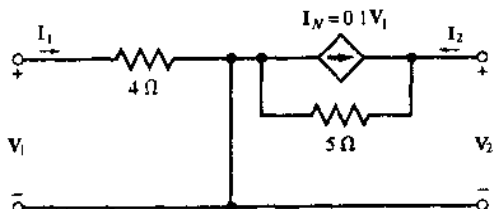


图 13-25

- 13.14 参考图 13-23(b) 电路, 将电压源和串联电阻转换成诺顿等效电路并说明转换后的电路与图 13-24 电路是相同的.

解 诺顿等效电流源是  $I_N = 2I_1/5 = 0.4I_1$ . 而  $I_1 = V_1/4$ , 因此,  $I_N = 0.4I_1 = 0.1V_1$ .  $5\Omega$  电阻与  $I_N$  并联. 电路示于图 13-25 中, 与图 13-24 的电路是相同的.

- 13.15 给定二端口网络的 h 参数. 说明该网络可以用图 13-26 的网络作为模型. 此处  $h_{11}$  是阻抗,  $h_{12}$  是电压增益,  $h_{21}$  是电流增益,  $h_{22}$  是导纳.

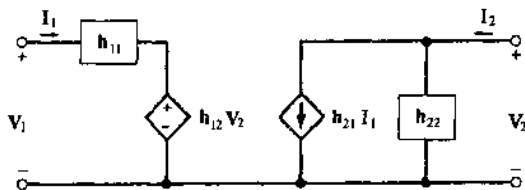


图 13-26

解 围绕输入回路应用 KVL 方程得到

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

在输出节点应用 KCL 方程得到

$$I_2 = h_{21}I_1 - h_{22}V_2$$

这些结果与(23)式的 h 参数定义一致.

- 13.16 求图 13-25 电路的 h 参数.

解 比较图 13-25 和图 13-26, 有

$$h_{11} = 4\Omega, \quad h_{12} = 0, \quad h_{21} = -0.4, \quad h_{22} = 1/5 = 0.2\Omega^{-1}$$

13.17 有图 13-25 电路的  $Z$  参数, 求它的  $h$  参数并与题 13.16 的结果进行比较.

解 参考题 13.13 的  $Z$  参数和  $D_{zz}$  的值, 使用表 13-1 将电路的  $Z$  参数转换成  $h$  参数. 有

$$h_{11} = \frac{D_{zz}}{Z_{22}} = \frac{20}{5} = 4 \quad h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = 0 \quad h_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-2}{5} = -0.4 \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = 0.2$$

上面的结果与题 13.16 的结果一样.

13.18 对于小信号的双极性晶体管电路的简化模型如图 13-27 所示. 求它的  $h$  参数.

端点的方程为  $V_1 = 0$  和  $I_2 = \beta I_1$ . 将这些方程与 (23) 式比较, 可以得出  $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$  以及  $h_{21} = \beta$ .

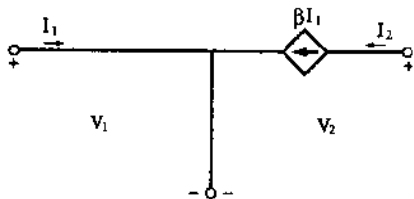


图 13-27

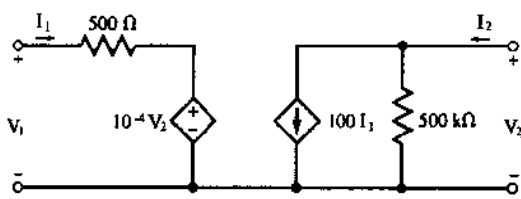


图 13-28

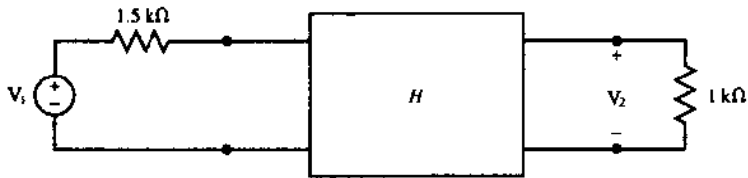
13.19 一个二端口器件  $H$  的  $h$  参数给定为

$$h_{11} = 500 \Omega \quad h_{12} = 10^{-4} \quad h_{21} = 100, \quad h_{22} = 2(10^{-6})\Omega^{-1}$$

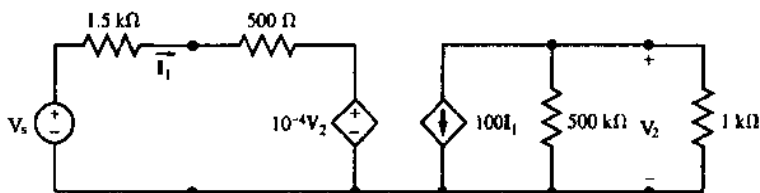
画出由两个电阻和两个受控源所组成的电路模型, 包括每一个元素的值.

解 由图 13-26 进行类比, 可以画出图 13-28 的模型.

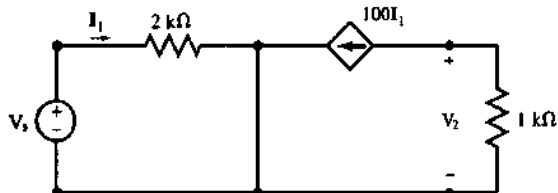
13.20 将题 13.19 的器件  $H$  置于图 13-29(a) 的电路中. 用图 13-28 的模型替代  $H$  并求  $V_2/V_s$ .



(a)



(b)



(c)

图 13-29

解 图 13-29(b) 的电路包含该模型. 我们可以将它简化成图 13-29(c), 且

$$I_1 = V_s / 2000, \quad V_2 = -1000(100I_1) = -1000(100V_s / 2000) = -50V_s.$$

则  $V_2/V_s = -50$  .

- 13.21 一个二端口器件  $N$  的输出端连有负载  $Z_L$  (图 13-30), 端点特性给定为  $V_1 = (1/N)V_2$  和  $I_2 = -NI_1$ . 求 (a)  $N$  的  $T$  参数. (b) 输入阻抗  $Z_{in} = V_1/I_1$ .

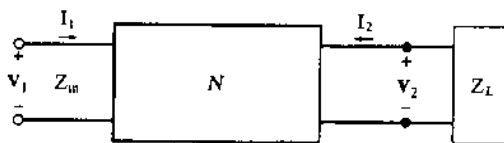


图 13-30

解 (a)  $T$  参数定义为 [见(29)式]

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

器件端点特性是

$$V_1 = (1/N)V_2$$

$$I_1 = -NI_2$$

比较两组方程, 得到  $A = 1/N$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = N$ .

(b) 可以使用与  $V_1$ ,  $I_1$ ,  $V_2$ ,  $I_2$  有关的三个方程. 由器件的端点特性得到两个方程, 第三个方程从连接的负载得出

$$V_2 = -Z_L I_2$$

在三个方程中消去  $V_2$  和  $I_2$ , 得出

$$V_1 = Z_L I_1 / N^2 \quad \text{这样, } Z_{in} = V_1 / I_1 = Z_L / N^2$$

### 补充习题

- 13.22 图 13-22(a)的二端口网络的  $Z$  参数为  $Z_{11} = 4s$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ ,  $Z_{22} = 9s$ . 使用  $N$  的开路阻抗端点特性方程以及在节点 A, B, C 的 KCL 方程, 求  $v_s = \cos 1000t$  (V) 时的输入电流  $i_1$ .  
答案:  $i_1 = 0.2 \cos(1000t - 36.9^\circ)$  (A)
- 13.23 用  $h$ ,  $g$ ,  $T$  参数项表示互易性准则.  
答案:  $h_{12} + h_{21} = 0$ ,  $g_{12} + g_{21} = 0$ ,  $AD - BC = 1$
- 13.24 求一个二端口网络的  $T$  参数. 网络的  $Z$  参数为  $Z_{11} = s$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = 10s$ ,  $Z_{22} = 100s$ .  
答案:  $A = 0.1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 10^{-1}/s$ ,  $D = 10$ .
- 13.25 求一个二端口网络的  $T$  参数. 网络的  $Z$  参数为  $Z_{11} = 10^6 s$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = 10^7 s$ ,  $Z_{22} = 10^8 s$ . 与题 13.21 的结果进行比较.

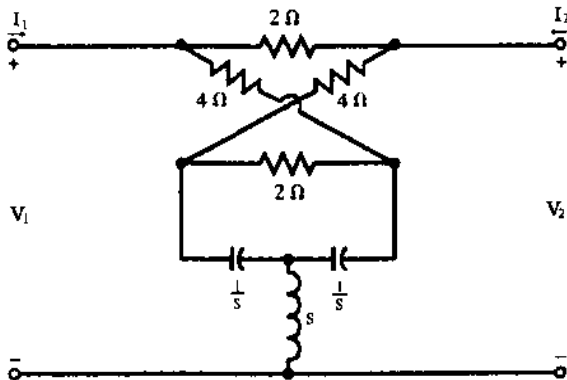


图 13-31

答案:  $A=0.1, B=0, C=10^{-7}/s, D=10$ . 对于高频, 该器件与题 13.21 的器件  $N=10$  是相似的.

- 13.26 一个二端口网络  $N$  的  $Z$  参数是:  $Z_{11}=ks, Z_{12}=Z_{21}=10ks, Z_{22}=100ks$ . 有一个  $1\Omega$  的电阻跨接在输出端口(图 13-30). (a)求输入阻抗  $Z_m=V_1/I_1$  并构成它的等效电路. (b)给出  $k=1$  和  $10^6$  时元件的数值.

答案: (a)  $Z_m = \frac{ks}{1+100ks} = \frac{1}{100+1/ks}$

等效电路是  $RL$  并联电路,  $R=10^{-2}\Omega, L=1kH$ .

(b) 当  $k=1$  时,  $R=0.01\Omega, L=1H$ . 当  $k=10^6$  时,  $R=0.01\Omega, L=10^6H$ .

- 13.27 图 13-30 的器件  $N$  由下面  $Z$  参数表示:  $Z_{22}=N^2Z_{11}, Z_{12}=Z_{21}=\sqrt{Z_{11}Z_{22}}=NZ_{11}$ . 求当负载  $Z_L$  接到输出端口时的  $Z_m=V_1/I_1$ . 说明如果  $Z_{11} \gg Z_L/N^2$  有阻抗标度  $Z_m=Z_L/N^2$ .

答案:  $Z_m = \frac{Z_L}{N^2 + Z_L/Z_{11}}$ . 对于  $Z_L \ll N^2Z_{11}, Z_m = Z_L/N^2$

- 13.28 求图 13-31 电路的  $Z$  参数. 提示: 使用串联规则.

答案:  $Z_{11}=Z_{22}=s+3+1/s, Z_{12}=Z_{21}=s+1$

- 13.29 求图 13-32 所示电路的  $Y$  参数. 提示: 使用并联规则.

答案:  $Y_{11}=Y_{22}=9(s+2)/16, Y_{12}=Y_{21}=-3(s+2)/16$

- 13.30 具有传递参数  $T_a$  和  $T_b$  的两个二端口网络  $a$  和  $b$  以级联方式连接(图 13-14). 给定  $I_{2a} = -I_{1b}$  和  $V_{2a} = V_{1b}$ , 求最终二端口网络的  $T$  参数.

答案:  $A=A_aA_b+B_aC_b, B=A_aB_b+B_aD_b, C=C_aA_b+D_aC_b, D=C_aB_b+D_aD_b$

- 13.31 求图 13-33 网络的  $T$  和  $Z$  参数. 给定了电容的阻抗. 提示: 使用级联规则.

答案:  $A=5j-4, B=4j+2, C=2j-4, D=3j, Z_{11}=1.3-0.6j, Z_{22}=0.3-0.6j, Z_{12}=Z_{21}=-0.2-0.1j$

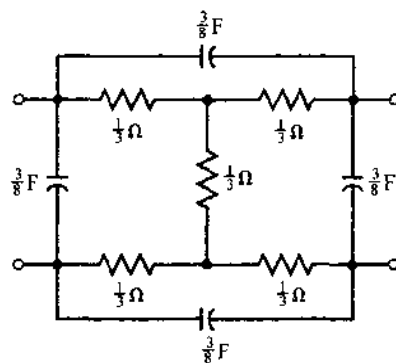


图 13-32

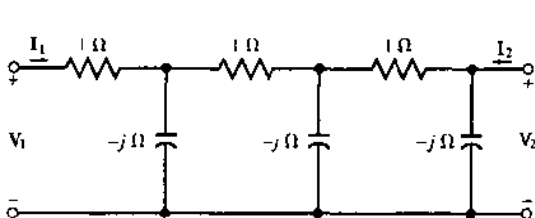


图 13-33

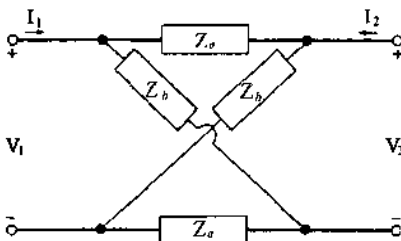


图 13-34

- 13.32 求图 13-34 二端口网络电路的  $Z$  参数.

答案:  $Z_{11}=Z_{22}=\frac{1}{2}(Z_b+Z_a), Z_{12}=Z_{21}=\frac{1}{2}(Z_b-Z_a)$

- 13.33 求图 13-35 二端口电路的  $Z$  参数.

答案:  $Z_{11}=Z_{22}=\frac{1}{2}\frac{Z_b(2Z_a+Z_b)}{Z_a+Z_b}, Z_{12}=Z_{21}=\frac{1}{2}\frac{Z_b^2}{Z_a+Z_b}$

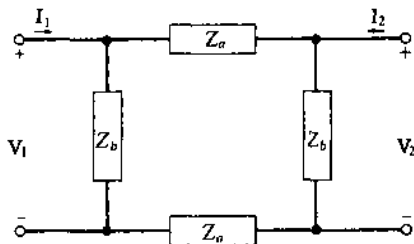


图 13-35

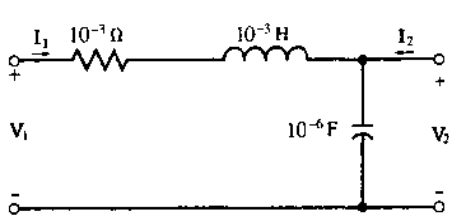


图 13-36

- 13.34 参见图 13-36 的二端口电路, 求其作为  $\omega$  函数的  $T$  参数以及在  $\omega=1, 10^3, 10^6 rad/s$  时的特定值.

答案:  $A = 1 - 10^{-9}\omega^2 + j10^{-9}\omega$ ,  $B = 10^{-3}(1 + j\omega)$ ,  $C = 10^{-6}j\omega$ ,  $D = 1$ . 在  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ,  $A = 1$ ,  $B = 10^{-3}(1 + j)$ ,  $C = 10^{-6}j$ ,  $D = 1$ . 在  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ,  $A \approx 1$ ,  $B \approx j$ ,  $C = 10^{-3}j$ ,  $D = 1$ . 在  $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$ ,  $A \approx -10^3$ ,  $B \approx 10^3j$ ,  $C = j$ ,  $D = 1$ .

- 13.35 一个二端口网络仅包括电阻、电容和电感. 在 #2 端口开路时 [图 13-37(a)], 一个单位阶跃电压  $v_1 = u(t)$  产生  $i_1 = e^{-t}u(t) (\mu\text{A})$  和  $v_2 = (1 - e^{-t})u(t) (\text{V})$ . 在 #2 端口短路时 [图 13-37(b)], 单位阶跃电压  $v_1 = u(t)$  提供一个电流  $i_1 = 0.5(1 + e^{-2t})u(t) (\mu\text{A})$ . 求  $i_2$  和 T 等效网络.

答案:  $i_2 = 0.5(-1 + e^{-2t})u(t)$  [见图 13-37(c)].

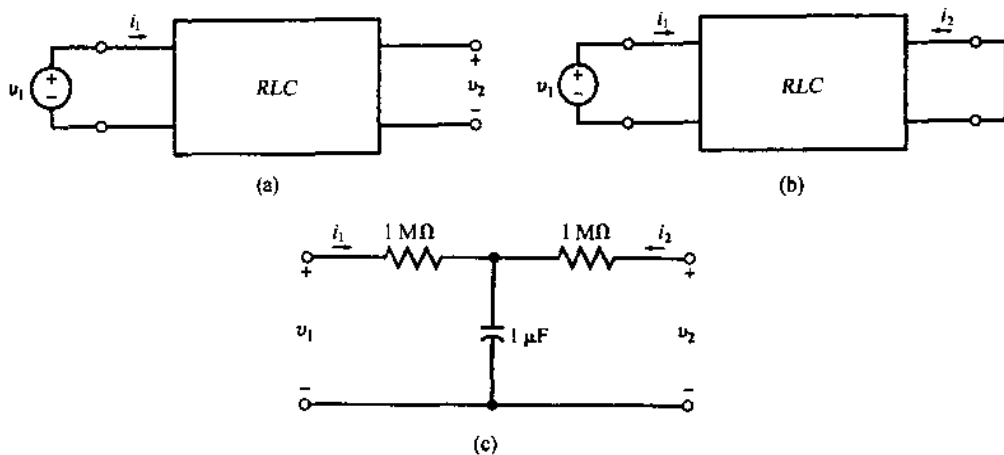


图 13-37

- 13.36 图 13-38 所示的二端口网络  $N$  有  $Z_{11} = 2$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = 1$ ,  $Z_{22} = 4$ . 求  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

答案:  $I_1 = 24 \text{ A}$ ,  $I_2 = 1.5 \text{ A}$ ,  $I_3 = 6.5 \text{ A}$ .

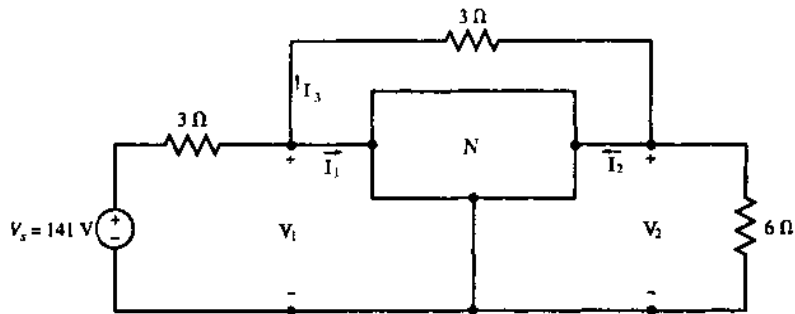


图 13-38



## 第 14 章 互感和变压器

### 14.1 互感

在线圈构成的线性导体中总的磁通量  $\lambda$  与通过它的电流成正比, 即  $\lambda = Li$  (见图 14-1). 由法拉第定律, 导体两端电压等于全部磁通量的时间微分, 即

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

系数  $L$  以 H 为单位, 称为线圈的自感应系数.

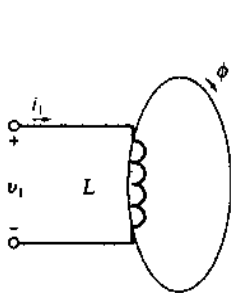


图 14-1

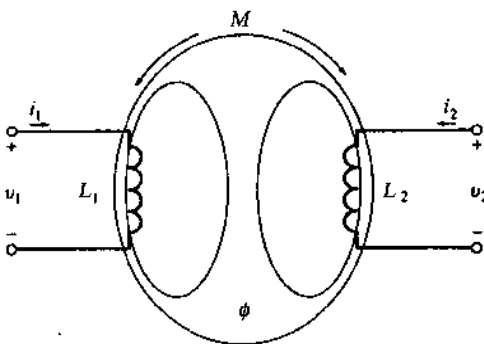


图 14-2

相互紧密靠近的不同电路中的两根导体之间有一定程度的磁耦合. 这种耦合程度取决于物理上的排列和电流的变化率. 当一个线圈缠绕在另一个线圈上时, 这种耦合就会增加. 另外, 如果一个软铁心提供了磁通的通路, 耦合则会为最大值 (然而, 铁心会引起非线性).

为了找出如图 14-2 所示的两个耦合线圈端点上电压和电流的关系, 我们注意到在每一个线圈的所有磁通量都是由电流  $i_1$  和  $i_2$  产生的, 并且两个线圈之间交互的磁链作用是对称的.

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\lambda_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad (1)$$

此处,  $M$  是互感系数 (以 H 为单位).

端点电压是磁通量的时间微分.

$$v_1(t) = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = \frac{d\lambda_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

耦合线圈构成二端口网络的特殊情况已在 13 章讨论过. 端点特性 (2) 也可以用频率域或  $s$  域方式表示如下

频率域

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$s$  域

$$\begin{aligned} V_1 &= L_1 s I_1 + M s I_2 \\ V_2 &= M s I_1 + L_2 s I_2 \end{aligned} \quad (4)$$

耦合系数  $M$  将在 14.2 节讨论. 频率域方程 (3) 应用于正弦稳态电路,  $s$  域方程 (4) 应用于具有复数频率  $s$  的电路.

**例 14.1** 在图 14-2 的耦合线圈中, 给定  $L_1 = 0.1\text{H}$ ,  $L_2 = 0.5\text{H}$ ,  $i_1(t) = i_2(t) = \sin\omega t$ . 在下列条件下求  $v_1(t)$  和  $v_2(t)$ . (a)  $M = 0.01\text{H}$  (b)  $M = 0.2\text{H}$  (c)  $M = -0.2\text{H}$

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t + 0.01\omega \cos \omega t = 0.11\omega \cos \omega t \text{ (V)} \\
 & \quad v_2(t) = 0.01\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.51\omega \cos \omega t \text{ (V)} \\
 & \text{(b)} \quad v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t + 0.2\omega \cos \omega t = 0.3\omega \cos \omega t \text{ (V)} \\
 & \quad v_2(t) = 0.2\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.7\omega \cos \omega t \text{ (V)} \\
 & \text{(c)} \quad v_1(t) = 0.1\omega \cos \omega t - 0.2\omega \cos \omega t = -0.1\omega \cos \omega t \text{ (V)} \\
 & \quad v_2(t) = -0.2\omega \cos \omega t + 0.5\omega \cos \omega t = 0.3\omega \cos \omega t \text{ (V)}
 \end{aligned}$$

## 14.2 耦合系数

具有  $N$  圈, 每圈磁通量为  $\phi$  的线圈, 总的磁通量为  $\lambda = N\phi$ . 根据法拉第定律, 线圈中感应电动势为  $e = d\lambda/dt = N(d\phi/dt)$ . 在这个方程中通常包含负号, 常用来标记根据楞次定律所建立的电压极性. 根据自感定律, 这个电压也可由  $L(di/dt)$  给出. 由此,

$$L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} \quad \text{或} \quad L = N \frac{d\phi}{di} \quad (5a)$$

$\phi$  的单位是韦伯(wb), 1 韦伯 = 1 V·s. 由上式可以得出  $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$ . 在这本书中, 假设  $\phi$  和  $i$  互成比例, 使得

$$L = N \frac{\phi}{i} = \text{常数} \quad (5b)$$

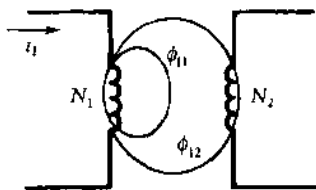


图 14-3

在图 14-3 中, 通过  $N_1$  的电流  $i_1$  产生的磁通  $\phi_1$ , 由漏磁通  $\phi_{11}$  以及耦合或交链磁通  $\phi_{12}$  构成. 在耦合线圈中产生的电动势由  $N_2(d\phi_{12}/dt)$  给出. 相同的电压可以用互感系数  $M$  写出

$$e = M \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad \text{或} \quad M = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \quad (6)$$

另外, 耦合是双边的, 有

$$M = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad (7)$$

将链接磁通对总磁通的比率定义为耦合系数  $k$

$$k \equiv \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

$0 \leq k \leq 1$ , 取(6)式和(7)式的乘积并假设  $k$  仅依赖于系统的形状得出

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \left( N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \right) \left( N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \right) = \left( N_2 \frac{d(k\phi_1)}{di_1} \right) \left( N_1 \frac{d(k\phi_2)}{di_2} \right) \\
 &= k^2 \left( N_1 \frac{d\phi_1}{di_1} \right) \left( N_2 \frac{d\phi_2}{di_2} \right) = k^2 L_1 L_2
 \end{aligned}$$

$$\text{由此可知, } M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{或} \quad X_M = k \sqrt{X_1 X_2} \quad (8)$$

注意, (8)式表明  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ . 它的范围可以从能量角度进行推导得到.

如果全部磁通都链接为线圈而没有任何漏磁通, 则  $k = 1$ . 在另一极端, 线圈的轴线可以调整成不在另一线圈产生电压的磁通, 这样,  $k = 0$ . “紧密耦合”常用来描述大多数磁通都链接线圈的情况, 这经常靠一个磁芯的方法来保持磁通或用线圈的交替缠绕的方式直接跨越另一线圈来实现. 没有铁芯的紧挨着放置的线圈是紧密地耦合但有较低的  $k$  值.

## 14.3 耦合线圈的分析

### 紧密耦合的极性

图 14-4 中画有在一个公共铁芯上的两个线圈, 铁芯中有磁通  $\phi$ . 这是一种紧密耦合的结构, 已在 14.2 节中叙述过. 为了确定互感电压的合适符号, 对每一个线圈使用右手规则: 如果

四个手指按设定的电流方向环绕,大拇指就指向磁通的方向.最终的 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 的正方向示于图中.如果磁通 $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 都增强另一个,则互感电压的符号就与自感电压的符号相同.这样,在(2)和(3)式的四个方程中都写为正号.在图14-4中, $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 互相反向,因而,方程(2)和(3)就写为负号.

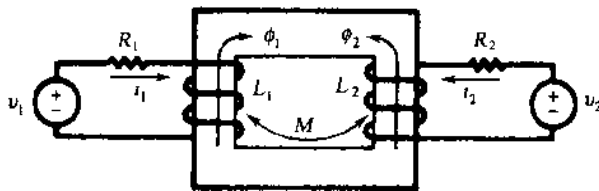


图 14-4

### 自然电流

考虑图14-5所示电路的次级无源回路会进一步理解耦合线圈.电源 $v_1$ 产生电流 $i_1$ ,相应的磁通 $\phi_1$ 如图所示.楞次定律指出,在次级回路中产生的电压极性是:如果电路是完整的,会有一个电流以产生与电流 $i_1$ 所建立的磁通方向相反磁通的方向流过次级线圈.即,当图14-5中的开关闭合,磁通 $\phi_2$ 将有图示的方向.根据右手规则,用大拇指指向 $\phi_2$ 的方向,就产生了自然电流 $i_2$ .产生的电压是次级电路的驱动电压,如图14-6所示.无论电路是否闭合,这个电压都是存在的.当开关闭合后,产生了具有图示正方向的电流 $i_2$ .

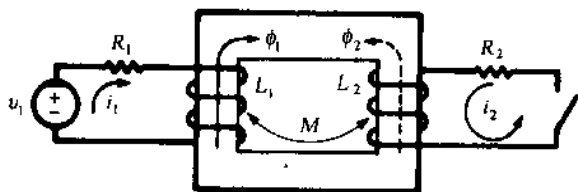


图 14-5

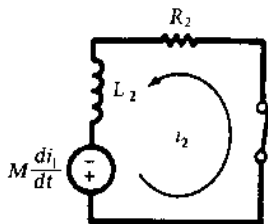


图 14-6

**例 14.2** 设无源回路中的开关在 $i_1=0, t=0$ 的瞬间闭合.对于 $t>0$ ,无源回路的结果为(见图14-6)

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0$$

而主动回路为

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v_1$$

写出s域中具有初始条件 $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ 的上述方程,并消去 $I_1(s)$ ,有

$$H(s) = \frac{\text{响应}}{\text{激励}} = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Ms}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1)s + R_1 R_2}$$

由 $H(s)$ 的极点,可以得到 $i_2$ 的自然频率.

### 14.4 同名端规则

如果互感器为如图14-4和14-5所示电路图的绕法,可以确定互感器电压上的符号.为了简化并得到正确的符号,在线圈瞬时同极性的端点用点作记号.

为了对一对耦合线圈做点记号,选择一个线圈的电流方向,在电流进入绕组的端点画一个点.应用右手规则确定相应的磁通[见图14-7(a)],根据楞次定律,另一个绕组的磁通与第一

组磁通相对,使用右手规则求对应于第二组磁通的自然电流的方向[见图14-7(b)],现在就在第二绕组的自然电流离开绕组的端点处画一个点,这个端点与初级线圈初始电流进入的端点同时为正.由于用点来给出耦合线圈的瞬时极性,则不再需要用带有绕组形式的铁芯的图形表示,耦合线圈可以如图14-7(c)那样说明.现在使用下述同名端规则:

(1) 当假设电流都进入或都离开耦合线圈用点标记的端点时, $M$ 项的符号将与 $L$ 项的符号相同;

(2) 如果一个电流流入带点的端点而另一个电流流出带点的端点, $M$ 项的符号与 $L$ 项的符号相反.

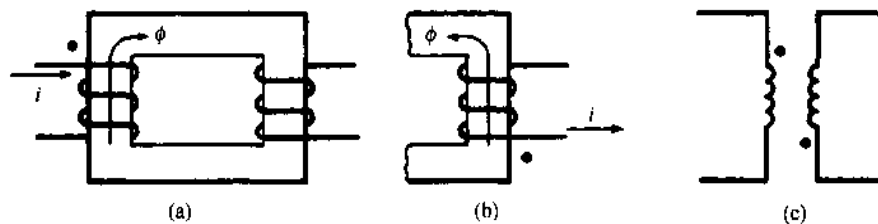


图 14-7

**例 14.3** 图14-8(a)中选择的电流方向是 $M$ 项的符号与 $L$ 项的符号相反,带点的端点表示有相同的瞬时极性.比较图14-8(b)的传导耦合电路.在此电路中,两个网孔电流以相反的方向通过公共元件,极性的标记与磁耦合电路的点标记相同.当我们用阴影形成两个黑匣时,相似之处就变得更加明显.

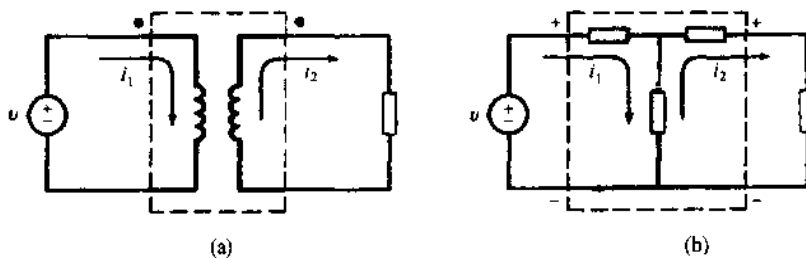


图 14-8

### 14.5 一对耦合线圈中的能量

在有电流 $i$ 的单个电感 $L$ 中储存的能量为: $0.5 Li^2$ J.在一对耦合线圈中,储存的能量为

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (\text{J}) \quad (9)$$

此处, $L_1$ 和 $L_2$ 是两个线圈的电感量, $M$ 是互感系数.(9)式中 $M i_1 i_2$ 项表示由于互感作用而产生的能量.该项的符号是:(a)如果 $i_1$ 和 $i_2$ 都进入有点的端点或无点的端点则为正.(b)如果一个电流进入带点的端点而另一个电流进入无点的端点则为负.

**例 14.4** 在一对线圈中, $L_1 = 0.1 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0.2 \text{ H}$ ,在一确定时刻 $i_1 = 4 \text{ A}$ ,  $i_2 = 10 \text{ A}$ .如果耦合系数 $M$ 是(a) $0.1 \text{ H}$ ; (b) $\sqrt{2}/10 \text{ H}$ ; (c) $-0.1 \text{ H}$ ; (d) $-\sqrt{2}/10 \text{ H}$ ,求线圈中的总能量.

根据(9)式

$$(a) W = (0.5)(0.1)4^2 + (0.5)(0.2)10^2 + (0.1)(10)(4) = 14.8 \text{ J}$$

$$(b) W = 16.46 \text{ J}$$

$$(c) W = 6.8 \text{ J}$$

(d)  $W = 5.14 \text{ J}$

能量的最大值和最小值, 发生在完全正耦合 ( $M = \sqrt{2}/10$ ) 和完全负耦合 ( $M = -\sqrt{2}/10$ ) 时.

#### 14.6 传导耦合等效电路

由磁耦合线圈电路写出网孔电流方程, 可以构造出传导耦合等效电路. 考虑图 14-9(a) 的正弦稳态电路, 用网孔电流表示, 其相应方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在图 14-9(b) 中, 传导性电抗为  $X_M = \omega M$ , 有两个方向相反的网孔电流.

因此, 在  $Z$  矩阵中

$$Z_{12} = Z_{21} = -j\omega M$$

如果一个电感  $L_1 - M$  放在初级回路中, 则这个回路的网孔电流方程将为

$$(R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 = V_1$$

类似, 次级回路中,  $L_2 - M$  会导致相同的网孔电流方程. 这样, 两个电路是等效的. 在传导耦合电路中不需要同名端规则, 可以应用熟悉的电路分析技术.

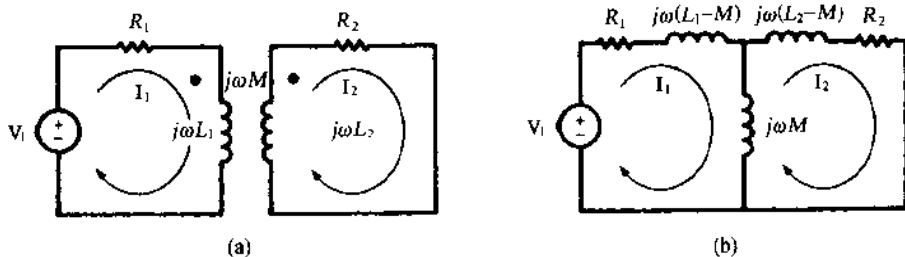


图 14-9

#### 14.7 线性变压器

变压器是在两个或多个的电路之间传导相互耦合的装置. 铁芯变压器是在压成薄片的特殊钢材的导磁芯上绕有耦合线圈, 这样的铁芯限制磁通并使耦合最大化. 空心变压器可以应用在电子和通讯中. 第三种是在一个非金属结构上与另一个线圈缠绕形成线圈, 在中心有一个可移动的导磁材料棒, 使耦合情况可变.

注意此处指的铁芯变压器, 铁芯的磁导率  $\mu$  假定在电压和电流的整个运行范围内是常数. 进一步的讨论仅限于 2 绕组变压器, 但在同一铁芯上有三个或多个的绕组并不少见.

在图 14-10 中有  $N_1$  匝的初级绕组连接到电源电压  $V_1$  上, 有  $N_2$  匝的次级绕组连有负载阻抗  $Z_L$ . 线圈电阻用集中参数  $R_1$  和  $R_2$  表示. 自然电流  $I_2$  产生磁通  $\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$ , 而  $I_1$  产生  $\phi_1 = \phi_{12} + \phi_{11}$ . 使用耦合系数  $k$ , 可知

$$\phi_{11} = (1 - k)\phi_1 \quad \phi_{22} = (1 - k)\phi_2$$

由这些磁通关系, 漏电感与自感的关系为

$$L_{11} \equiv (1 - k)L_1 \quad L_{22} \equiv (1 - k)L_2$$

相应的漏电抗为

$$X_{11} \equiv (1 - k)X_1 \quad X_{22} \equiv (1 - k)X_2$$

一个  $N$  匝线圈的电感  $L$  与  $N^2$  成比例. 因此, 在同一铁芯上的两个线圈有以下关系

$$\frac{L_1}{L_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (10)$$

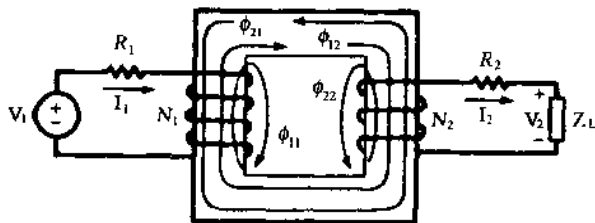


图 14-10

在图 14-10 中两个绕组的公共磁通是互感磁通  $\phi_m = \phi_{12} - \phi_{21}$ . 根据法拉第定律, 这个磁通产生线圈的电动势为

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \quad e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt}$$

定义匝数比为  $a \equiv N_1/N_2$ , 由线性变压器的基本方程得到

$$\frac{e_1}{e_2} = a \quad (11)$$

在频率域中,  $E_1/E_2 = a$ 。

在互感磁通和互感电感之间的关系可以通过对次级产生的电动势的分析进一步扩展, 有

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d(k\phi_2)}{dt}$$

使用(6)和(5a)式, 上式可以重写为

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt} - kL_2 \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} - \frac{M}{a} \frac{di_2}{dt}$$

最后一步包括了(8)和(10)式

$$M = k \sqrt{(a^2 L_2)(L_2)} = kaL_2$$

现在, 根据下述方程来定义磁化电流  $i_\phi$

$$i_1 = \frac{i_2}{a} + i_\phi \quad \text{或} \quad I_1 = \frac{I_2}{a} + I_\phi \quad (12)$$

有

$$e_2 = M \frac{di_\phi}{dt} \quad \text{或} \quad E_2 = jX_M I_\phi \quad (13)$$

根据(13)式, 可以认为磁化电流在铁芯中产生了互感磁通  $\phi_m$ 。

用线圈电动势和漏电抗可以画出线性变压器的等效电路, 其中初级绕组被有效地解耦. 电路示于图 14-11(a)中. 为了比较, 点等效电路示于图 14-11(b)中.

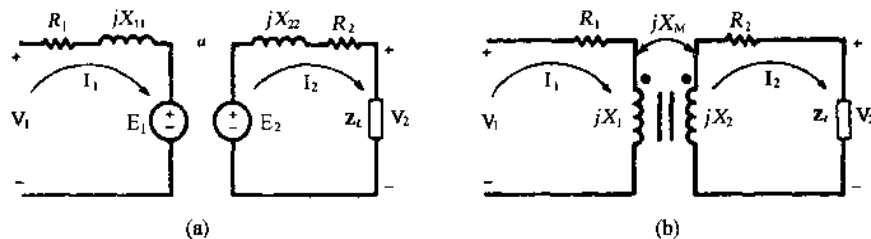


图 14-11

**例 14.5** 画出对应于图 14-11(a)电路的电压—电流相量图, 并由此求出变压器的输入阻抗. 相量图画于图 14-12 中. 其中  $\theta_L$  是指  $Z_L$  的相角. 注意, 根据(13)式, 产生的电动势  $E_1$  和  $E_2$  超前磁化电流  $90^\circ$ . 这个图产生了三个相量方程式:

$$V_1 = ajX_M I_\phi + (R_1 + jX_{11}) I_1$$

$$jX_M I_\phi = (Z_L + R_2 + jX_{22}) I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{a} I_2 + I_\phi$$

在这些方程中, 消去  $I_2$  和  $I_\phi$ , 有

$$\frac{V_1}{I_1} \equiv Z_{in} = (R_1 + jX_{11}) + a^2 \frac{(jX_M/a)(R_2 + jX_{22} + Z_L)}{(jX_M/a) + (R_2 + jX_{22} + Z_L)} \quad (14a)$$

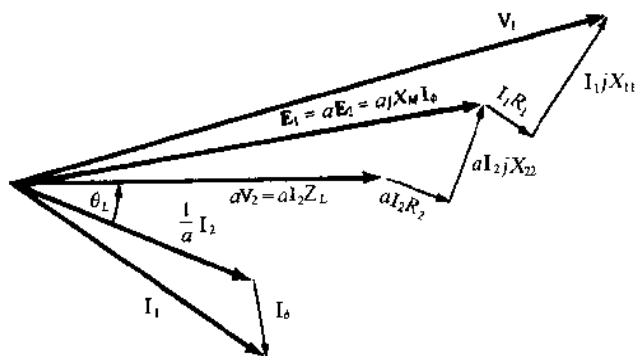


图 14-12

如果用图 14-11(b)的网孔电流方程求  $Z_{in}$ , 结果为

$$Z_{in} = R_1 + jX_1 + \frac{X_M^2}{R_2 + jX_2 + Z_L} \quad (14b)$$

读者可以检验(14a)和(14b)是等效的——见习题 14.36.

#### 14.8 理想变压器

一个理想变压器是假想的变压器——在变压器中没有损耗, 铁芯具有无限的磁导率, 使得完全耦合而没有漏磁通. 在大功率变压器中由于损耗相对于传递的功率来说非常小, 使得由理想变压器得到的关系可以在工程中非常有用.

参考图 14-13, 无损耗情况表达式为

$$\frac{1}{2} V_1 I_1^* = \frac{1}{2} V_2 I_2^*$$

(见 10.7 节), 但是

$$V_1 = E_1 - aE_2 - aV_2$$

$a$  是实数, 得

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = a \quad (15)$$

很容易从(15)式得到输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{aV_2}{I_2/a} = a^2 \frac{V_2}{I_2} = a^2 Z_L \quad (16)$$

**例 14.6** 14.7 节线性变压器的极限情况可以看作是理想变压器. 在(14a)式中设

$$R_1 = R_2 = X_{11} = X_{22} = 0$$

(无损耗)令  $X_M \rightarrow \infty$  (铁芯磁导率无限制), 得出

$$Z_{in} = \lim_{X_M \rightarrow \infty} \left[ a^2 \frac{(jX_M/a)(Z_L)}{(jX_M/a) + Z_L} \right] = a^2 Z_L$$

与(16)式一致.

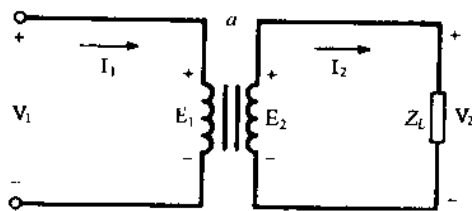


图 14-13

### 安匝同名端规则

由于在(15)式中:  $a = N_1/N_2$ ,

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

即:初级线圈的安匝数等于次级线圈的安匝数.将同名端规则写成公式,这个结果可以扩展到具有更多绕组的变压器.如果电流由同名端进入绕组,安匝为正.如果电流离开同名端,安匝为负.安匝同名端规则描述为变压器的安匝的代数和为零.

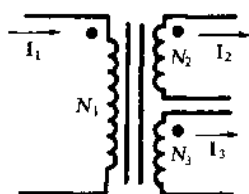


图 14-14

**例 14.7** 图 14-14 所示三绕组变压器匝数为  $N_1 = 20$ ,  $N_2 = N_3 = 10$ .

已知  $I_2 = 10.0 \angle -53.13^\circ \text{ A}$ ,  $I_3 = 10.0 \angle -45^\circ \text{ A}$ . 求  $I_1$ .

根据图中所示的同名端和电流方向,有

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 - N_3 I_3 = 0$$

由此

$$20 I_1 = 10(10.0 \angle -53.13^\circ) + 10(10.0 \angle -45^\circ)$$

$$I_1 = 6.54 - j7.54 = 9.98 \angle -49.06^\circ \text{ A}$$

### 14.9 自耦变压器

自耦变压器是在一个磁芯上有一个连续的绕组,并有一个或更多的抽头.一个电路接到绕组两端,而另一个电路接到绕组的另一个端点和一个抽头上,仅接绕组的一部分.

参考图 14-15(a),其变换率为

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \equiv a + 1$$

这个比率超过了具有同样匝数比的理想二绕组变压器的变换率.通过匝数为  $N_1$  的上半部或串联部分绕组的电流  $I_1$  产生磁通  $\phi_1$ .根据楞次定律,在绕组下半部分自然电流产生方向相反的磁通  $\phi_2$ .因此,电流  $I_n$  从抽头离开下半部绕组.绕组的同名端示于图 14-15(b).在理想自耦变压器中,像在一个理想变压器中一样,输入和输出的复功率必须相等.

$$\frac{1}{2} V_1 I_1^* = \frac{1}{2} V_1 I_{ab}^* = \frac{1}{2} V_2 I_L^*$$

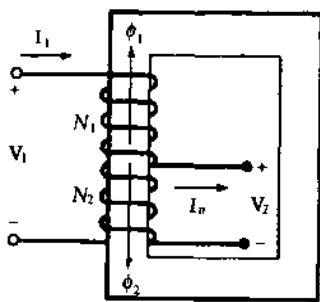
因此

$$\frac{I_L}{I_{ab}} = a + 1$$

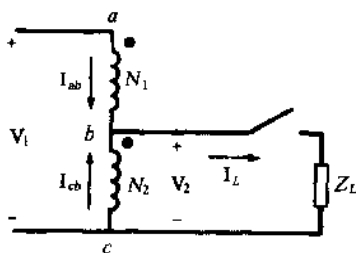
即,电流间也是传输比的关系.

由于  $I_L = I_{ab} + I_{cb}$ ,所以输出复功率由两部分组成

$$\frac{1}{2} V_2 I_L^* = \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* + \frac{1}{2} V_2 I_{cb}^* = \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* + a \left( \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* \right)$$



(a)



(b)

图 14-15



右边第一项是传导的结果,第二项是感应的结果.这样,在自耦变压器中,电源和负载之间既存在传导又存在磁耦合.

### 14.10 反射阻抗

如图 14-16 所示,若一个负载  $Z_2$  连接到变压器的次级端口,则会对它的输入阻抗造成影响,这种影响称为反射阻抗.使用耦合线圈的端点特性并对次级回路应用 KVL 方程,有

$$\begin{aligned} V_1 &= L_1 s I_1 + M s I_2 \\ 0 &= M s I_1 + L_2 s I_2 + Z_2 I_2 \end{aligned}$$

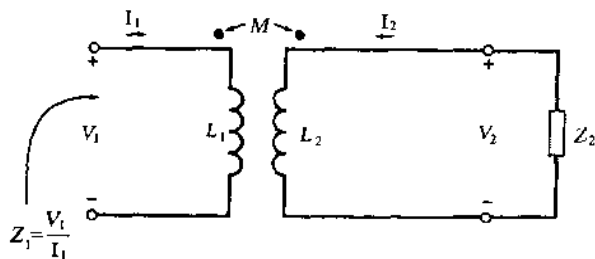


图 14-16

消去  $I_2$ , 得到

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = L_1 s - \frac{M^2 s^2}{Z_2 + L_2 s} \quad (17)$$

对于交流稳态电路  $s = j\omega$ , 有

$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} \quad (18)$$

反射阻抗是

$$Z_{ref} = \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} \quad (19)$$

从电源端看去,将  $M^2 \omega^2 / (Z_2 + j\omega L_2)$  看作负载  $Z_2$ . 这种技术常用于将一个阻抗变接为另一个确定值.例如,对电源进行负载匹配.

**例 14.8** 在图 14-17 电路中,给定  $L_1 = 0.2 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0.1 \text{ H}$ ,  $M = 0.1 \text{ H}$  及  $R = 10 \Omega$ . 求  $v_1 = 142.3 \sin 100t$  时的  $i_1$ .

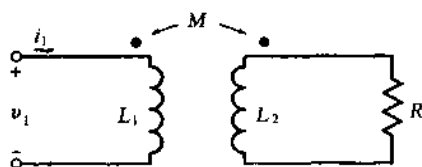


图 14-17

输入阻抗  $Z_1$  在  $\omega = 100$  时为 [见(18)式]

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} = j20 + \frac{0.01(10000)}{10 + j10} = 5 + j15 = 5\sqrt{10} \angle 71.6^\circ$$

那么

$$I_1 = V_1 / Z_1 = 9 \angle (-71.6^\circ) \text{ A}$$

或

$$i_1 = 9 \sin(100t - 71.6^\circ) \text{ (A)}$$

**例 14.9** 参考例 14.8, 令  $v_1 = u(t)$ , 求强迫响应  $i_{1,f}$ .

输入阻抗为 [见(17)式]

$$Z_1(s) = L_1 s - \frac{M^2 s^2}{R + L_2 s}$$

将所给元件值代入, 得到

$$Z_1(s) = \frac{s(s+200)}{10(s+100)} \quad \text{或} \quad Y_1(s) = \frac{10(s+100)}{s(s+200)}$$

对于  $t > 0$ , 输入  $v_1 = 1 \text{ V}$  是指数型  $e^s$  在  $s=0$  的值, 是  $Y_1(s)$  的一个极点. 因此,  $i_{1,f} = kt$ , 而  $k = 1/L_1 = 5$ . 这个结果可以通过对图 14-17 的电路进行直流分析得到.

### 习题及解答

- 14.1 一个磁耦合对的线圈电流为  $5.0 \text{ A}$ , 产生的磁通  $\phi_{11}$  和  $\phi_{12}$  分别是  $0.2 \text{ mWb}$  和  $0.4 \text{ mWb}$ . 如果线圈匝数是  $N_1 = 500$ ,  $N_2 = 1500$ , 求  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$  以及耦合系数  $k$ .

解 解

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = 0.6 \text{ mWb} \quad L_1 = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{500(0.6)}{5.0} = 60 \text{ mH}$$

$$M = \frac{N_2 \phi_{12}}{I_1} = \frac{1500(0.4)}{5.0} = 120 \text{ mH} \quad k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = 0.667$$

由  $M = k \sqrt{L_1 L_2}$  得  $L_2 = 540 \text{ mH}$ .

- 14.2 两个耦合线圈中, 自感系数  $L_1 = 50 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 200 \text{ mH}$ , 耦合系数  $k = 0.50$ . 如果线圈 2 有 1000 匝,  $i_1 = 5.0 \sin 400t \text{ (A)}$ , 求线圈 2 的电压和磁通  $\phi_1$ .

解 解

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0.50 \sqrt{(50)(200)} = 50 \text{ mH}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} = 0.05 \frac{d}{dt}(5.0 \sin 400t) = 100 \cos 400t \text{ (V)}$$

假设为线性磁路

$$M = \frac{N_2 \phi_{12}}{i_1} = \frac{N_2 (k \phi_1)}{i_1}$$

$$\phi_1 = \left( \frac{M}{N_2 k} \right) i_1 = 5.0 \times 10^{-4} \sin 400t \text{ (wb)}$$

- 14.3 对图 14-18 串联电路使用 KVL.

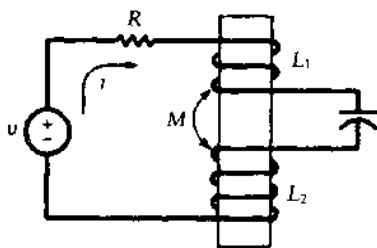


图 14-18

解 解 绕组方式检查说明  $M$  项的符号和  $L$  项的符号相

反.

$$Ri + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = v$$

或

$$Ri + L' \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = v$$

此处,  $L' \equiv L_1 + L_2 - 2M$ . 因为

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \leq \frac{L_1 + L_2}{2}$$

所以,  $L'$  是非负的.

- 14.4 在同向串联中, 两个耦合线圈有等效电感  $L_A$ , 在反向串联中有等效电感  $L_B$ . 求  $L_A$  和  $L_B$  项中  $M$  的表达式.

解 解 如同题 14.3,

$$L_1 + L_2 + 2M = L_A \quad L_1 + L_2 - 2M = L_B$$

由此得到

$$M = \frac{1}{4}(L_A - L_B)$$

这道题提出可以通过实验确定  $M$  的方法.

- 14.5 (a) 写出图 14-19 所示电流  $i_1$  和  $i_2$  的耦合线圈的网孔电流方程. (b) 对于虚线箭头所示的  $i_2$  情况, 写出网孔电流方程.

解 解 (a) 根据绕组情况和选择的方向得出  $M$  项的符号如下

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = v$$

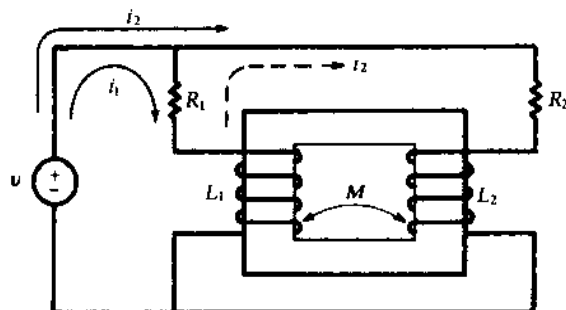


图 14-19

(b)

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + L_1 \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

14.6 求图 14-20 所示耦合电路的同名端等效电路,并用它求  $10\Omega$  容抗的电容器两端的电压  $V$ .

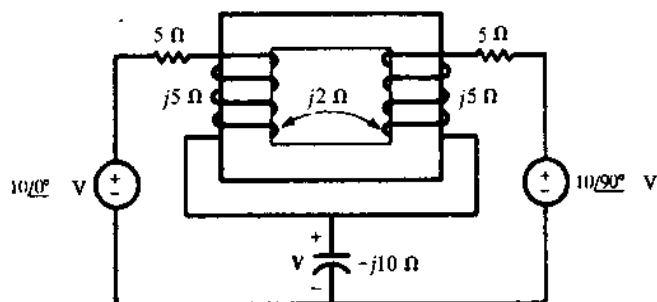


图 14-20

**解** 在电路中设置同名端点,仅考虑线圈及它们的绕组方式.驱动电流进入左边线圈的上部,并在这个端点放置一点,相应的磁通方向向上.根据楞次定律,右方线圈的磁通必定是向上的方向并与第一个磁通相对.自然电流由上面端点离开绕组,该端点也以点做记号,见图 14-21.为了完成同名端等效电路,用选定电流  $I_1$  和  $I_2$  进行  $V$  的计算.

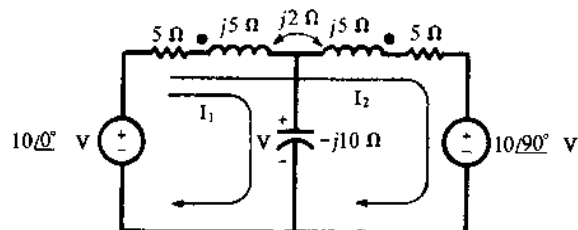


图 14-21

$$\begin{bmatrix} 5-j5 & 5+j3 \\ 5+j3 & 10+j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 10-j10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5+j3 \\ 10-j10 & 10+j6 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 1.015\angle 113.96^\circ \text{ A}$$

及  $V = I_1(-j10) = 10.15\angle 23.96^\circ \text{ V}$

14.7 求图 14-22 所示电路的同名端等效电路并用等效电路求等效感抗。

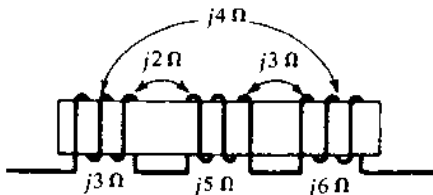


图 14-22

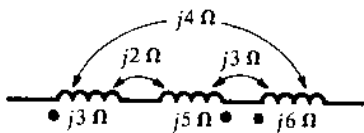


图 14-23

**解** 驱动电流进入第一个线圈并在流入端画上一个点。在其他绕组中,自然电流产生的磁通与驱动电流产生的磁通反向。在自然电流离开绕组一端画上点标记。(若在确定点的位置时忽略串联可以消除某些混乱)。结果示于图 14-23 中。

$$Z = j3 + j5 + j6 - 2(j2) + 2(j4) - 2(j3) = j12 \Omega$$

即:有  $12 \Omega$  的感抗。

14.8 (a) 计算图 14-24 所示耦合电路的电压  $V$ 。(b) 用将其中一个线圈极性反转的方法再次计算  $V$ 。

**解** (a)  $X_M = (0.8)\sqrt{5(10)} = 5.66 \Omega$ , 所以  $Z$  矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3+j1 & -3-j1.66 \\ -3-j1.66 & 8+j6 \end{bmatrix}$$

则

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3-j1.66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 8.62\angle -24.79^\circ \text{ A}$$

并且  $V = I_2(5) = 43.1\angle -24.79^\circ \text{ V}$

$$(b) [Z] = \begin{bmatrix} 3+j1 & -3+j9.66 \\ -3+j9.66 & 8+j6 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3+j9.66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 3.82\angle -112.12^\circ \text{ A}$$

及  $V = I_2(5) = 19.1\angle -112.12^\circ \text{ V}$

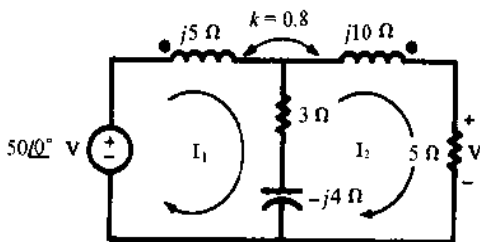


图 14-24

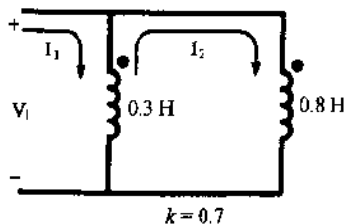


图 14-25

14.9 求图 14-25 所示耦合线圈的并联等效电感。

**解** 如图所示,选择电流  $I_1$  和  $I_2$ , 则  $Z_{in} = V_1/I_1$ 。

$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega 0.3 & j\omega 0.043 \\ j\omega 0.043 & j\omega 0.414 \end{bmatrix}$$

及

$$Z_{in} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{(j\omega 0.3)(j\omega 0.414) - (j\omega 0.043)^2}{j\omega 0.414} = j\omega 0.296$$

或  $L_{eq}$  是  $0.296 \text{ H}$ 。

14.10 对图 14-26 所示的耦合电路,说明只要次级回路是无源的,就不需要同名端符号。

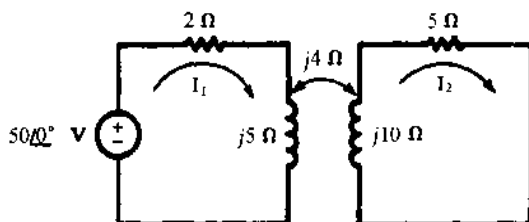


图 14-26

解 如图选择电流  $I_1$  和  $I_2$ 。

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & \pm j4 \\ 0 & 5 + j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5 + j10 \end{vmatrix}} = \frac{250 + j500}{-24 + j45} = 10.96 \angle -54.64^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 3.92 \angle (-118.07^\circ \mp 90^\circ) \text{ A}$$

$M$  上的符号不影响  $\Delta_Z$  的值。由于对  $I_1$  分子行列式不包括耦合阻抗,  $I_1$  也不受影响。 $I_2$  表达式表明耦合极性的变化引起  $180^\circ$  的相位移。在次级回路中没有其它相量电压,这个相位的变化没有影响。

14.11 对于图 14-27 所示耦合电路,求使电流  $I_1$  为零的  $V_2/V_1$  之比。

解 如图

$$I_1 = 0 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & j2 \\ V_2 & 2 + j2 \end{vmatrix}}{\Delta_Z}$$

由  $V_1(2 + j2) - V_2(j2) = 0$  可推出  $V_2/V_1 = 1 - j1$

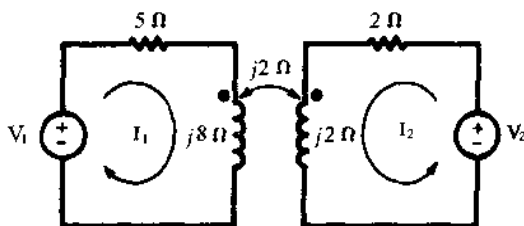


图 14-27

14.12 在图 14-28 所示的电路中,求  $5\Omega$  电抗两端的电压并标明极性。

解 选择网孔电流如图 14-28 所示。

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 \angle 45^\circ & j8 \\ 0 & -j3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j15 & j8 \\ j8 & -j3 \end{vmatrix}} = \frac{150 \angle -45^\circ}{109 - j9} = 1.37 \angle -40.28^\circ \text{ A}$$

类似可以求出,  $I_2 = 3.66 \angle -40.28^\circ \text{ A}$ .

$j5$  两端的电压传导部分来自  $I_1$  和  $I_2$ , 互感部分来自  $4\Omega$  电抗上的电流  $I_1$ .

$$V = (I_1 + I_2)(j5) + I_1(j3) = 29.27 \angle 49.72^\circ \text{ V}$$

当然, 在电容两端也一定存在同一电压:

$$V = -I_2(-j8) = 29.27 \angle 49.72^\circ \text{ V}$$

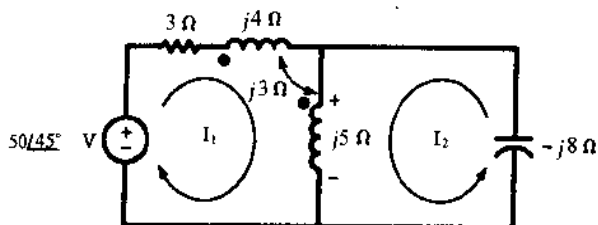


图 14-28

14.13 求图 14-29 所示耦合电路在  $ab$  端的戴维南和诺顿等效电路.

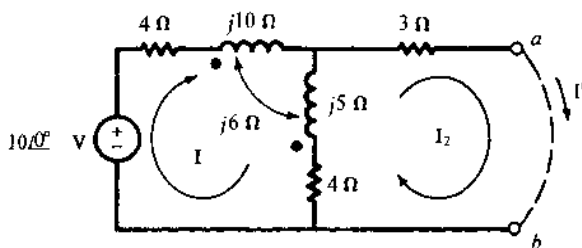


图 14-29

**解** 在开路时, 电压源驱动一个顺时针回路电流  $I$ .

$$I = \frac{10 \angle 0^\circ}{8 + j3} = 1.17 \angle -20.56^\circ \text{ A}$$

$$\text{则 } V' = I(j5 + 4) - I(j6) = 4.82 \angle -34.60^\circ \text{ V}$$

为求得短路电流  $I'$ , 假设有两个顺时针网孔电流, 且  $I_2 = I'$ .

$$I' = \frac{\begin{vmatrix} 8 + j3 & 10 \\ -4 + j1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j3 & -4 + j1 \\ -4 + j1 & 7 + j5 \end{vmatrix}} = 0.559 \angle -83.39^\circ \text{ A}$$

及

$$Z' = \frac{V'}{I'} = \frac{4.82 \angle -34.60^\circ}{0.559 \angle -83.39^\circ} = 8.62 \angle 48.79^\circ \Omega$$

等效电路画于图 14-30 中.

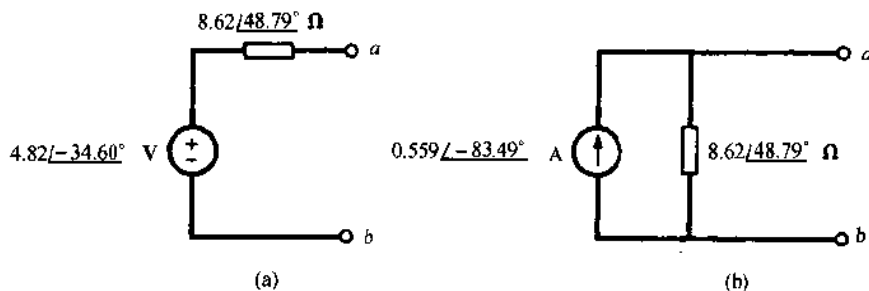


图 14-30

14.14 求图 14-31 所示磁耦合电路的传导耦合等效电路.

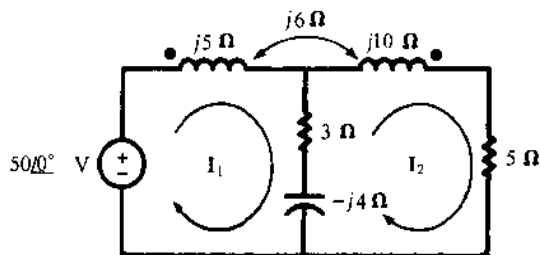


图 14-31

**解** 选择网孔电流  $I_1$  和  $I_2$  如图 14-31 所示, 以矩阵形式写出 KVL 方程:

$$\begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 - j2 \\ -3 - j2 & 8 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

选择图 14-32 中的阻抗为同一个  $Z$  矩阵形式. 由于  $I_1$  和  $I_2$  以相反的方向通过共同的阻抗  $Z_b$ , 所以  $Z_{12}$  在矩阵中为  $-Z_b$ . 则  $Z_b = 3 + j2\Omega$ . 由于  $Z_{11}$  是  $I_1$  通过的所有阻抗, 所以:

$$3 + j1 = Z_a + (3 + j2)$$

由此,  $Z_a = -j1\Omega$ . 类似有

$$Z_{22} = 8 + j6 = Z_b + Z_c$$

且  $Z_c = 5 + j4\Omega$ .

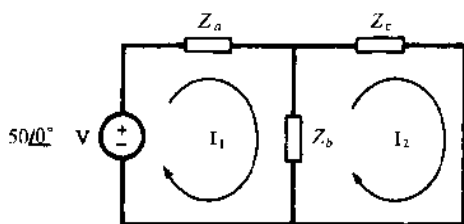


图 14-32

- 14.15** 对于图 14-11(b)所示的变压器电路,  $k = 0.96$ ,  $R_1 = 1.2\Omega$ ,  $R_2 = 0.3\Omega$ ,  $X_1 = 20\Omega$ ,  $X_2 = 5\Omega$ ,  $Z_L = 5.0\angle 36.87^\circ\Omega$  和  $V_2 = 100\angle 0^\circ\text{V}$ . 求线圈的电动势  $E_1$  和  $E_2$  以及磁化电流  $I_\phi$ .

**解**

$$X_{11} = (1 - k)X_1 = (1 - 0.96)(20) = 0.8\Omega \quad X_{22} = (1 - k)X_2 = 0.2\Omega$$

$$a = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} = 2 \quad X_M = k \sqrt{X_1 X_2} = 9.6\Omega$$

这样, 可以构造出如图 14-11(a)所式的电路, 由负载的电压—电流相量关系, 可以通过  $E_2$  求得  $E_1$ .

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_L} = \frac{100\angle 0^\circ}{5.0\angle 36.87^\circ} = 20\angle -36.87^\circ\text{A}$$

$$E_2 = I_2(R_2 + jX_{22}) + V_2 = (20\angle -36.87^\circ)(0.3 + j0.2) + 100\angle 0^\circ = 107.2 - j0.4\text{V}$$

$$E_1 = a E_2 = 214.4 - j0.8\text{V}$$

$$I_\phi = \frac{E_2}{jX_M} = -0.042 - j11.17\text{A}$$

- 14.16** 对于题 14.15 的线性变压器, 计算  $V_1$  端的输入阻抗.

**解** 方法 1

完善题 14.15 的结构, 可以得出

$$I_1 = I_\phi + \frac{1}{a} I_2 = (-0.042 - j11.17) + 10\angle -36.87^\circ = 18.93\angle -65.13^\circ\text{A}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1(R_1 + jX_{11}) + E_1 = (18.93\angle -65.13^\circ)(1.2 + j0.8) + (214.4 - j0.8) \\ &= 238.2\angle -3.62^\circ\text{V} \end{aligned}$$

因此

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{238.2\angle -3.62^\circ}{18.93\angle -65.13^\circ} = 12.58\angle 61.51^\circ\Omega$$

## 方法 2

根据例 14.5 的(14a)式, 可以得出

$$\begin{aligned} Z_m &= (1.2 + j0.8) + 2^2 \frac{(j4.8)(0.3 + j0.2 + 5.0 \angle 36.87^\circ)}{0.3 + j5.0 + 5.0 \angle 36.87^\circ} \\ &= \frac{114.3 \angle 123.25^\circ}{9.082 \angle 61.75^\circ} = 12.58 \angle 61.50^\circ \Omega \end{aligned}$$

## 方法 3

根据例 14.5 的(14b)式, 可以得出

$$\begin{aligned} Z_m &= (1.2 + j20) + \frac{(9.6)^2}{0.3 + j5 + 5.0 \angle 36.87^\circ} \\ &= (1.2 + j20) + (4.80 - j8.94) = 12.58 \angle 61.53^\circ \Omega \end{aligned}$$

- 14.17 在图 14-33 中, 三个相同的变压器, 初级 Y 型连接, 次级  $\Delta$  型连接. 在单负载阻抗上电流  $I_L = 30 \angle 0^\circ \text{ A}$ . 给定

$$I_{b2} = 20 \angle 0^\circ \text{ A} \quad I_{a2} = I_{c2} = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

及  $N_1 = 10N_2 = 100$ , 求初级电流  $I_{a1}$ ,  $I_{b1}$ ,  $I_{c1}$ .

解 将安匝同名端规则应用于每个变压器, 则有

$$N_1 I_{a1} + N_2 I_{a2} = 0 \quad \text{或} \quad I_{a1} = -\frac{10}{100}(10 \angle 0^\circ) = -1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$N_1 I_{b1} - N_2 I_{b2} = 0 \quad \text{或} \quad I_{b1} = \frac{10}{100}(20 \angle 0^\circ) = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$N_1 I_{c1} + N_2 I_{c2} = 0 \quad \text{或} \quad I_{c1} = -\frac{10}{100}(10 \angle 0^\circ) = -1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

使用初级电流和进行检验

$$I_{a1} + I_{b1} + I_{c1} = 0$$

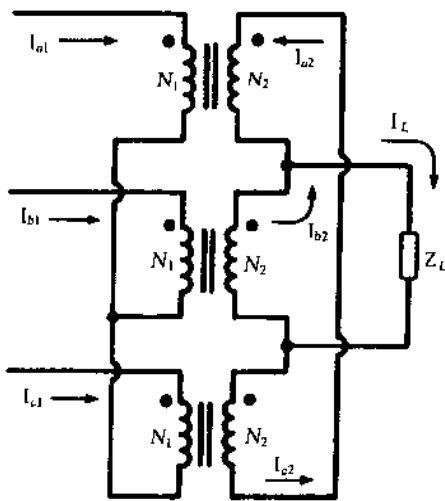


图 14-33

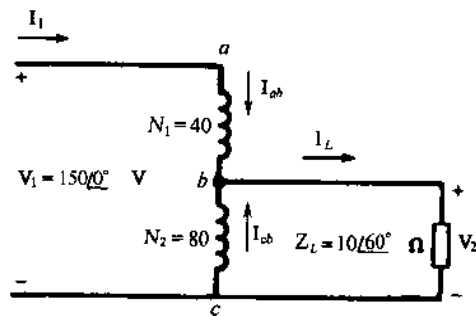


图 14-34

- 14.18 图 14-34 所示理想自耦变压器, 求  $V_2$ ,  $I_{ab}$  和输入电流  $I_1$ .

解

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{V_1}{a+1} = 100 \angle 0^\circ \text{ V} \quad I_L = \frac{V_2}{Z_L} = 10 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_{cb} = I_L - I_{ab} = 3.33 \angle -60^\circ \text{ A} \quad I_{ab} = \frac{I_L}{a+1} = 6.67 \angle -60^\circ \text{ A}$$



14.19 在题 14.18 中, 求由变压器作用和由传导提供的负载的视在功率.

解 在

$$S_{\text{cond}} = \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* = \frac{1}{2} (100 \angle 0^\circ) (6.67 \angle 60^\circ) = 333 \angle 60^\circ \text{ VA}$$

$$S_{\text{trans}} = a S_{\text{cond}} = 167 \angle 60^\circ \text{ VA}$$

14.20 在图 14-35 的耦合电路中, 求输入导纳  $Y_1 = I_1/V_1$ , 并确定在  $v_1 = 2\sqrt{2}\cos t$  时的  $i_1(t)$ .

解 在  $s$  域中围绕回路 1 和 2 应用 KVL 方程.

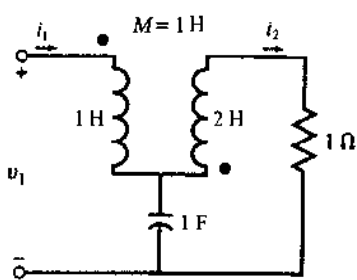


图 14-35

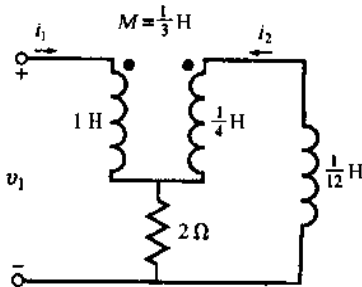


图 14-36

$$V_1 = sI_1 + sI_2 + \frac{I_1 - I_2}{s}$$

$$0 = sI_1 + (2s + 1)I_2 + \frac{I_2 - I_1}{s}$$

在方程中消去  $I_2$  得

$$Y_1 = \frac{I_1}{V_1} = \frac{2s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + 5s + 1}$$

由于  $s = j$ , 输入导纳为  $Y_1 = (1 + j)/4 = \sqrt{2}/4 \angle 45^\circ$ . 因此,  $i_1(t) = \cos(t + 45^\circ)$ .

14.21 求图 14-36 耦合电路的输入阻抗  $Z_1 = V_1/I_1$ .

解 在  $s$  域中围绕回路 1 和 2 应用 KVL 方程.

$$\begin{cases} V_1 = sI_1 + \frac{1}{3}sI_2 + 2(I_1 + I_2) \\ 0 = \frac{1}{3}sI_1 + \frac{1}{4}sI_2 + 2(I_1 + I_2) + \frac{1}{12}sI_2 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} V_1 = (2 + s)I_1 + \left(2 + \frac{1}{3}s\right)I_2 \\ 0 = \left(2 + \frac{1}{3}s\right)I_1 + \left(2 + \frac{1}{3}s\right)I_2 \end{cases}$$

结果为

$$I_2 = -I_1 \quad \text{及} \quad Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{2}{3}s$$

通过电阻的电流是  $I_1 + I_2 = 0$ , 电阻对阻抗  $Z_1$  不起作用, 输入阻抗是纯感性的.

### 补充习题

14.22 两个耦合线圈,  $L_1 = 0.8 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0.2 \text{ H}$ , 耦合系数  $k = 0.90$ . 求耦合电感  $M$  和匝数比  $N_1/N_2$ .

答案:  $0.36 \text{ H}$ ,  $2$ .

14.23 两个耦合线圈,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 800$ , 耦合系数  $k = 0.85$ . 在线圈 1 开路时线圈 2 有电流  $5.0 \text{ A}$ , 磁通  $\phi_2 = 0.35 \text{ mWb}$ . 求  $L_1$ ,  $L_2$  和  $M$ .

答案:  $0.875 \text{ mH}$ ,  $56 \text{ mH}$ ,  $5.95 \text{ mH}$ .

14.24 两个相同的耦合线圈以相加方式串联时有等效电感  $80 \text{ mH}$ , 以相反方式串联时有等效电感  $35 \text{ mH}$ . 求

$L_1, L_2, M$  和  $k$ .

答案: 28.8mH, 28.8mH, 11.25mH, 0.392.

- 14.25 两个耦合线圈,  $L_1 = 20 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 10 \text{ mH}$ ,  $k = 0.50$ , 有四种不同的连接方式: 串联相加, 串联相对, 以及两种并联方式. 求四种连接方式的等效电感.

答案: 44.1 mH, 15.9 mH, 9.47 mH, 3.39 mH.

- 14.26 写出图 14-37 所示耦合电路的网孔电流方程. 求它的同名端等效电路并写出方程式.

答案:  $(R_1 + R_3)i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_3 i_2 + M \frac{di_2}{dt} = v$   
 $(R_2 + R_3)i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_1 + M \frac{di_1}{dt} = v$

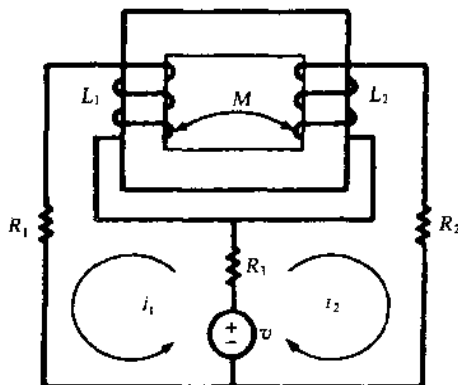


图 14-37

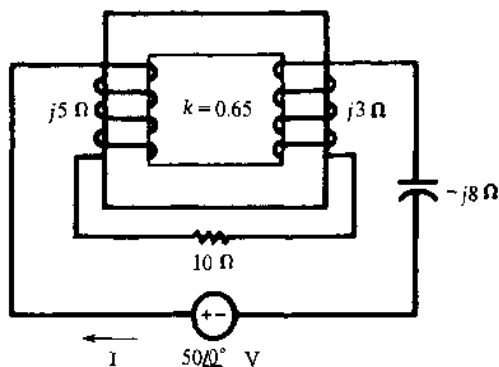


图 14-38

- 14.27 写出图 14-38 所示单回路耦合电路的相量方程.

答案:  $(j5 + j3 - j5.03 - j8 + 10)I = 50 \angle 0^\circ$

- 14.28 求图 14-38 耦合电路的同名端等效电路.

答案: 见图 14-39.

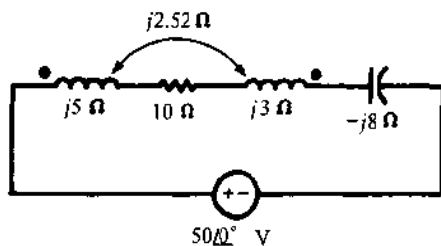


图 14-39

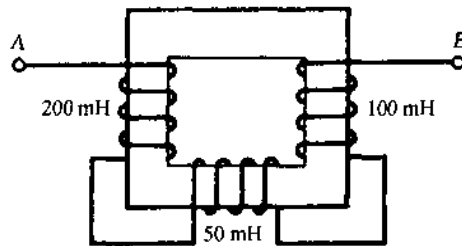


图 14-40

- 14.29 图 14-40 所示三个耦合线圈的耦合系数为 0.50. 求 AB 端点间的等效电感.

答案:  $2.39\text{mH}$ .

- 14.30 求图 14-40 所示耦合线圈的两种形式的同名端等效电路.

答案: 见图 14-41.

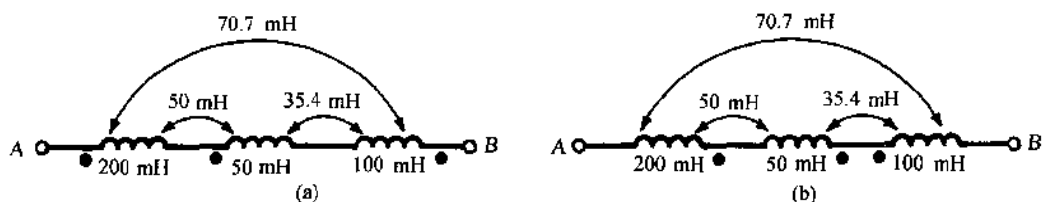


图 14-41

- 14.31 (a) 求图 14-42 所示耦合电路的  $AB$  端点间的等效阻抗.

(b) 将一个线圈的绕组形式反转, 求  $AB$  端点间的等效阻抗.

答案: (a)  $3.40 \angle 41.66^\circ \Omega$ ; (b)  $2.54 \angle 5.37^\circ \Omega$ .

- 14.32 在图 14-43 所示耦合电路中, 求当  $I_1 = 0$  时的  $V_2$  值. 在这种情况下,  $8\Omega$  感抗上的电压是多少?

答案:  $141.4 \angle -45^\circ \text{ V}$ ,  $100 \angle 0^\circ \text{ V}$  (+ 极在同名端).

- 14.33 求图 14-44 耦合电路的互感阻抗  $X_M$ ? 假定  $5\Omega$  电阻上的平均功率为  $45.24\text{W}$ .

答案:  $4\Omega$ .

- 14.34 对于图 14-45 所示耦合电路, 求电源  $V_1$  和  $V_2$  引起的电流  $I_2$  的分量.

答案:  $0.77 \angle 112.6^\circ \text{ A}$ ,  $1.72 \angle 86.05^\circ \text{ A}$

- 14.35 在图 14-46 所示的电路中, 如果  $10\Omega$  电阻上的功率是  $32\text{W}$ , 确定耦合系数  $k$ .

答案:  $0.791$

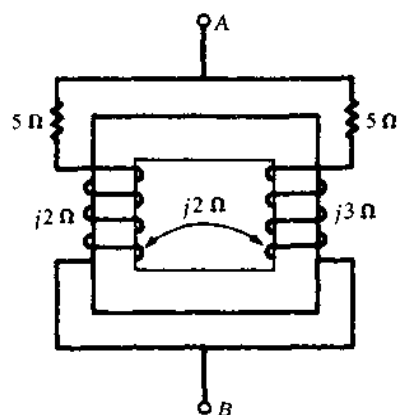


图 14-42

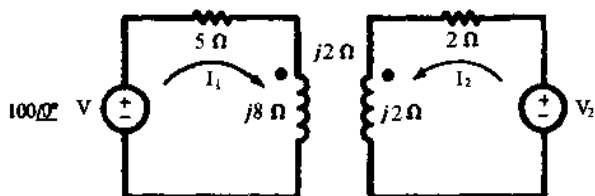


图 14-43

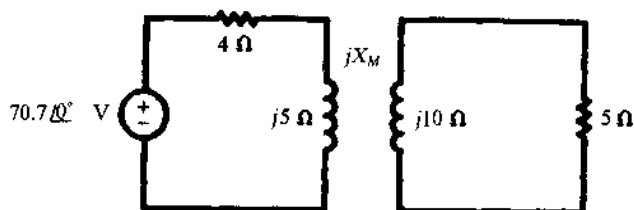


图 14-44

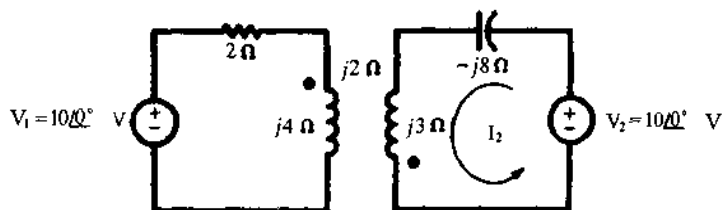


图 14-45

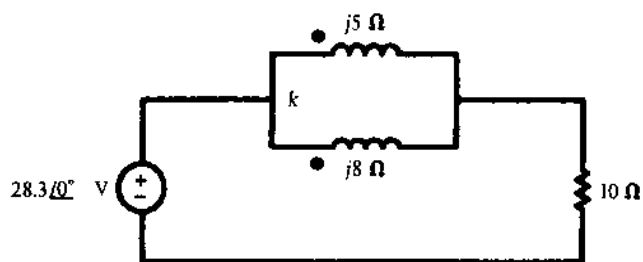


图 14-46

14.36 证明在(14a)式中,用  $X_1$ ,  $X_2$  和  $k$  的表达式代替  $a$ ,  $X_{11}$ ,  $X_{22}$  和  $X_M$ , 可以得出(14b)式.

14.37 对于图 14-47 所示电路,求  $ab$  端点的输入阻抗.

答案:  $3 + j36.3 \Omega$

14.38 求图 14-48 所示耦合电路中  $ab$  端点的输入阻抗.

答案:  $1 + j1.5 \Omega$

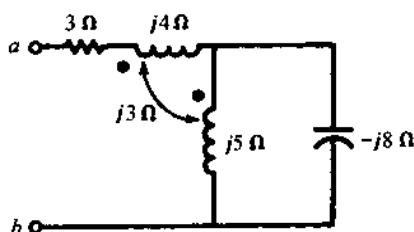


图 14-47

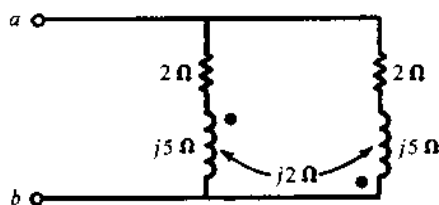


图 14-48

14.39 求图 14-49 所示耦合电路中  $ab$  端点的输入阻抗.

答案:  $6.22 + j4.65 \Omega$

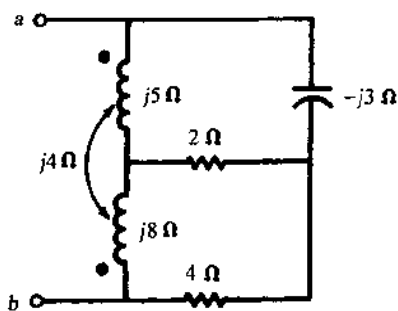


图 14-49

14.40 求图 14-50 所示耦合电路的  $ab$  端点的戴维南和诺顿等效电路.

答案:  $V' = 7.07 \angle 45^\circ \text{ V}$ ,  $I' = 1.04 \angle -27.9^\circ \text{ A}$ ,  $Z' = 6.80 \angle 72.9^\circ \Omega$

14.41 求图 14-51 所示理想变压器电路中的  $I_1$ , 给定:

$$I_{L1} = 10.0 \angle 0^\circ \text{ A} \quad I_{L2} = 10.0 \angle -36.87^\circ \text{ A} \quad I_{L3} = 4.47 \angle -26.57^\circ \text{ A}$$

答案:  $16.5 \angle -14.04^\circ \text{ A}$

14.42 当图 14-52 所示线性变压器的次级绕组开路时,初级电流  $I_1 = 4.0 \angle -89.69^\circ \text{ A}$ . 求耦合系数  $k$ .

答案: 0.983

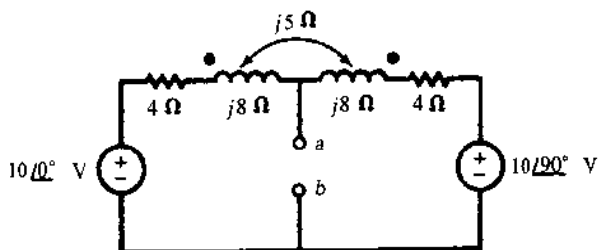


图 14-50

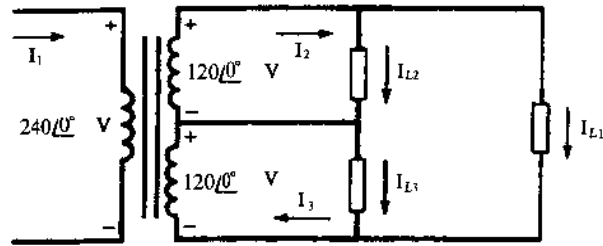


图 14-51

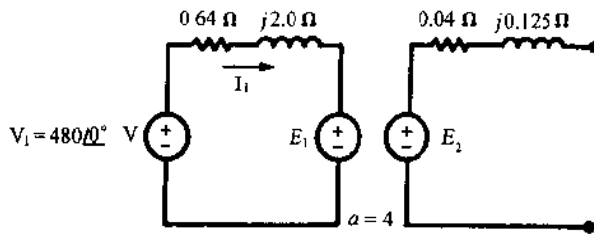


图 14-52

- 14.43 对于图 14-53 所示理想变压器, 给定  $I_2 = 50\angle -36.87^\circ \text{ A}$  及  $I_3 = 16\angle 0^\circ \text{ A}$ , 求  $I_1$ .  
答案:  $26.6\angle -34.29^\circ \text{ A}$

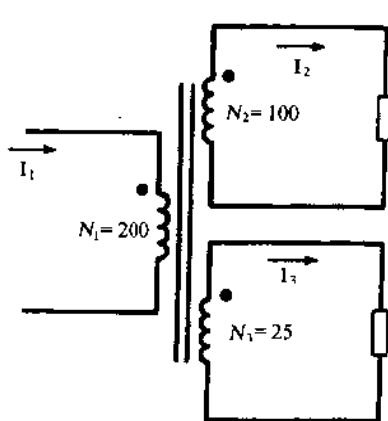


图 14-53

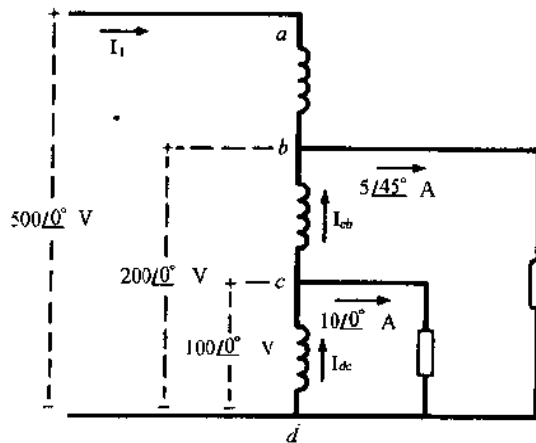


图 14-54

- 14.44 考虑图 14-54 所示若自耦变压器是理想的, 求电流  $I_1$ ,  $I_{L2}$  和  $I_{L3}$ .  
答案:  $3.70\angle 22.5^\circ \text{ A}$ ,  $2.12\angle 86.71^\circ \text{ A}$ ,  $10.34\angle 11.83^\circ \text{ A}$

## 第 15 章 使用 Spice 和 PSpice 进行电路分析

### 15.1 Spice 和 PSpice

Spice(Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)是一个计算机程序,在 20 世纪 70 年代,它是在伯克立市的加利福尼亚大学关于模拟电子电路的研究中发展起来的.它作为一种分析、设计、测试综合电路和其他更大范围的电子电路的工具而被使用. Spice 是一个公用领域的程序.商业化版本,诸如 MicroSim 公司的 PSpice<sup>TM</sup>,与 Spice 一样除了提供的技术支持和产业顾客需要不同外,他们使用同样的运算法则和语法.

这一章介绍 Spice/PSpice 的基本元素和它们对简单电路的应用,所有例子是在免费使用的 PSpice 版本上运行.

### 15.2 电路描述

电路描述是以一系列文本文件语句串联的形式输入计算机,它是由一个 ASCII 文件编辑程序处理的,称为源文件.它也可以使用 MicroSim 的原理图收集程序(Schematic Capture 程序)来构造电路,在计算机监视器上以图表的形式输入.在这一章,我们将用名为 SOURCE.CIR 的源文件.为了求解电路,我们在源文件上运行电路解算程序,计算机将答案存放在一个名为 SOURCE.OUT 的文件中.

**例 15.1** 用 PSpice 算出图 15-1(a)中通过  $5\mu\text{F}$  电容的直流稳态电压.

我们先标记节点 0, 1, 2 和相应的元件  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C$  和  $V_s$ [见图 15-1(b)].然后,我们创建如下所示的 ASCII 源文件并给它起一个名字,例如:EXMP1.CIR.

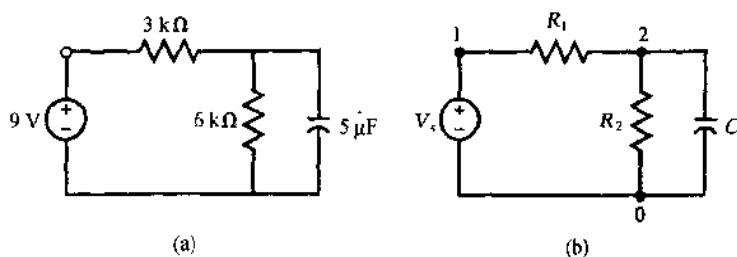


图 15-1

图 15-1 直流分析

```
Vs      1    0    DC    9V
R1       1    2    3k
R2       0    2    6k
C        0    2    5μF
.END
```

执行 PSPICE EXMP1 命令,计算机求解这个电路并在文件 EXMP1.OUT 中写出下列结果.

```
NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE
(1)      9.0000    (2)      6.0000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        -1.000E-03
TOTAL POWER DISSIPATION 9.00E 03 WATTS
```

打印输出说明以节点 0 为参考的节点 2 处的电压为 6V, 流入电压源  $V_s$  的电流是  $-10^{-3}\text{A}$ , 电路消耗的总功率为  $9 \times 10^{-3}\text{W}$ 。

### 15.3 一个 Spice 源文件的组成

例 15.1 源文件非常简单并且包含用 Spice 求解图 15-1 所示电路的必要语句。在源文件中的每一行都是一个语句。通常, 如果一行太长(超过 80 个字符), 它可以在下一行继续, 但接续行必须在第一列以一个加号(+)开头。

PSpice 不区分大小写字母, 当未加说明时指定为标准单位。我们一般使用两种表示法。

#### 标题语句

例 15-1 源文件的第一行是一个标题语句。在输出文件里 Spice 使用该行作为一个标签, 在分析中不考虑这一行。因此, 第一行作为标题行, 即使是空行。

#### .END 语句

在源文件的结尾需要 .END 语句。在 .END 后面的任何语句都被认为是另一个源文件。

#### 数据语句

在例 15.1 源文件中剩下的 4 个数据语句完整地说明了电路。第二行语句描述了名为  $V_s$  的电压源连接在节点 1(电源的正极)和节点 0 之间。电源是一个 9 伏的直流源。第三行描述了一个电阻值为  $3\text{k}\Omega$  的名为  $R_1$  的电阻, 连接在节点 1 和节点 2 之间。与此同理, 第四行和第五行分别说明了连接在节点 0 和节点 2 之间的  $R_2(6\text{k}\Omega)$  和  $C(5\mu\text{F})$ 。在任何一个电路中, 都应该把参考节点标记为 0 节点。一组描述电路网络拓扑和元件值的数据语句叫做网表。数据语句的语法将在第 15.4 节中介绍。

#### 控制和输出语句

不添加任何附加命令, 只在网络表的基础上, Spice 可以自动计算下列各变量的直流稳态值:

- (i) 相对于节点 0 的节点电压;
- (ii) 流入每个电压源的电流;
- (iii) 电路中消耗的功率。

然而, 在源文件中也可以包含附加控制和输出语句, 以说明其他变量(参见第 15.5 节)。

### 15.4 数据语句和直流分析

#### 无源元件

关于  $R$ ,  $L$  和  $C$  元件的数据语句最少包括三部分。第一部分是分别以  $R$ 、 $L$ 、 $C$  开头的字符串给出电阻、电感、电容元件名称。第二部分给出节点间连接有元件的节点号, 用一空格分开。第三部分以欧姆、亨利、法拉为单位给出元件值, 表 15-1 中给出了可选择的标度因数。

表 15-1 标度因数和符号

名称	符号	数值
femto	f	$10^{-15} = 1\text{E}-15$
pico	p	$10^{-12} = 1\text{E}-12$
nano	n	$10^{-9} = 1\text{E}-9$
micro	u	$10^{-6} = 1\text{E}-6$
milli	m	$10^{-3} = 1\text{E}-3$
kilo	k	$10^3 = 1\text{E}3$
mega	meg	$10^6 = 1\text{E}6$
giga	g	$10^9 = 1\text{E}9$
tera	t	$10^{12} = 1\text{E}12$

初始状态可以在第四段以  $IC = xx$  的形式给出. 数据语句的语法格式是

$\langle \text{name} \rangle \quad \langle \text{nodes} \rangle \quad \langle \text{value} \rangle \quad [ \langle \text{initial condition} \rangle ]$

括号 '[ ]' 表示在语句中可以选择的. 部分.

**例 15.2** 写出图 15-2 给出的  $R, L, C$  的数据语句.

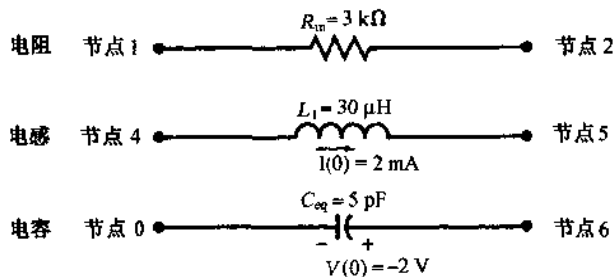


图 15-2

Element  $\langle \text{name} \rangle \quad \langle \text{nodes} \rangle \quad \langle \text{value} \rangle \quad [ \langle \text{initied condition} \rangle ]$

Resistor Rim 1 2 3k

Inductor  $L_1$  5 4 30UH  $I_c = -2mA$

Capacitor leg 6 5PI  $I_c = -2V$

第三句关于电容器的语句只指出了二个节点. 参考节点通常可以忽略.

### 独立电源

独立电源标明为

$\langle \text{name} \rangle \quad \langle \text{nodes} \rangle \quad \langle \text{type} \rangle \quad \langle \text{value} \rangle$

对于直流源和交流源,  $\langle \text{type} \rangle$  分别表示为 DC 和 AC. 其他的时间受控源将在第 15.12 节介绍. 电压源和电流源的名称分别以 V 和 I 开头. 对于电压源, 第一个节点表示正极. 电流源中的电流从第一个节点流到第二个节点.

**例 15.3** 写出图 15-3 中所示电源的数据语句.

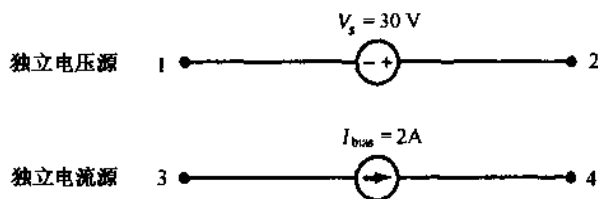


图 15-3

电源  $\langle \text{name} \rangle \quad \langle \text{nodes} \rangle \quad \langle \text{type} \rangle \quad \langle \text{value} \rangle$

独立电压源  $V_s$  2 1 DC 30V

独立电流源  $I_{bias}$  3 4 DC 2A

**例 15.4** 写出图 15-4(a) 所示电路的网络表, 并使用 Spice 进行直流分析.

我们首先标注节点号和元件名称, 如图 15-4(b) 所示. 网络表如下

图 15-4 直流分析

R1	0	1	500
R2	1	2	3k
R3	2	3	1k
R4	0	3	1.5k



```

Vs      3    1    DC    4V
Is      0    2    DC    3 mA
.END

```

输出文件中的结果,如下所示.

```

NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE
(1)      .1250      (2)     5.3750      (3)     4.1250
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        -1.500E-03
TOTAL POWER DISSIPATION 6.00E-03 WATTS

```

### 非独立源

线性受控源由下面的句型说明:

<name>    <nodes>    <control>    <gain>

每个电源的名称都应按照以下规则用一个固定的字母开头

压控电压源	E <sub>xx</sub>
流控电流源	F <sub>xx</sub>
压控电流源	G <sub>xx</sub>
流控电压源	H <sub>xx</sub>

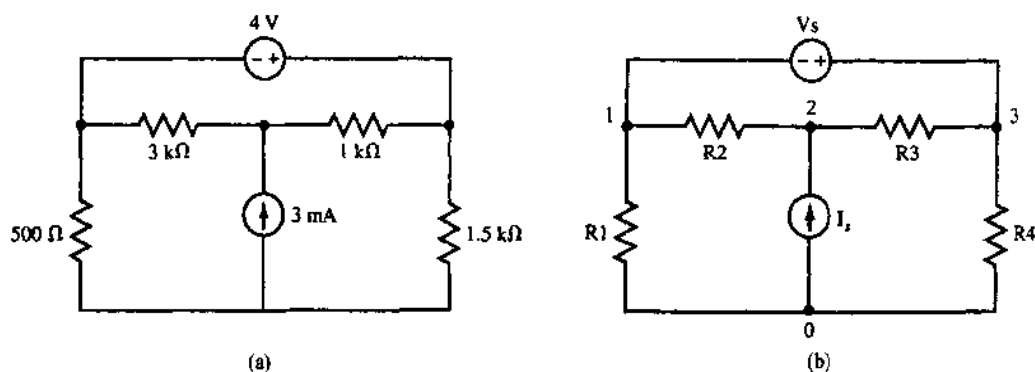


图 15-4

节点规则与独立源相似. 对于压控源, <control> 是控制这个电源的一对节点的电压差, 第一个节点代表正极, <gain> 为比例因子.

**例 15.5** 写出图 15-5 所示的压控电源的数据语句.

Source	<name>	<nodes>	<control>	<gain>
VCVS	E1	4 3	2 1	k1
VCCS	G1	5 6	2 1	k2

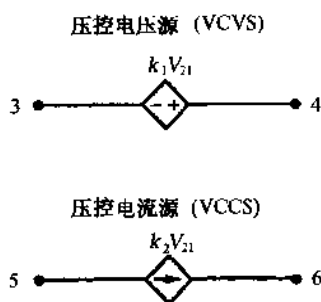


图 15-5

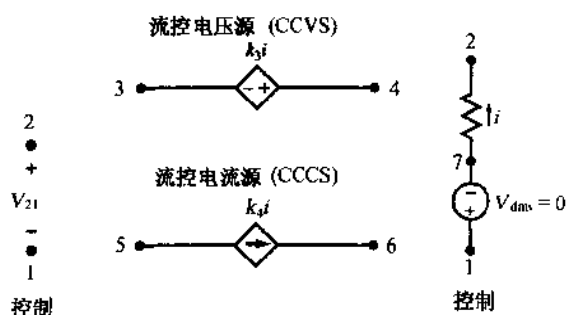


图 15-6

在流控源的情况下,我们首先引入控制电流通道上的零值电压源(也称为虚拟电压  $V_{dmy}$ ),并用它的名字作为控制变量。

**例 15.6** 写出图 15-6 所示流控源的数据语句。

引入了带有电流  $i$  的  $V_{dmy}$  ( $V_{dmy}$ ),  $i$  由节点 1 处流入。

$V_{dmy} \quad 1 \quad 7 \quad DC \quad 0$

受控电源的数据语句为

Source	<name>	<nodes>	<control>	<gain>
CCVS	H1	4 3	$V_{dmy}$	k3
CCCS	F1	5 6	$V_{dmy}$	k4

**例 15.7** 写出图 15-7(a)所示电路的网络表,并使用 PSpice 对它进行直流分析。

节点号和元件名称如图 15-7(b)所示。网络表如下

图 15.7 带受控源的直流分析

```

Vs      1    0    DC    12
R1      1    2    1k
R2      0    3    2k
R3      0    4    500
Vdmy    2    3    0
F1      4    3    Vdmy   100
.END

```

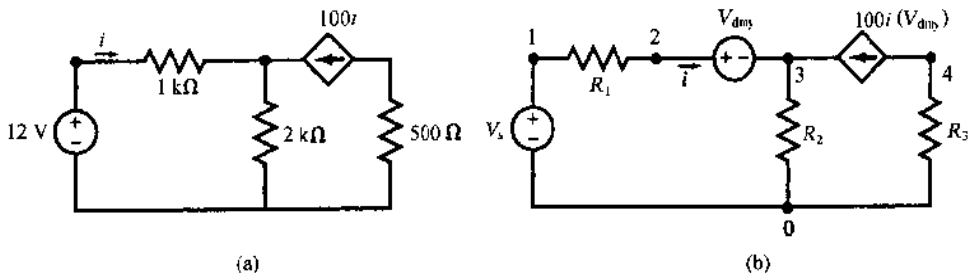


图 15-7

输出文件的结果为

```

NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE
(1)    12.0000  (2)    11.9410  (3)    11.9410  (4)    -2.9557
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        -5.911E-05
Vdmy      5.911E-05
TOTAL POWER DISSIPATION  7.09E-04  WATTS

```

### 15.5 直流分析中的控制和输出语句

下面介绍了某些语句的控制作用和输出格式。比如

.OP 打印所有独立电源的直流工作点。

.DC 扫描独立直流源的值。语法为

.DC <name> <initial value> <final value> <step size>

.PRINT 打印变量值。语法为

.PRINT <type> <output variables>

<type>是 DC, AC, 或 TRAN (暂态)。

.PLOT 行打印变量.语法为

.PRINT <type> <output variables>

.PROBE 生成数据文件 \*.DAT, 它可以通过引用 Probe 程序进行分析后绘制出来.

语法为

.PROBE [<output variables>]

**例 15.8** 求出图 15-8 中电路的  $V_s$  值, 使  $1\text{k}\Omega$  电阻消耗的功率为 0. 使用 .DC 命令使  $V_s$  以  $1\text{V}$  的步长从  $1\text{V}$  到  $6\text{V}$  变化, 使用 .PRINT 命令显示  $I(V_s)$ ,  $V(1,2)$ ,  $V(2)$ .

源文件为

图 15-8 直流扫描

```
Vs      1    0    DC    1V
Is       0    2    DC    1mA
R1       1    2    1k
R2       0    2    2k
.DC      Vs    1    6    1
.PRINT   DC    I(Vs) V(1,2) V(2)
END
```

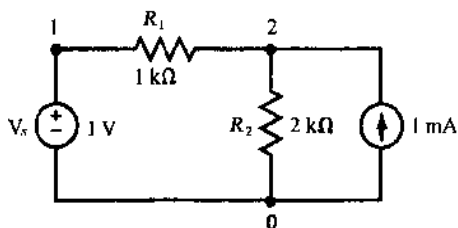


图 15-8

输出文件中的结果为

#### DC TRANSFER CURVES

$V_s$	$I(V_s)$	$V(1,2)$	$V(2)$
1.000E+00	3.333E-04	-3.333E-01	1.333E+00
2.000E+00	-1.333E-12	1.333E-09	2.000E+00
3.000E+00	-3.333E-04	3.333E-01	2.667E+00
4.000E+00	-6.667E-04	6.667E-01	3.333E+00
5.000E+00	-1.000E-03	1.000E+00	4.000E+00
6.000E+00	-1.333E-03	1.333E+00	4.667E+00

答案为:  $V_s = 2\text{V}$ .

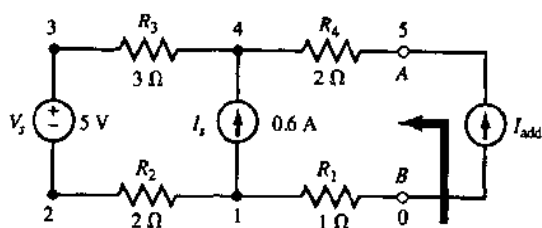
**例 15.9** 写出图 15-9(a) 中电路的源文件, 使用命令 .DC, .PLOT, .PROBE 求出 AB 端电流  $I$  从 0 到  $-2\text{A}$  变化时的  $I-V$  特征方程式.

首先, 我们在 AB 端接入一个直流电流源  $I_{\text{add}}$ , 使用 .DC 命令使它的值从  $0\text{A}$  到  $-2\text{A}$  变化, 并绘制  $V-I$  曲线. 由于电路是线性的, 至少要画两个点. 然而, 为了使图形清晰, 如下所示, 源文件包含了 10 步.

图 15-9 端点特性

```
Iadd    0    5    DC    0
Is       0    4    DC    0.6A
Vs       3    2    DC    5V
R1       0    1    1
R2       1    2    2
R3       3    4    3
R4       4    5    2
.DC      Iadd   0   -2   0.2
.PLOT    DC     V(5)
.PROBE
.END
```

输出示于图 15-9(b)中.  $I-V$  方程为  $V = 8I + 8.6$ .



(a) 戴维南模型

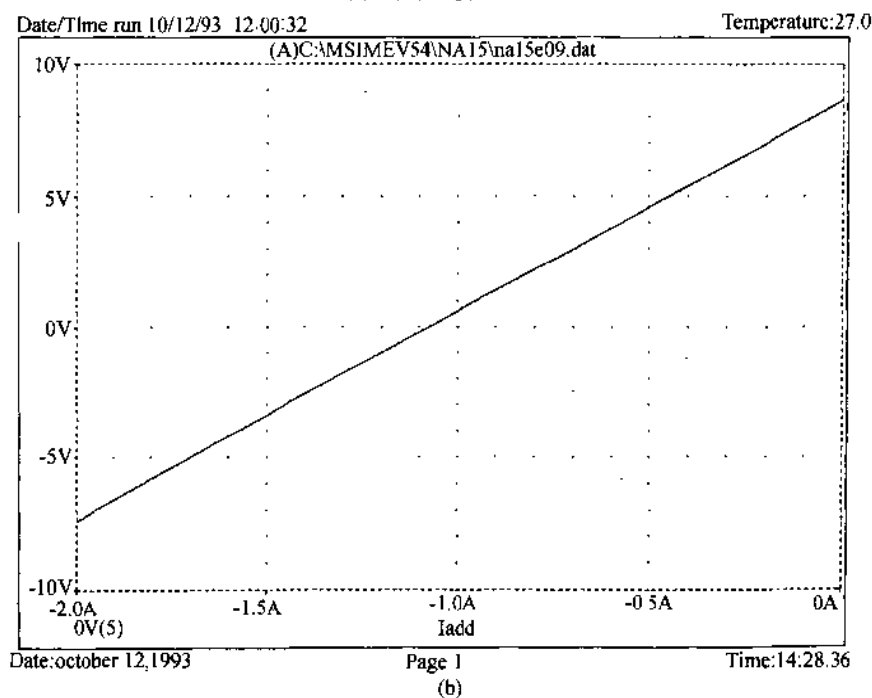


图 15-9

## 15.6 戴维南等效电路

### .TF 语句

.TF 命令可以提供从一个输入变量到一个输出变量的传递函数,并且产生由两电源看去的电阻.因而,它可以产生一个阻性电路的戴维南等效电路.语法是

.TF <输出变量> <输入变量>

例 15.10 使用命令.TF 求出图 15-10 电路从 AB 端看的戴维南等效电路.

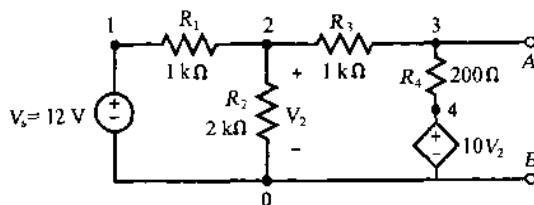


图 15-10

节点标号和元件名称如图 15-10 所示.源文件为

图 15-10 传递函数

Vs	1	0	DC	12
E1	4	0	2	0

```

R1      1  2      1k
R2      2  0      2k
R3      2  3      1k
R4      3  4      200
.TF     V(3)     Vs
.END

```

输出文件包含以下结果：

```

NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE
(1)    12.0000  (2)    -2.0000  (3)    -17.0000  (4)    -20.000

```

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

```

NAME      CURRENT

```

```

Vs        -1.400E-02

```

```

TOTAL POWER DISSIPATION 1.68E-01 WATTS

```

SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS

```

V(3)/Vs = -1.417E+00

```

```

INPUT RESISTANCE AT Vs = 8.571E+02

```

```

OUTPUT RESISTANCE AT V(3) = -6.944E+01

```

因此,  $V_{Th} = -1.417(12) = -17\text{V}$  和  $R_{Th} = -69.44\Omega$ .

### 15.7 运算放大电路

运算放大器可以用高输入阻抗和高增益压控电压源作为模型. 模型可以在网络表中重复使用.

**例 15.11** 求出图 15-11(a) 所示的理想运算放大电路的传递函数  $V_3/V_s$ .

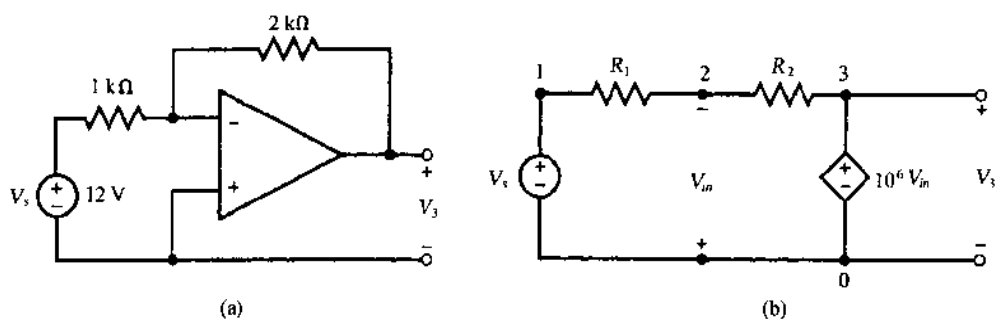


图 15-11

运算放大器可以用一个增益为  $10^6$  的受控电压源的电压来代替[见图 15-11(b)]. 源文件是

图 15-11 反相运算放大器电路

```

Vs      1  0      DC      12
E1      3  0      0  2     1E6
R1      1  2      1k
R2      2  3      2k
.TF     V(3)     Vs
.END

```

传递函数写在输出文件中.

```

NODE   VOLTAGE   NODE   VOLTAGE   NODE   VOLTAGE
(1)    12.0000   (2)    24.00E-06   (3)    -24.0000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        -1.200E-02
TOTAL POWER DISSIPATION 1.44E 01 WATTS
SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(3)/Vs = -2.000E+00
INPUT RESISTANCE AT Vs=1.000E+03
OUTPUT RESISTANCE AT V(3)=0.000E+00

```

### .SUBCKT 语句

一个支路可以用下列格式开头的一组语句进行定义：

```
.SUBCKT <name> <external terminals>
```

语句以.ENDS 语句结束. 在一个网络表中我们将一个支路表示为：

```
Xaa <name> <nodes>
```

因此, .SUBCKT 语句可以给重复使用的运算放大器模型指定一个名称.

**例 15.12** 给定图 15-12 所示电路, 求出当  $V_s$  以 0.5V 的步长从 0.5V 到 2V 变化时,  $I_s$ ,  $I_f$ ,  $V_2$  和  $V_6$  的值. 假设一个实际运放电路如图 15-12(b) 所示,  $R_{in} = 100\text{k}\Omega$ ,  $C_{in} = 10\text{pF}$ ,  $R_{out} = 10\text{k}\Omega$ , 开环回路增益为  $10^5$ .

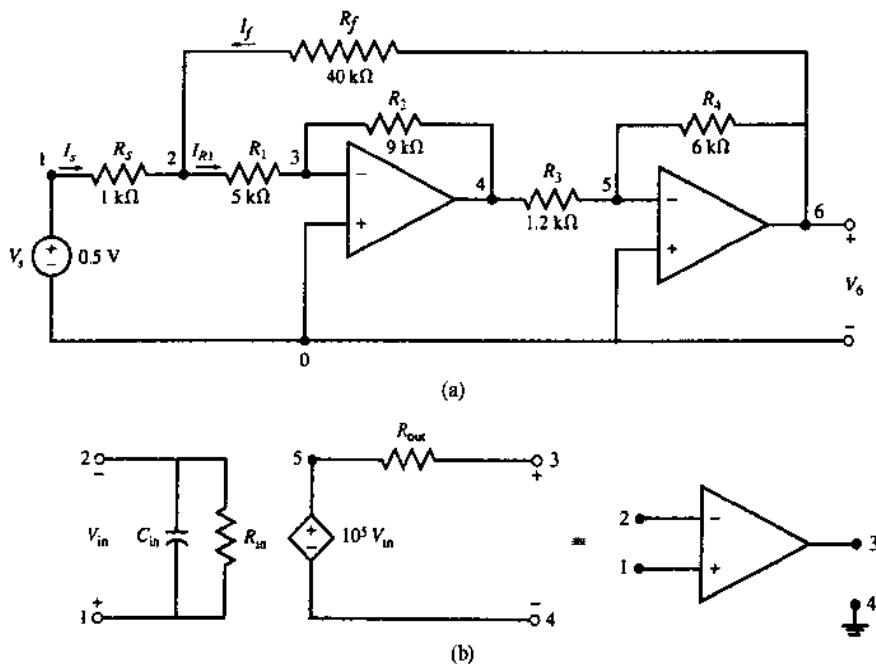


图 15-12

源文件采用图 15-12(b)所示的 OPAMP 分支电路, 它的描述以 .SUBCKT 开头, 以 .ENDS 结尾. X1 和 X2 语句描述了涉及 OPAMP 支路的两个运算放大器. 注意在 X1 和 X2 语句中节点, 连接和在用 .SUBCKT 语句中说明的外接端点的一致性. 源文件是

```

.SUBCKT                OPAMP                1 2 3 4
Rin                    1 2                10E5

```

```

Cin      1  2      10pF
Rout     3  5      10k
Eout     5  4      1  2  10E5
.ENDS

```

使用 .SUBCKT 的图 15-12 运算放大器电路

```

Vs      1  0      DC  .5
Rs      1  2      1k
R1      2  3      5k
R2      3  4      9k
R3      4  5      1.2k
R4      5  6      6k
Rf      6  2      40k
X1      0  3  4  0  OPAMP
X2      0  5  6  0  OPAMP
.DC     Vs      0.5      2      0.5
.PRINT  DC      V(2)      V(6)  I(Vs)  I(R1)  I(Rf)
.IF     V(6)      Vs
.END

```

输出文件是

#### DC TRANSFER CURVES

Vs	V(2)	V(6)	I(Vs)	I(R1)	I(Rf)
5.000E-01	5.000E-01	4.500E+00	-3.372E-09	1.000E-04	9.999E-0
1.000E+00	1.000E+00	9.000E+00	-6.745E-09	2.000E-04	2.000E-0
1.500E+00	1.500E+00	1.350E+01	-1.012E-08	3.000E-04	3.000E-0
2.000E+00	2.000E+00	1.800E+01	-1.349E-08	4.000E-04	4.000E-0

NODE -00.00E-00 NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE					
(1)	.5000	(2)	.5000	(3)	9.400E-06
(5)	-13.00E-06	(6)	4.4998	(X1.5)	-9.3996
				(X2.5)	12.9990

#### VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME	CURRENT
Vs	-3.372E-09

TOTAL POWER DISSIPATION 1.69E-09 WATTS

#### SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS

V(6)/Vs=9.000E+00

INPUT RESISTANCE AT Vs=1.483E+08

OUTPUT RESISTANCE AT V(6)=7.357E-02

$R_s$  上没有电压降. 因此,  $V(2) = V_s$ , 并且总增益为  $V(6)/V_s = V(2)/V_s = 9$ . 通过反馈电阻  $R_f$  提供了  $R_i$  的电流.

## 15.8 交流稳态电路和频率响应

### 独立交流电源

独立交流电源用以下语法结构的语句进行描述

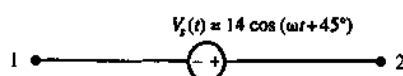
<name> <nodes> AC <magnitude> <phase in degrees>

电压源以 V 开头, 电流源以 I 开头, 方向规定和直流电源相同。

**例 15.13** 写出图 15-13 所示电源的数据语句。

AC Source	<name>	<nodes>	<type>	<magnitude>	<phase>
Voltage	$V_s$	2 1	AC	14	45
Current	$I_s$	3 4	AC	2.3	-105

独立交流电压源



独立交流电流源

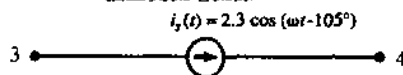


图 15-13

### .AC 语句

.AC 命令在所要求的范围或设置一个所需要的值以扫描电路中所有交流电源的频率。语法结构是

.AC <sweep type> <number of points> <starting f> <ending f>

对于交流稳态电路, <sweep type> 是 LIN。为了得到一个单一频率, 起始频率和结束频率设置为所需要的值并且点数设置为 1。

### .PRINT AC 和 .PLOT AC 语句

.PRINT AC 语句打印出稳态电路输出的幅值和相位。语法结构是

.PRINT AC <magnitudes> <phases>

电压的幅值和相位分别为  $V_m$  (可变) 和  $V_p$  (可变), 电流的幅值和相位分别为  $I_m$  (可变) 和  $I_p$  (可变)。.PLOT AC 的语法结构与 .PRINT AC 相似。

**例 15.14** 在图 15-14(a) 所示的 RLC 串联电路中, 电源的频率以 200 的步长从 40 到 60 kHz 变化。使用 .PLOT 和 .PROBE 语句求出电流 I 的幅值和相位。

源文件是

图 15-14 串联 RLC 电路交流分析

```

Vs      1 0      AC      1 0
R        1 2      32
L        2 3      2m
C        3 0      5n
.AC      LIN      200    40k 60k
.PLOT    AC  Im(Vs) Ip(Vs)
.PROBE   Vm(1,2) Vm(2,3) Vm(3) Im(Vs) Ip(Vs)
.END

```



使用 Probe 绘制的频率响应曲线示于图 15-14(b)中。

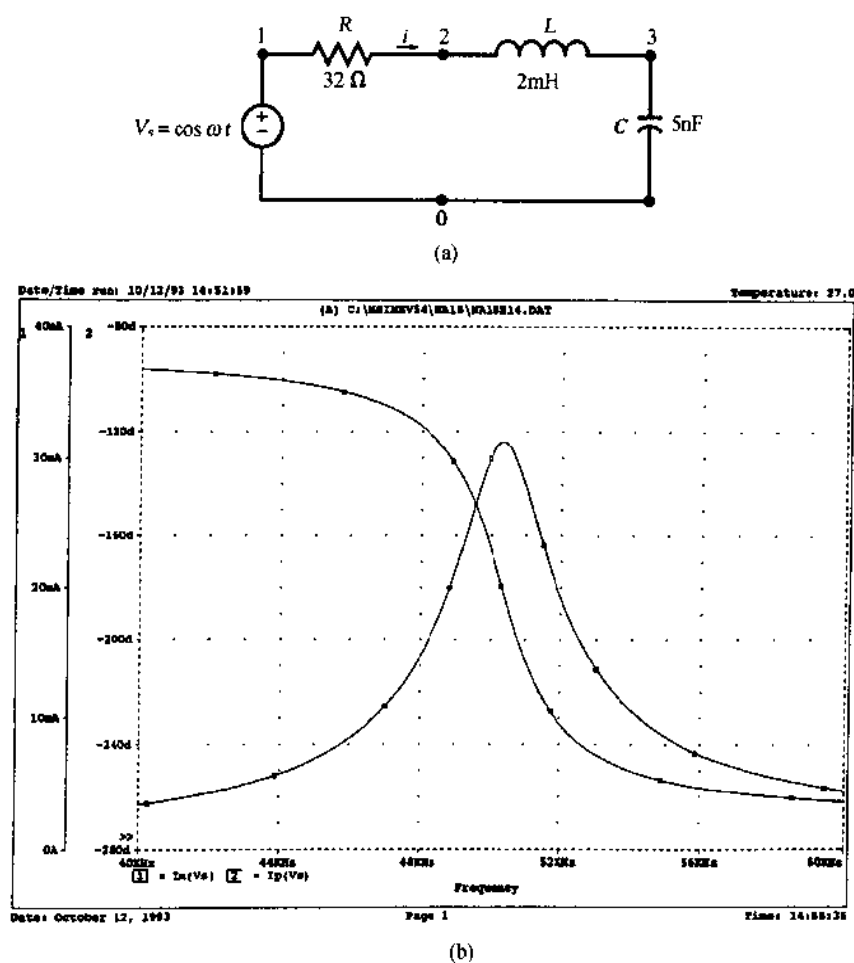


图 15-14

## 15.9 互感和变压器

两个电感之间的互感是由名字以 K 开头的一种装置做为模型。数据语句的语法是：

<name> <inductor 1> <inductor 2> <coupling coefficient>

确定互感项符号的同名端规则，用在数据语句中第一个节点是每个电感的同名端的方法。

**例 15.15** 写出描述图 15-15 中耦合线圈的三条数据语句。

耦合系数是  $k_{12} = 1.5 / \sqrt{2(3)} = 0.61$ 。网络表如下

L1	1	2	2
L2	3	4	3
K12	L1	L2	0.61

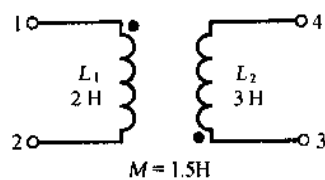


图 15-15

**例 15.16** 绘出图 15-16(a)所示电路对于频率  $f$  从 0.01 到

1 Hz 变化时的输入阻抗  $Z_{in} = V_1 / I_1$ 。

为了求出  $Z_{in}$ ，我们在节点 0 和节点 1 之间连接一个 1A 的交流电流源，并绘出这两点的电压  $V(1)$  的幅值和相位。源文件是

图 15-16 耦合线圈交流分析

```
IADD      0      1      AC      1      0
```

```

C      0      1      1 000 000 uF
R      0      2      3
L1     1      2      2H
L2     3      2      5H
K12    L1     L2     0.6325 H
L3     0      3      1H
.AC     LIN    20     .01    1
.PRINT  AC     Vm(1) Vp(1)
.PROBE
.END

```

$V_m(1)$ 和 $V_p(1)$ 表示输入阻抗 $Z_{in}$ 的幅值和相位,图15-16(b)是使用 Probe 绘制的曲线图.注意最大值出现在大约 100 mHz 处.

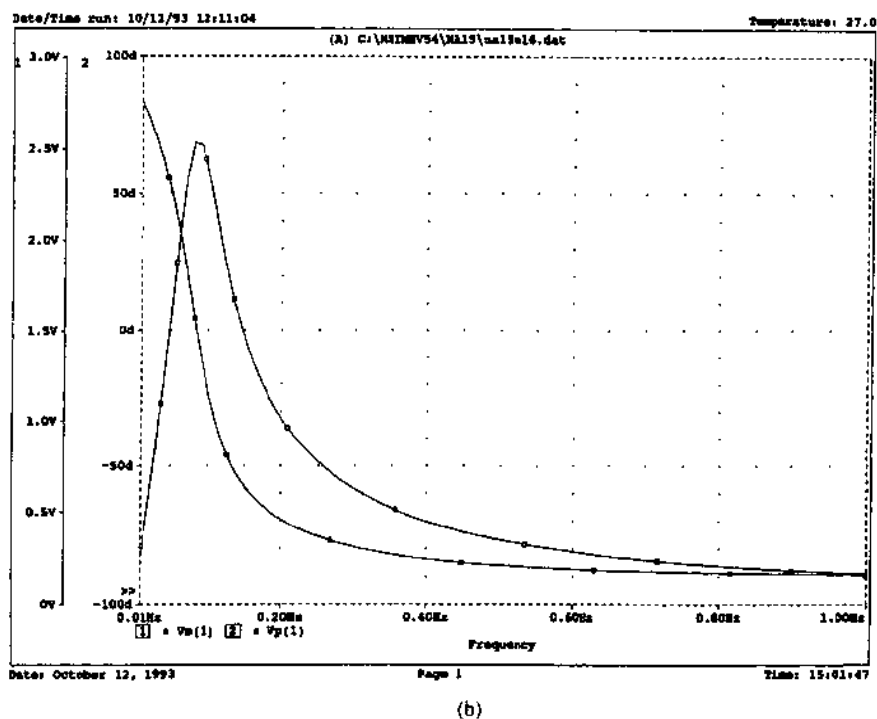
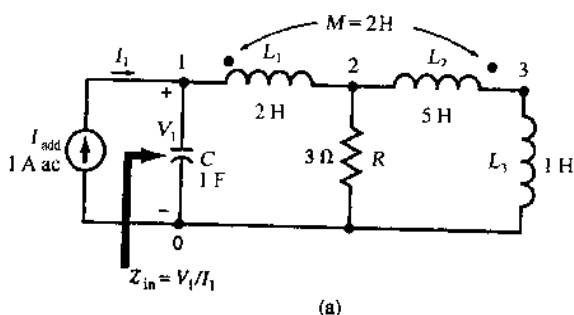


图 15-16

### 15.10 使用可变参数的模型装置

#### .MODEL 语句

无源元件的参数可以使用.MODEL语句进行改变.语法结构是:

```
.MODEL <name> <type> [( <parameter> = <value> )]
```

这里, <name> 是指定元件的名称. 对于无源线性元件, <type> 是

RES      代表电阻  
IND      代表电感  
CAP      代表电容

我们可以使用 .STEP 语句在期望值的范围内以所需的步长扫描模型的参数

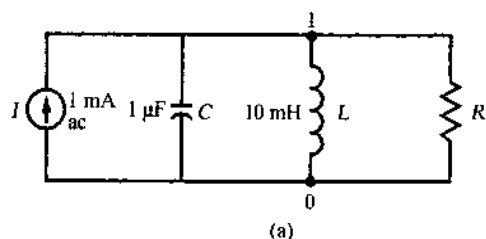
.STEP LIN <name> <initial value> <final value> <step size>

举一个例子, 以下的两条语句使用 .MODEL 和 .STEP 命令定义一个叫做 heater 的电阻, 参数以 5 为步长从 20 到 40 $\Omega$  变化, 产生 20, 25, 30, 35 和 40 $\Omega$  的电阻.

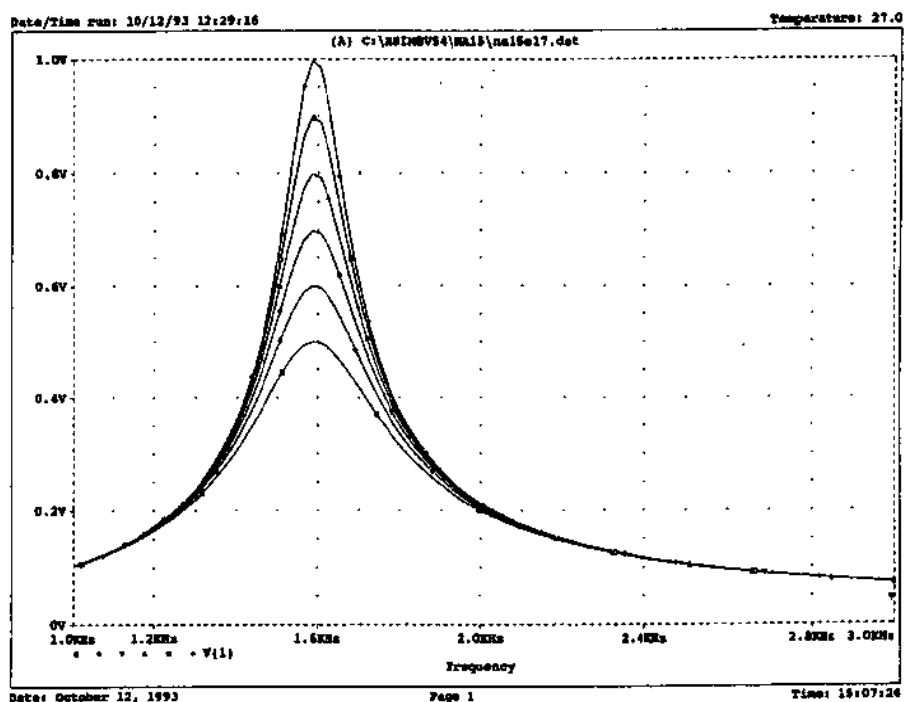
```
.MODEL      heater      RES (R=20)
.STEP       RES          heater (R)  20  40  5
```

**例 15.17** 使用 Probe 绘制图 15-17(a) 电路的  $V$  曲线, 它的频率以 100 为步长, 从 1 到 3 kHz 变化,  $R$  以 100 $\Omega$  的步长从 500 $\Omega$  到 1 k $\Omega$  变化.

使用 .MODEL 命令, 我们可以建立电阻 Rleak, 并用 .STEP 在以下源文件中扫描它的值. 使用 Probe 绘制  $V$ - $f$  频率响应曲线图, 如图 15-17(b) 所示.



(a)



(b)

图 15-17

图 15.17 具有可变电阻  $R$  的并联谐振

I	0 1	AC	1m 0
R	1 0	RLeak	1
L	1 0	10 m	

```

C      1  0      1u
.MODEL Rleak    RES(R=1)
.STEP  LIN      RES    RLeak(R)    500    1k    100
.AC    LIN      100 1k    3k
.PROBE
.END

```

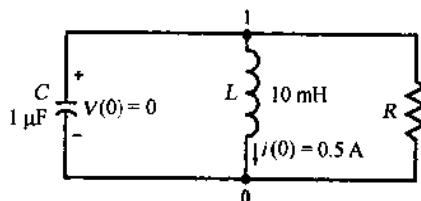
### 15.11 时间响应和暂态分析

#### .TRAN 语句

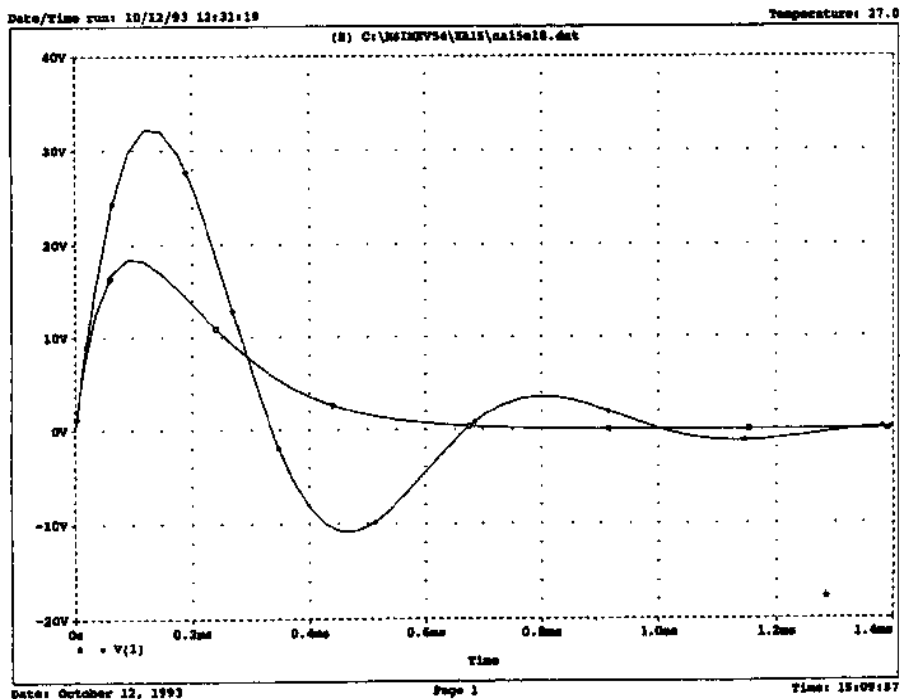
时间响应, 如一个无源电路中对初始状态的自然响应以及阶跃响应、脉冲响应、指数响应, 或其他的与时间相关的输入响应都可以用 .TRAN 语句产生, 在  $t=0$  时响应开始. 增量大小和终止时间在以下语句中给出

.TRAN <increment size> <final time value>

例 15.18 使用 .TRAN 和 .PROBE 命令绘制图 15-18(a) 中  $RLC$  并联电路两端的电压.  $R = 50\Omega, 150\Omega, 0 < t < 1.4 \text{ ms}$ . 初始状态  $i(0) = 0.5 \text{ A}, V(0) = 0$ .



(a)



(b)

图 15-18

源文件为

具有可变电阻 R 的无源并联 RLC 电路

```

R      1  0      LOSS      1
L      0  1      10m      IC=.5
C      1  0      1u      IC=0
.MODEL LOSS      RES(R=6)
.STEP  RES      LOSS(R)      50  150  100
.TRAN  2.0E-6    1.4E-3      UIC
.PROBE
.END
  
```

图 15-18(b)展示了用 Probe 绘制的电压曲线图.  $R = 50\Omega$  时无振荡.

### 15.12 其他电源类型的说明

与时间相关的电源包括直流、交流和暂态成分,可表示为

<name> <nodes> <dc comp.> <ac comp.> <transient comp.>

未指定的直流或交流成分的默认值为 0. 暂态部分在  $t > 0$  时出现. 几种暂态成分在下面叙述.

#### 指数电源

电源在直流初值  $V_0$  开始. 在  $t_0$  时刻, 它随着一个时间常数  $\tau_1$  从  $V_0$  按指数规律变化到终值  $V_1$ . 在  $t = T$  时刻, 它随着一个时间常数  $\tau_2$  按指数规律返回到  $V_0$ . 它的语法结构是

EXP ( $V_0$   $V_1$   $\tau_1$   $T$   $\tau_2$ )

**例 15.19** 一个 1V 的直流电压源在  $t = 5\text{ms}$  时, 开始按指数规律增长, 时间常数是 5ms, 渐近线为 2V. 在 15ms 后, 开始以 2ms 的时间常数衰减到 1V. 写出电源的数据语句并使用 Probe 绘制波形.

数据语句是

$V_s$  1 0 EXP(1 2 5m 5m 20m 2m)

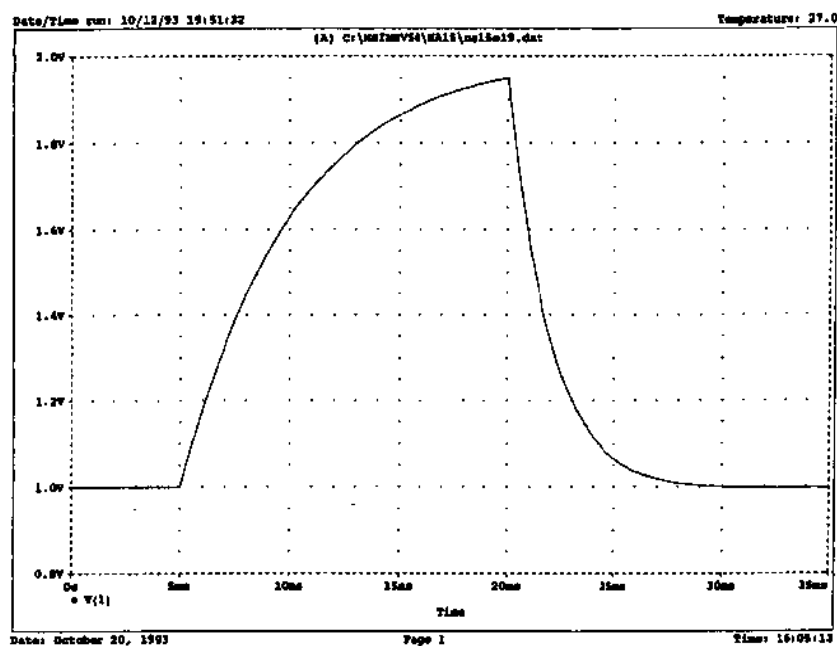


图 15-19

波形如图 15-19 所示。

### 脉冲电源

从  $V_0$  升到  $V_1$ , 然后再返回的一个周期脉冲波形可以表示为:

PULSE( $V_0$   $V_1$  delay risetime falltime duration period)

**例 15.20** (a) 写出脉冲波形的数据语句, 该脉冲每秒开关 10 次, 上升和下降时间为 2 ms, 在 1V 到 2V 之间变化. 脉冲在 2V 处持续 11 ms.  $t = 5\text{ms}$  时, 第一个脉冲开始. (b) 使用 Probe 绘制(a)的波形.

(a)数据语句是

$V_s$  1 0 PULSE (1 2 5m 2m 2m 11m 100m)

(b)波形绘制如图 15-20.

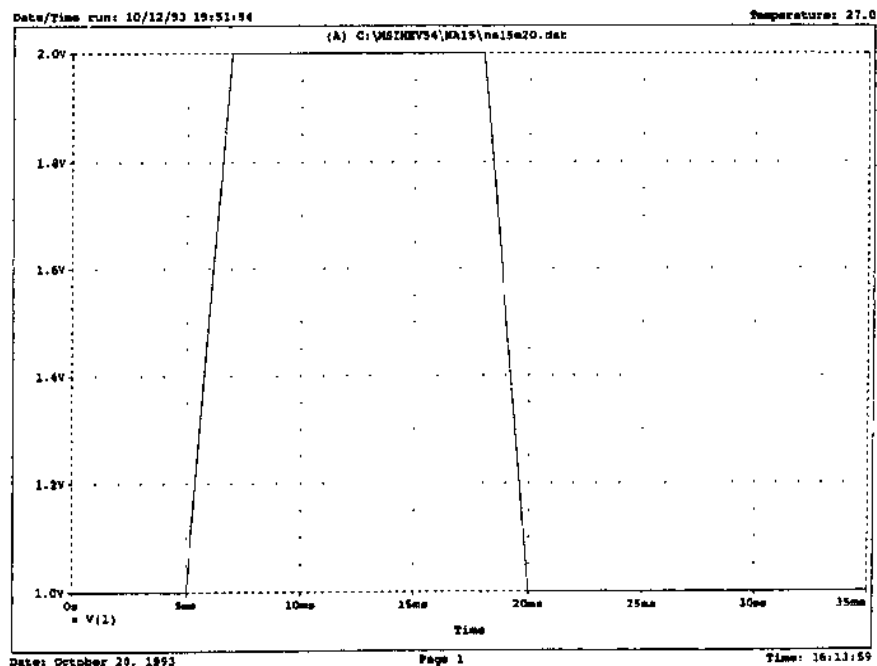


图 15-20

### 正弦电源

电源以恒定的初值  $V_0$  开始. 在  $t_0$  时刻, 以指数规律衰减的正弦成分具有频率  $f$ , 相位角, 起始幅值  $V_1$ , 衰减因子  $\alpha$  加到其中. 波形的语法结构是

SIN( $V_0$   $V_1$   $f$   $t_0$   $\alpha$  phase)

**例 15.21** (a) 在  $t = 5\text{ms}$  时刻, 加到 1V 的直流电压源上一个具有零相位的 100 Hz 正弦波, 写出它的数学表达式和数据语句. 正弦波幅值为 2V, 它用 10 ms 的时间常数衰减到 0. (b) 使用 Probe 绘制  $V_s(t)$  曲线.

(a) 衰减因子是时间常数的倒数, 它等于  $\alpha = 1/0.01 = 100$ . 当  $t > 0$  时, 电压表示为

$$V_s(t) = 1 + 2e^{-100(t-0.005)} \sin 628.32(t-0.005)u(t-0.005)$$

数据语句是

$V_s$  1 0 SIN(1 2 100 5m 100)

(b) 波形绘制如图 15-21 所示.

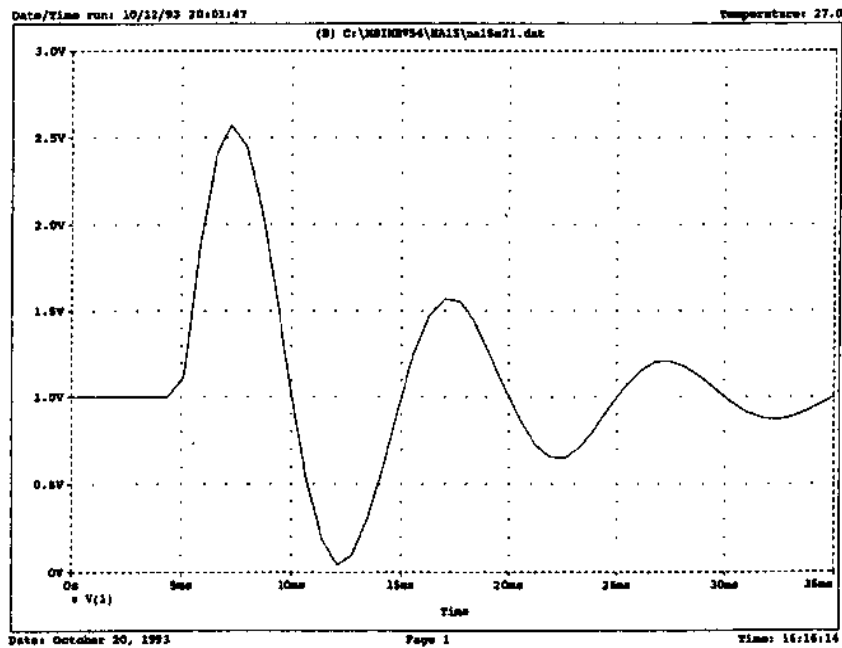
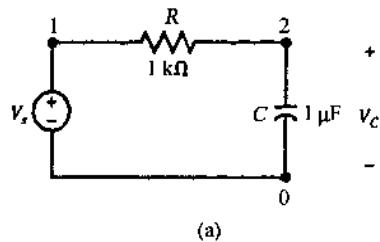
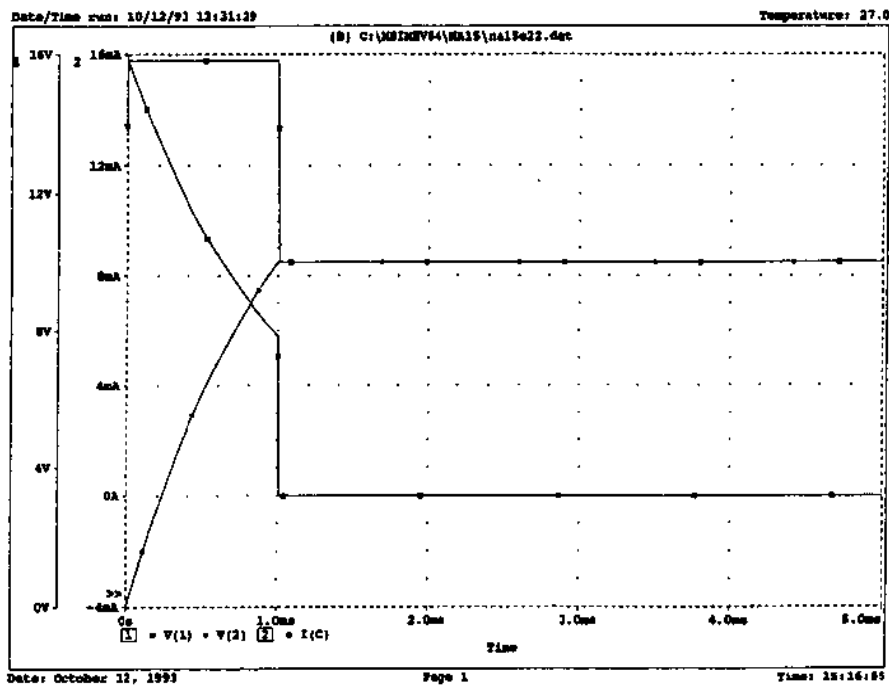


图 15-21

**例 15.22** 如图 15-22(a)所示电路中,一个  $1\ \mu\text{F}$  电容通过一个  $1\ \text{k}\Omega$  的电阻与一个电压源连接,初始电荷为 0,求电容两端的电压.电压源描述为



(a)



(b)

图 15-22

$$V_s = \begin{cases} 15.819\text{V} & 0 < t < 1\text{ms} \\ 10\text{V} & t > 1\text{ms} \end{cases}$$

我们使用指数波形表示  $V_s$ , 源文件是

RC 电路的非周期脉冲-阶跃响应

```
Vs      1  0      EXP(10 15.819 0 1.0E-6 1.0E-3 1.0E-6)
R       1  2      1k
C       2  0      1uF
.TRAN  1.0E-6    5.0E-3    UIC
.PROBE
.END
```

电容电压曲线图如图 15-22 (b) 所示. 在  $0 < t < 1\text{ms}$  期间, 暂态响应按指数规律向直流稳态电压值  $15.819\text{V}$  增长. 在  $t = 1\text{ms}$  时刻, 响应值达到  $10\text{V}$ . 在  $t = 1\text{ms}$  时刻, 电压源也下降到  $10\text{V}$ . 由于电源和电容的电压值相等, 电阻中的电流变为 0, 电路达到稳态, 暂态响应只持续  $1\text{ms}$ .

### 15.13 总结

除了在前面各节使用的线性元件和电源之外, 非线性装置(如二极管( $D_{xx}$ ))、结场效应管( $J_{xx}$ )、金属氧化物半导体场效应晶体管( $M_{xx}$ )、数据传输线( $T_{xx}$ ), 电压控制开关( $S_{xx}$ )和电流控制开关( $W_{xx}$ ), 都可以包含在网络表中. 使用 .SENS 语句进行灵敏度分析, 使用 .FOUR 语句进行傅里叶分析. 这些可以在课本或 PSpice 或 Spice 说明手册中找到. 以下内容概括了这一章使用过的语句.

数据语句

R, L, C	<name>	<nodes>	<value>	[<initial conditions>]
Mutual Inductance	kxx	<ind. a>	<ind. b>	<coupling coefficient>
Subcircuit Call	Xxx	<name>	<connection nodes>	
DC Voltage source	Vxx	<nodes>	DC	<value>
DC Current source	Ixx	<nodes>	DC	<value>
AC Voltage source	Vxx	<nodes>	AC	<magnitude> <phase>
AC Current source	Ixx	<nodes>	AC	<magnitude> <phase>
VCVS	Exx	<nodes>	<control>	<gain>
CCCS	Fxx	<nodes>	<control>	<gain>
VCCS	Gxx	<nodes>	<control>	<gain>
CCVS	Hxx	<nodes>	<control>	<gain>

控制语句:

```
.AC    <sweep type>    <number of point>    <starting f>    <ending f>
.DC    <name>          <initial value>    <final value>    <step size>
.END
.ENDS
.IC      <V (node) = value>
.MODEL  <name>    <type>    [( <parameter> = <value> )]
        <type>    RES 代表电阻
        <type>    IND 代表电感
        <type>    CAP 代表电容
.LIB    [<file name>]
.OP
.PRINT   DC    <output variables>
.PLOT    DC    <output variables>
```



```

.PRINT      AC      <magnitude>    <phase>
.PLOT       AC      <magnitude>    <phase>
.PRINT      TRAN    <output variables>
.PROBE      [<output variables>]
.STEP LIN   <type> <name (param.)> <initial value> <final value> <step size>
.SUBCKT     <name>    <external terminals>
.TF         <output variable>    <input source>
.TRAN       <increment size>    <final value>

```

## 习题及解答

15.1 使用 PSpice 求出图 15-23 所示电路的  $V(3,4)$ 。

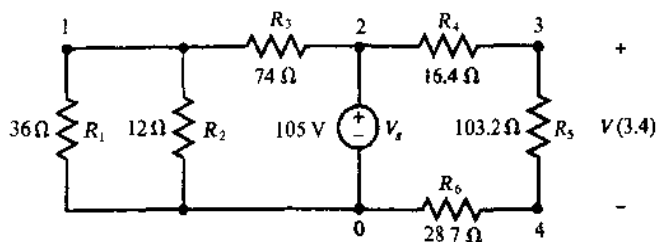


图 15-23

解 源文件是

图 15-23 直流分析

```

Vs      2      0      DC      105 V
R1      0      1      36
R2      0      1      12
R3      1      2      74
R4      2      3      16.4
R5      3      4      103.2
R6      4      0      28.7
.DC     Vs      105    105    1
.PRINT  DC      V(1)  V(3,4)
.END

```

输出文件为

```

DC TRANSFER      CURVES
Vs               V(1)      V(3,4)
1.050E+02       1.139E+01  7.307E+01

```

因此,  $V(3,4) = 73.07\text{ V}$ 。

15.2 写出图 15-24 所示电路的源文件并, 求出通过  $R_4$  的电流  $I$ 。

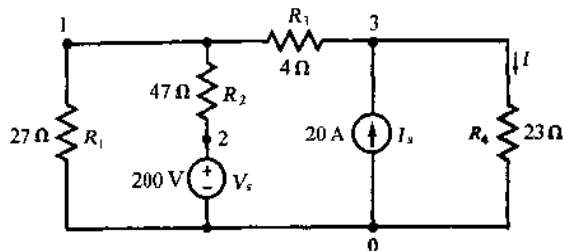


图 15-24

**解** 源文件是

图 15-24 直流分析

```
Vs      2    0    DC    200V
Is      0    3    DC    20A
R1      0    1    27
R2      1    2    47
R3      1    3    4
R4      3    0    23
.DC     Vs    200 200    1
.PRINT  DC    I(R4)
.END
```

输出文件包含下列结果

DC TRANSFER CURVE

```
Vs          I(R4)
2.000E+02   1.123E+01
```

根据在数据语句中有关  $R_4$  的命令, 从节点 3 到节点 0 流过的电流  $I(R4) = 11.23A$ .

**15.3** 使用 PSpice 求出图 15-25 所示电路的三个回路电流, 并与解析方法比较结果.

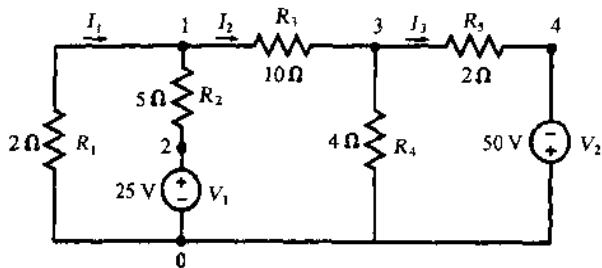


图 15-25

**解** 源文件是

图 15-25 直流分析

```
V1      2    0    DC    25
V2      0    4    DC    50
R1      0    1    2
R2      1    2    5
R3      1    3    10
R4      3    0    4
R5      3    4    2
.DC     V1    25 25    1
.PRINT  DC    I(R1) I(R3) I(R5)
.END
```

输出文件包括

```
DC TRANSFER      CURVES
V1              I(R1)          I(R3)          I(R5)
2.500E+01      -1.306E+00    3.172E+00    1.045E+01
```

解析法需要求解三个联立方程式.

**15.4** 使用 PSpice, 求出图 15-4 中电压源不供应任何能量时  $V_s$  的值.

**解** 我们从 1 到 10V 扫描  $V_s$ . 源文件和输出文件是

图 15-4 电路的直流扫描

```

R1      0      1      500
R2      1      2      3k
R3      2      3      1k
R4      0      3      1.5k
Vs      3      1      DC      4V
Is      0      2      DC      3mA
.DC     Vs      1 10 1
.PRINT  DC      I(Vs)
.PROBE
.PLOT   DC      I(Vs)
.END

```

输出文件包含的结果如下

```

DC TRANSFER CURVES
Vs          I(Vs)
1.000E+00   7.500E-04
2.000E+00   -2.188E-12
3.000E+00   -7.500E-04
4.000E+00   -1.500E-03
5.000E+00   -2.250E-03
6.000E+00   -3.000E-03
7.000E+00   -3.750E-03
8.000E+00   -4.500E-03
9.000E+00   -5.250E-03
1.000E+01   -6.000E-03

```

$V_s = 2V$  时电源中的电流为 0。

- 15.5** 对图 15-26 所示的电路进行直流分析, 并求出从 AB 端看的戴维南等效电路。

**解** 我们在如下的网络表中加入一个 .TF 语句。

图 15-26 的戴维南等效电路

```

Vs      1      0      DC      3
R1      1      2      10
Is      0      2      DC      1
.TF     V(2)      Is
.END

```

输出文件结果如下

```

NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE
(1)       3.0000      (2)       13.000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        1.000E+00
TOTAL POWER DISSIPATION - 3.00E+00 WATTS
SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(2)/Is = 1.000E+01
INPUT RESISTANCE AT Is = 1.000E+01
OUTPUT RESISTANCE AT V(2) = 1.000E+01
戴维南等效电路是  $V_{Th} = V_2 = 13V$ ,  $R_{Th} = 10\Omega$ 。

```

- 15.6** 对图 15-27(a) 中的电路进行交流分析, 求出当频率以步长为 10 从 100 Hz 到 10 kHz 变化时,  $V_2$  的复数值。

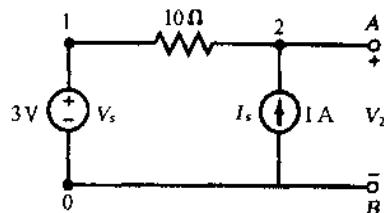


图 15-26

解 我们在网络表中加入一条.AC 语句用于扫描频率,用.PRINT,.PLOT或.PROBE 命令中的任意一条求得 V(2).源文件是

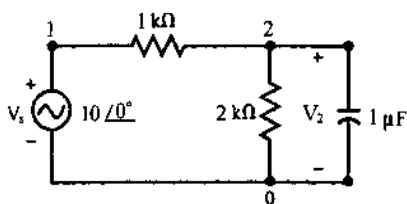
图 15-27(a)的交流分析

```

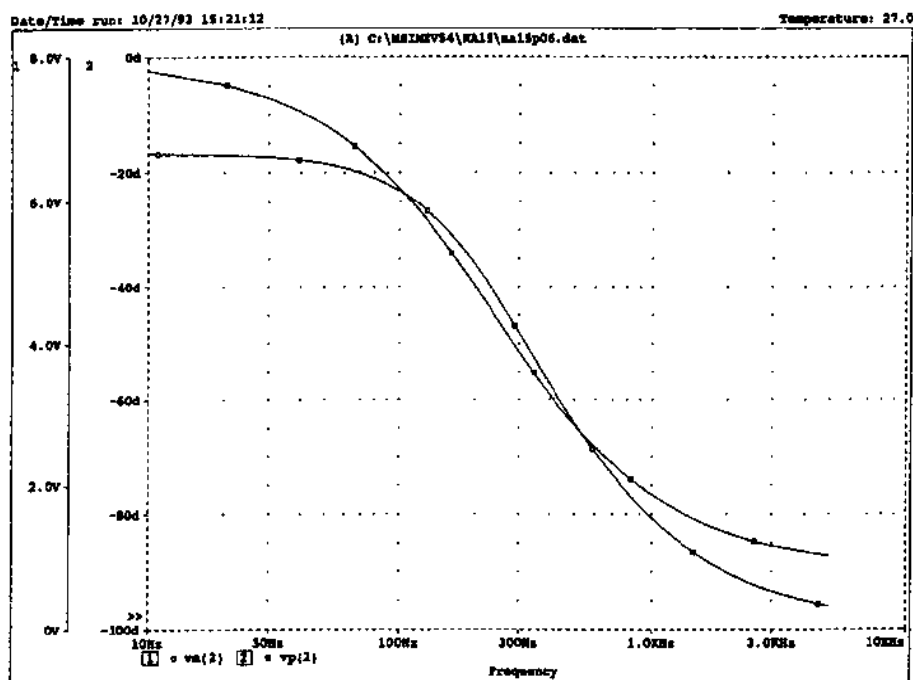
Vs      1      0      AC      10      0
R1      1      2      1k
R2      2      0      2k
C       2      0      1uF

.AC     LIN     10                      100  10000
.PRINT  AC      Vm(2)                    Vp(2)
.PLOT   AC      Vm(2))                   Vp(2)
.PROBE   Vm(2)                    Vp(2)
.END

```



(a)



(b)

图 15-27

输出文件的结果如下

#### AC ANALYSIS

FREQ	VM(2)	VP(2)
1.000E+02	6.149E+00	-2.273E+01
1.200E+03	1.301E+00	-7.875E+01
2.300E+03	6.883E-01	-8.407E+01
3.400E+03	4.670E-01	-8.598E+01
4.500E+03	3.532E-01	-8.696E+01

5.600E+03	2.839E-01	-8.756E+01
6.700E+03	2.374E-01	-8.796E+01
7.800E+03	2.039E-01	-8.825E+01
8.900E+03	1.788E-01	-8.846E+01
1.000E+04	1.591E-01	-8.863E+01

$V_2$  的幅值和相位进行高清晰度绘制,如图 15-27(b)。

- 15.7 对图 15-28 中的电路进行直流和交流分析,求出当频率以步长为 100 从 100 Hz 到 10 kHz 变化时,  $V_2$  的复数值。

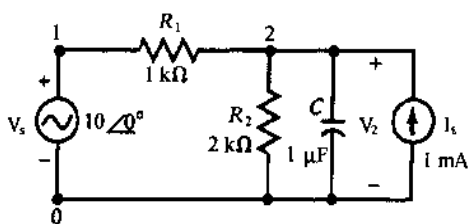


图 15-28

解 源文件是

图 15-28 的直流和交流分析

```

Vs      1 0      AC      10    0
Is      0 2      DC      1mA
R1      1 2      1k
R2      2 0      2k
C       2 0      1uF
.AC     LIN      100     10B  10000
.PROBE  Vm(2)    Vp(2)
.END

```

输出文件的结果如下

```

SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION
NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE
(1)       0.0000      (2)       .6667
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
Vs        6.667E-04
TOTAL POWER DISSIPATION -0.00E+00 WATTS

```

$V_2$  的交流成分曲线图与 15.6 题中所示的图 15-27(b) 相同。

- 15.8 绘制图 15-29(a) 电路中  $R = 2, 4, 6, 8, 10 \Omega$  时的谐振曲线。

解 我们用单变量参数  $R$  的电阻做电阻元件模型,并且以  $2\Omega$  为步长从  $2\Omega$  到  $10\Omega$  改变它的参数值。我们使用 .AC 命令以 100 Hz 为步长,从 500 Hz 到 3 kHz 扫描频率。源文件为:

图 15-29 实际线圈的并联谐振

```

I       0 2      AC      1m    0
R       0 1      RLOSS    1
L       1 2      10m
C       0 2      1u
.MODEL  RLOSS    RES(R=1)
.STEP   RES      RLOSS(R) 2    10    2
.AC     LIN      100  500  3000

```

```
.PROBE
.END
```

高清晰度谐振曲线如图 15-29(b)所示。

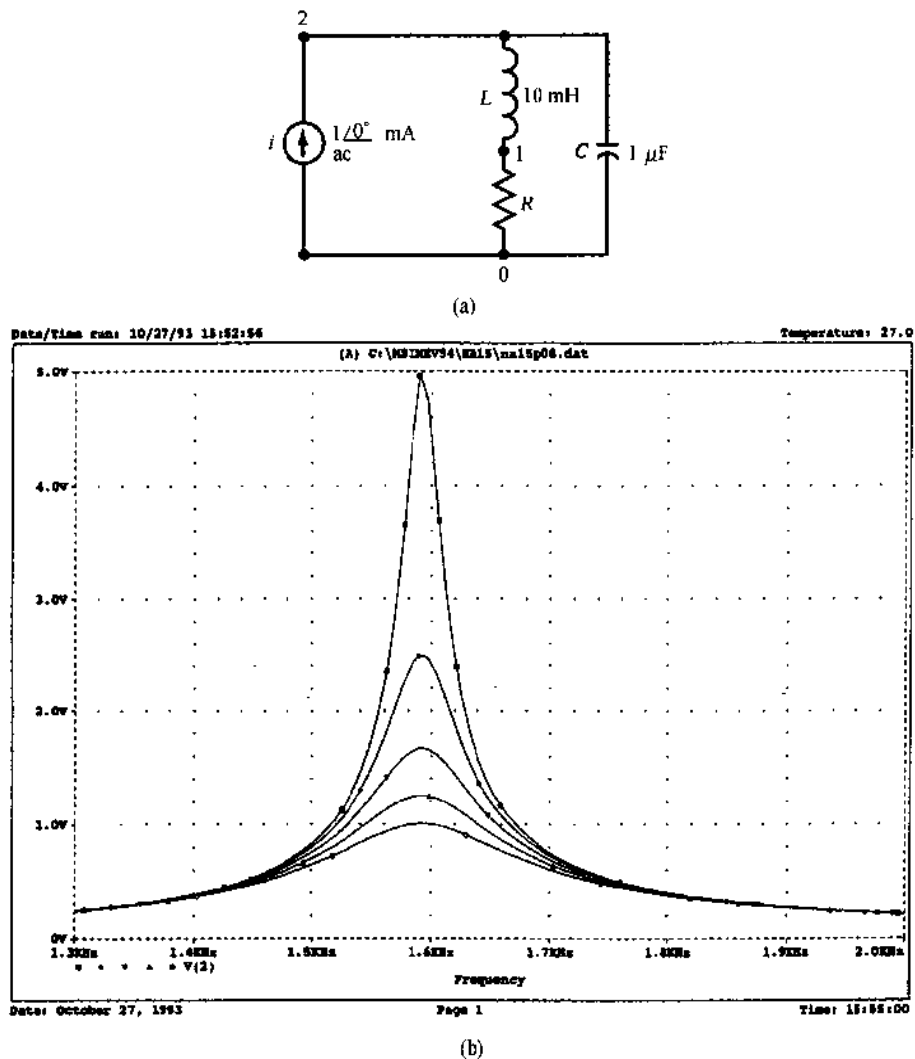


图 15-29

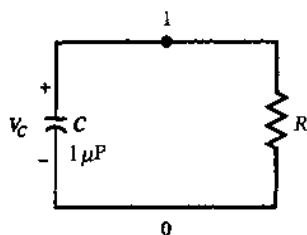
**15.9** 如图 15-30(a)所示的无源电路,  $R$  分别为  $100\Omega$ ,  $600\Omega$ ,  $1100\Omega$ ,  $1600\Omega$  与  $2100\Omega$ . 使用 `.TRAN` 和 `.PROBE` 命令绘制  $1\mu\text{F}$  电容上的电压  $V_C$  的图形. 电容上初始电压  $V_C(0) = 10\text{V}$ .

**解** 电阻  $R$  的值通过使用 `.MODEL` 和 `.STEP` 进行改变. 源文件是

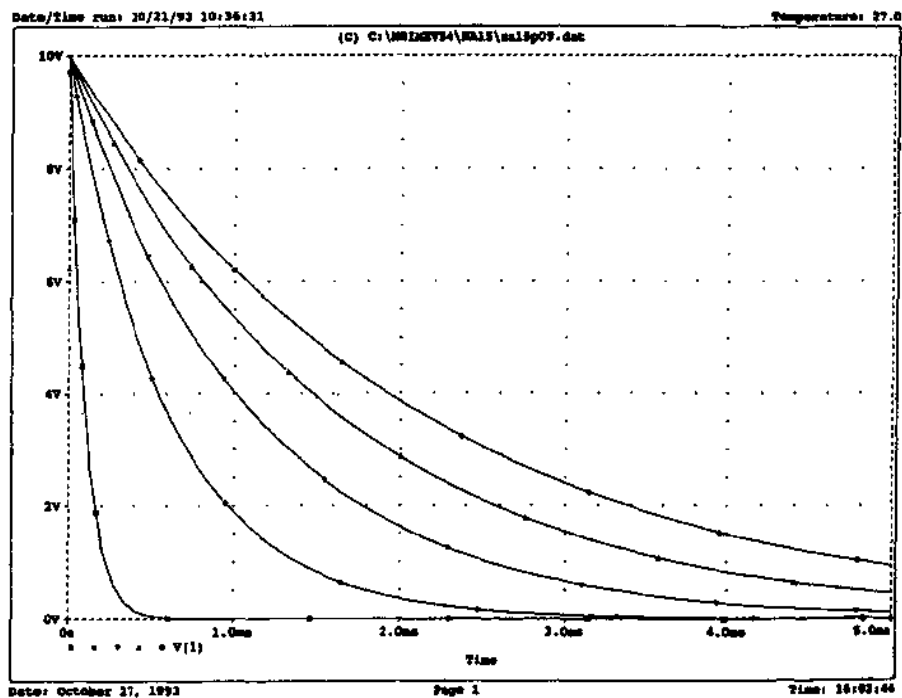
图 15-30(a)的 RC 电路的自然响应

```
R      0  1      Rshunt  1
C      1  0      1uF      IC=10
.MODEL Rshunt    RES(R=1)
.STEP  LIN      RES      Rshunt(R) 100 2.1k 500
.TRAN  1E-4      50E-4      UIC
.PLOT  TRAN      V(1)
.PROBE
.END
```

电压  $V_C$  的曲线图如图 15-30(b)所示。



(a)



(b)

图 15-30

15.10 绘制图 15-31(a)中对 1 安培阶跃电流源响应中的两节点间的电压图, 电阻分别为  $100\Omega$ ,  $600\Omega$ ,  $1100\Omega$ ,  $1600\Omega$  与  $2100\Omega$ .

解 源文件是

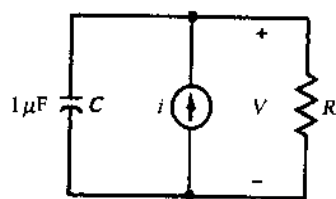
图 15-31(a)的 RC 电路的阶跃响应

```
1      0 1      1m
R      0 1      Rshunt  1
C      1 0      1uF
.MODEL Rshunt RES(R=1)
.STEP LIN RES Rshunt(R) 100 2.1k 500
.TRAN 1E-4 50E-4 UIC
.PLOT TRAN V(1)
.PROBE
.END
```

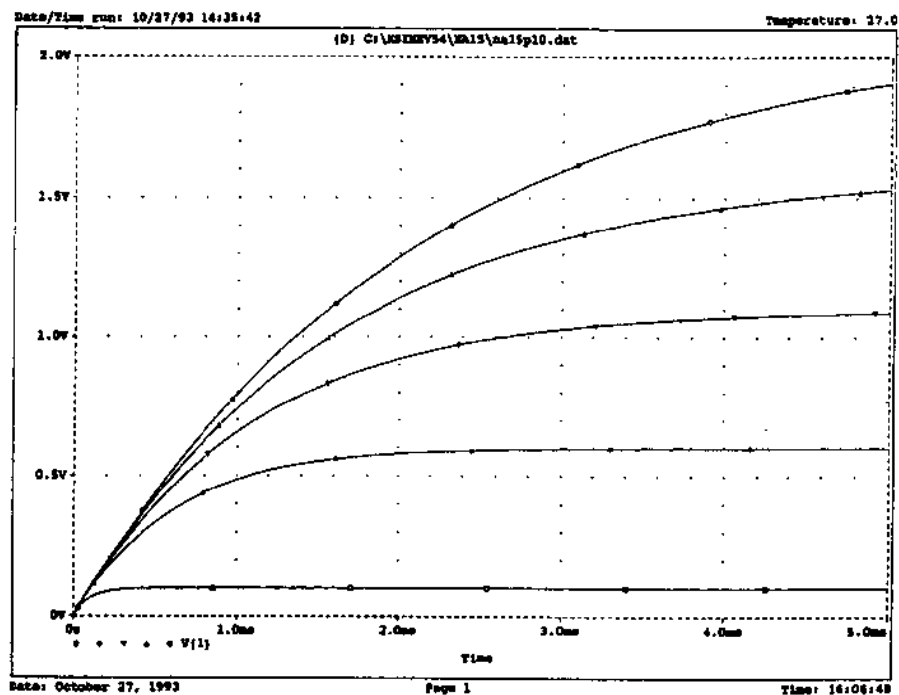
阶跃响应曲线图如图 15-31(b)所示。

15.11 求出图 15-32 中从 AB 端看的戴维南等效电路。

解 从直流分析中, 我们可以求出 AB 端的开路电压。我们还可以使用 .TF 求出 AB 端的输出电阻。源文件和输出文件如下



(a)



(b)

图 15-31

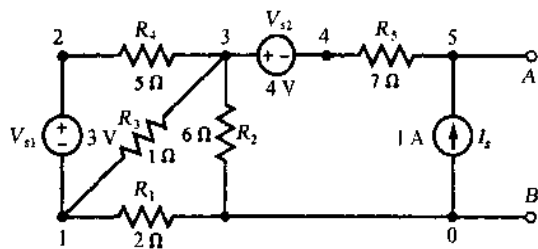


图 15-32

图 15-32 的解答及 AB 端点的戴维南等效电路

R1	0	1	2	
R2	0	3	6	
R3	1	3	1	
R4	2	3	5	
R5	4	5	7	
Vs1	2	1	DC	3
Vs2	3	4	DC	4
Is	0	5	DC	1
.TF	V(5)	Vs1		
.END				



输出文件结果如下

```

NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE
(1)    1.2453   (2)    4.2453   (3)    2.2642   (4) -1.7358
(5)    5.2642

```

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

```

NAME      CURRENT
Vs1       -3.962E-01
Vs2       -1.000E+00

```

TOTAL POWER DISSIPATION 5.19E+00 WATTS

V(5)/Vs1 = 1.132E-01

INPUT RESISTANCE AT Vs1 = 5.889E+00

OUTPUT RESISTANCE AT V(5) = 8.925E+00

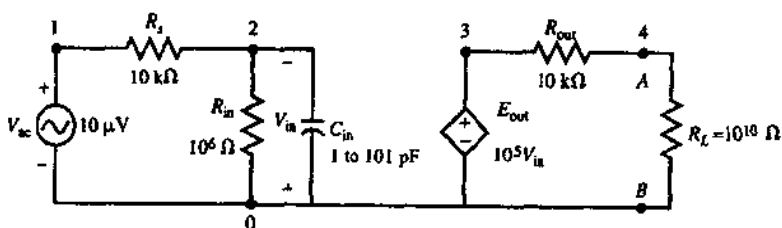
戴维南等效电路为  $V_{Th} = V_5 = 5.2642V$ ,  $R_{Th} = 8.925\Omega$ .

### 15.12 绘制图 15-33(a)开环放大器电路的 $V_{AB}/V_{ac}$ 频率响应。

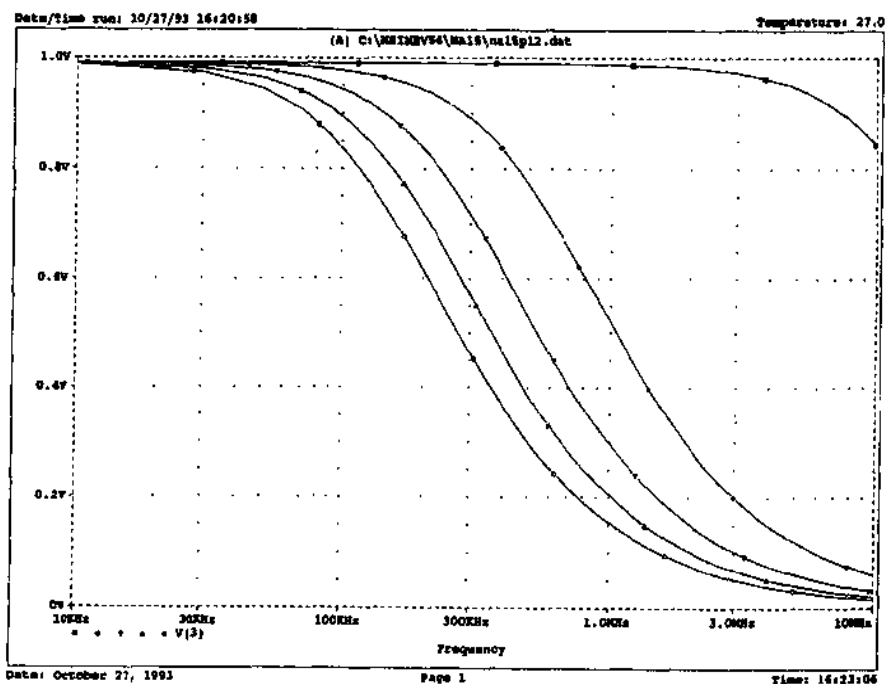
**解** 以下源文件从 100 Hz 到 10 MHz 变化的频率中选择 500 个点。

图 15-33 放大器的开环频率响应

Rs	1 2	10 k	
Rin	0 2	10E5	
Cin	0 2	short	1
Rout	3 4	10k	
R1	4 0	10E9	



(a)



(b)

图 15-33

```

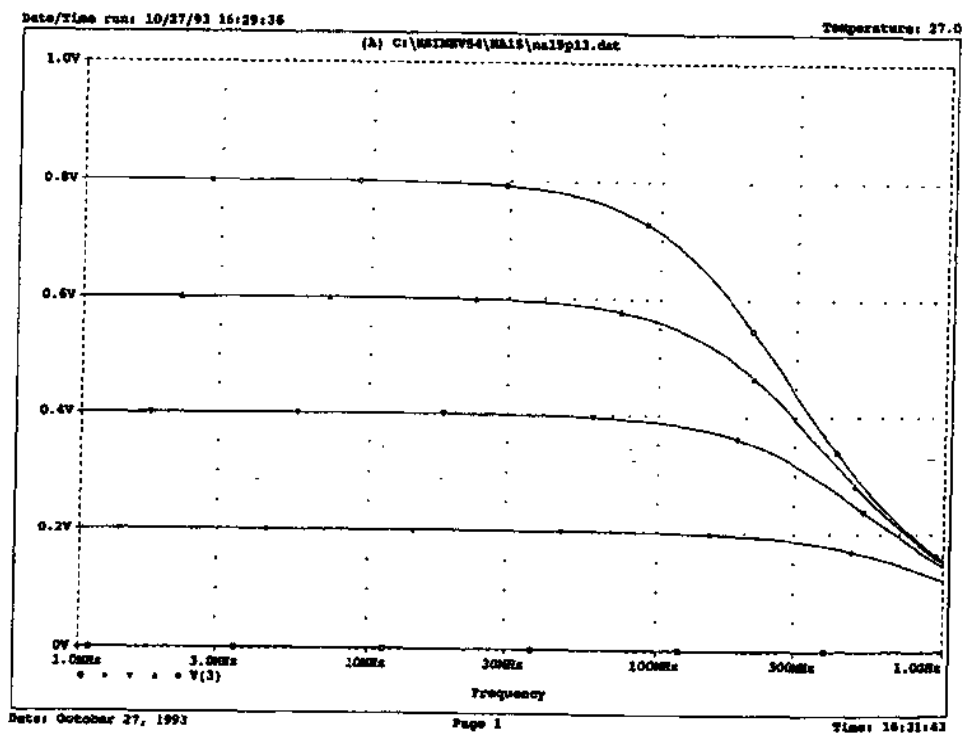
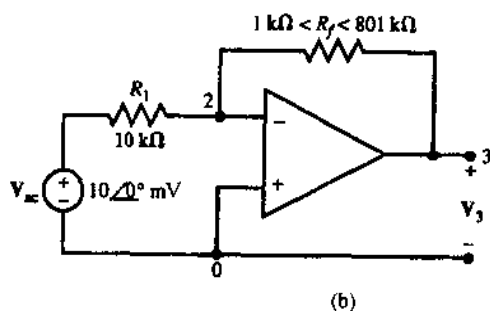
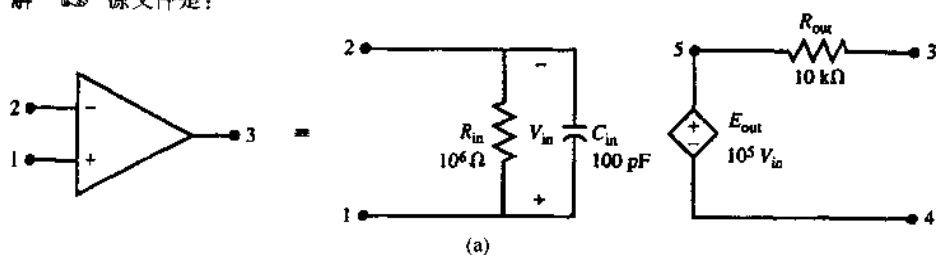
Eout      3  0      0  2      1E5
Vac       1  0      AC      10u    0
.MODEL    short    CAP(C=1)
.STEP     LIN      CAP      short(C) 1pF 101pF 25pF
.AC       LIN      500      100 10000k
.PROBE
.END

```

用 Probe 绘制频率从 10 kHz 到 10 MHz 变化的频率响应曲线示于图 15-33(b)中。

- 15.13 图 15-34(a)的运算放大器模型作为一个支路,并用它求出图 15-34(b)电路中  $V_3/V_{ac}$  的频率响应,频率从 1MHz 到 1GHz 变化。

解 源文件是:



(c)

图 15-34

图 15-34 放大器的闭环频率响应

```

.SUBCKT OPAMP 1234
* node 1 is the non-inverting input
* node 2 is the inverting input
* node 3 is the output
* node 4 is the output reference (negative end of dependent source)
* node 5 is the positive end of dependent source
Rin      1 2      10E5
Cin      1 2      100pF
Rout     3 5      10k
Eout     5 4      1 2      1E5
.ENDS
Vac      1 0      AC      10m      0
R1       1 2      10k
Rf       2 3      Rgain    1
X1       0 2 3 0   OPAMP
.MODEL   GAIN      RES(R=1)
.STEP    LIN      RES Rgain(R) 1k 801K 200k
.AC      LIN      500 1000k 1 000 000k
.PROBE
.END

```

图 15-34(c)绘制的是频率响应曲线.与图 15-33(a)开环电路比较,它少了直流增益和增加了频带宽度.

- 15.14** 参考图 15-22 的 RC 电路,选择初始脉冲高度,使电容两端的电压在 0.5 ms 内达到 10V.绘制  $0 < t < 2\text{ms}$  的  $V_c$  曲线并检验你的答案.

**解** 脉冲幅度  $A$  通过下式计算

$$A(1 - e^{-1/2}) = 10 \quad \text{由此得: } A = 25.415\text{V}$$

我们使用 PULSE 句型描述电压源.源文件是

```

Vs      1 0      PULSE(10 25.415 1.0E-6 1.0E-6 0.5m 3m)
R       1 2      1k
C       2 0      1u
.TRAN   1.0E-6 2.0E-3 UIC
.PROBE
.END

```

响应曲线形状与图 15-22(b)的曲线图相似.在  $0 < t < 0.5\text{ms}$  过渡期间,电压按指数规律向直流稳态值 25.415V 增长.然而,在  $t = 0.5\text{ms}$ ,电容电压达到 10V 时,电源中的电压也是 10V.电阻中的电流变为 0,电路到达稳态.

- 15.15** 绘制图 15-35(a)所示电路在  $R = 0.01\Omega, 4.01\Omega$  时电容两端的电压曲线.如  $i - t$  曲线图所示,电流源发出幅度为 1mA,持续时间至少为  $1256.64\mu\text{s}$  的方波脉冲.

**解** 把电阻模拟成具有参数  $R$  的一个单参数电阻元件,并且  $R$  从  $0.01\Omega$  到  $4.01\Omega$  以步长  $4\Omega$  改变.我们使用 .AC 命令扫描频率,使频率以 100 Hz 的步长从 500 Hz 到 3 kHz 变化.源文件是

```

Is      0 1      Pulse(0 1m 100u 0.01u 0.01u 1256.64u 5000u)
R       1 2      LOSS      1
C       1 0      2000n      IC=0
L       2 0      5m         IC=0
.MODEL  LOSS RES(R=1)
.STEP   RES LOSS(R) .01 4.01 4
.TRAN   10u      3500u      0 1u UIC

```

.PROBE

.END

结果如图 15-35(b)所示。

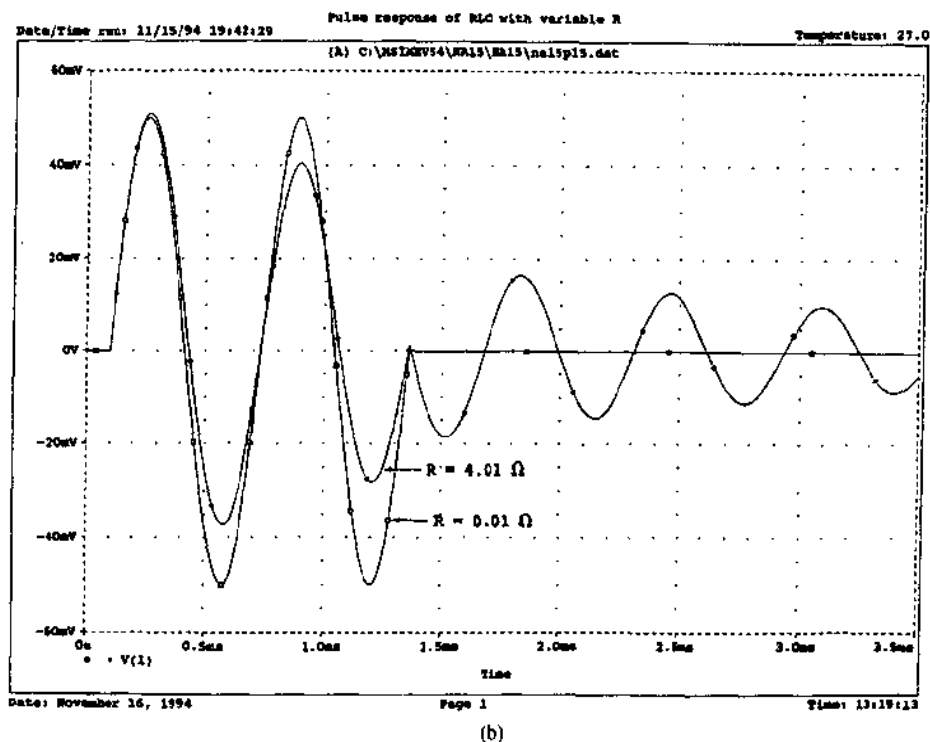
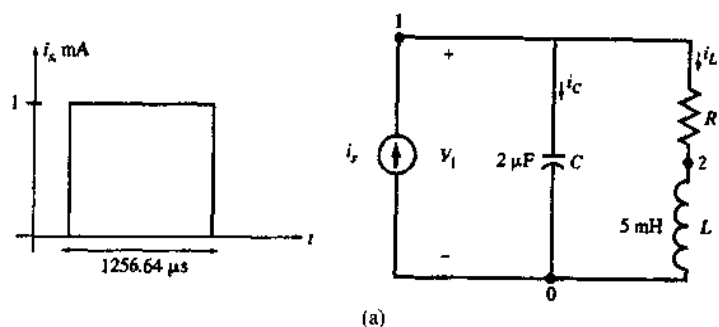
对于  $R = 0.01\Omega$  暂态响应几乎为 0。这是由于脉冲宽度是电路固有振荡周期的倍数。

图 15-35

## 补充习题

在以下习题中,使用 Pspice 重新解答指出的习题和例题。

- 15.16 解答例 5.9 (图 5-12).
- 15.17 解答例 5.11 (图 5-16).
- 15.18 解答例 5.14 (图 5-20).
- 15.19 解答例 5.15 (图 5-21).
- 15.20 解答例 5.20 (图 5-28)当  $x(t) = 1V$  时.
- 15.21 解答题 5.12 (图 5-37).
- 15.22 解答题 5.16 (图 5-39).
- 15.23 解答题 5.25 (图 5-48).
- 15.24 解答题 5.26 (图 5-49).
- 15.25 解答题 5.48 (图 5-55)当  $v_{S1} = v_{S2} = 1V$  时.
- 15.26 解答例 7.3.

- 15.27 解答例 7.6 (图 7-12).
- 15.28 解答例 7.7 [图 7-13(a)].
- 15.29 解答例 7.11 [图 7-17(a)].
- 15.30 解答题 8.27 (图 8-31).
- 15.31 解答题 9.11 (图 9-20).
- 15.32 解答题 9.18 (图 9-28).
- 15.33 解答题 9.19 (图 9-29).
- 15.34 解答例 11.5 [图 11-15(a)].
- 15.35 解答例 11.6 [图 11-16(a)].
- 15.36 解答例 11.7 (图 11-17).
- 15.37 解答题 12.7.
- 15.38 解答题 12.14 (图 12-40).
- 15.39 解答题 12.16 (图 12-43).
- 15.40 解答题 13.28 (图 13-31)当  $s=j$  时.
- 15.41 解答题 13.31 (图 13-33).
- 15.42 解答题 14.8 (图 14-24).
- 15.43 解答题 14.12 (图 14-28).
- 15.44 解答题 14.13 (图 14-29).
- 15.45 解答题 14.20 (图 14-35).
- 15.46 解答题 14.21 (图 14-36)当  $s=j$  时.

## 第 16 章 拉普拉斯变换方法

### 16.1 引言

RIC 电路中的响应  $y(t)$  和激励  $x(t)$  之间的关系是一种线性微分方程的形式

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + \cdots + a_j y^{(j)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ = b_m x^{(m)} + \cdots + b_i x^{(i)} + \cdots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \end{aligned} \quad (1)$$

此处,  $y^{(j)}$  和  $x^{(i)}$  分别是  $y(t)$  和  $x(t)$  的第  $j$  次、第  $i$  次时间导数. 如果电路元件的值是常数, 则微分方程相应的系数  $a_j$  和  $b_i$  也是常数. 在第七章和第八章我们用求固有响应和强迫响应的方法对微分方程进行求解. 现在我们用复数指数函数  $x(t) = X e^{st}$  来扩展复数频率  $s$  域的求解方法.

在这一章介绍的拉普拉斯变换方法可以被看作是对数学公式在  $s$  域概念的延伸. 它不仅包括指数激励而且还有许多其他形式的激励. 通过拉普拉斯变换我们把大量激励表示为复数指数的无穷集合, 并使用叠加原理推导出总响应.

### 16.2 拉普拉斯变换

设  $f(t)$  为一个时间函数,  $t \leq 0$  时值为 0,  $t > 0$  时它(在一些轻微条件下)可以任意定义. 那么,  $f(t)$  直接进行拉普拉斯变换表示为  $\mathcal{L}[f(t)]$ , 它被定义为

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

因此,  $\mathcal{L}[\ ]$  运算把时域  $f(t)$  转换为复频域  $F(s)$ , 或简称  $s$  域, 在这里  $s$  是复数变量  $\sigma + j\omega$ . 当它出现时, 很难证明它所表示的积分, 拉普拉斯变换方法的应用利用了函数表, 表中覆盖了在基本电路理论中可能遇到的所有函数.

转换具有惟一性, 也就是说, 如果  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  有相同的  $s$  域映射  $F(s)$ , 则  $f_1(t) = f_2(t)$ . 这就允许在另一个方向返回, 从  $s$  域回到时域, 这个过程叫做反拉普拉斯变换,  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ . 反拉普拉斯变换可以用一个积分表示, 复数反变换积分为

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (3)$$

(3) 式中积分的路径是平行于  $j\omega$  - 轴的一条直线,  $F(s)$  中的所有极点都位于这条线的左边.

应该注意, 对于一个物理量采取直接拉普拉斯变换, 会在结果中引入一个额外的时间单位. 例如, 若  $i(t)$  是以 A 为单位的电流, 那么  $I(s)$  的单位是 A·s (或 C). 因为额外单位  $s$  在进行拉普拉斯反变换时将被消除, 我们通常省略在  $s$  域中的引用单位, 还称  $I(s)$  为“电流”, 并用一个箭头表示.

### 16.3 可选择的拉普拉斯变换

单位阶跃函数的拉普拉斯变换很容易得到

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} (1) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

由拉普拉斯变换的线性性质可知, 时域中的  $v(t) = V u(t)$  映射到  $s$  域则为:  $V(s) = V/s$ .

第七章暂态部分经常出现的指数延迟函数是一个容易变换的时间函数.

$$\mathcal{L}[A e^{-\alpha t}] = \int_0^{\infty} A e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{-A}{\alpha + s} [e^{-(\alpha + s)t}]_0^{\infty} = \frac{A}{s + \alpha}$$

反变换为

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+\alpha}\right] = Ae^{-\alpha t}$$

正弦函数的变换也非常容易得到

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \int_0^{\infty} (\sin\omega t)e^{-st}dt = \left[\frac{-s(\sin\omega t)e^{-st} - e^{-st}\omega\cos\omega t}{s^2 + \omega^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

得到导数  $df(t)/dt$  的拉普拉斯变换非常有用

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$$

用部分积分

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= [e^{-st}f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt \\ &= -f(0^+) + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = -f(0^+) + sF(s)\end{aligned}$$

在表 16-1 中给出了一部分变换公式,包括上面讲过的那些变换.表的最后 5 行给出了拉普拉斯变换的普遍特性.

**例 16.1** 考虑一个  $RL$  串联电路,  $R=5\Omega$ ,  $L=2.5\text{mH}$ . 在  $t=0$  时刻,电路中的电流为  $2\text{A}$ ,施加的电压为  $50\text{V}$ . 时域电路示于图 16-1 中.

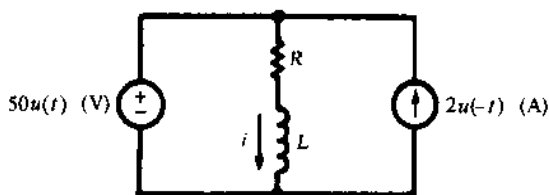


图 16-1

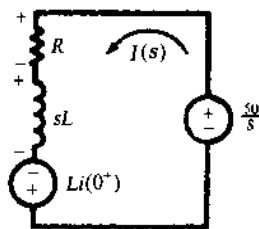


图 16-2

基尔霍夫电压定律应用于  $t>0$  时的电路,产生熟悉的微分方程式(i). 这个方程式可变换成  $s$ -域方程式(ii). 当已知电压  $v=50u(t)$  变换为  $50/s$  时,未知电流  $i(t)$  变为  $I(s)$ .  $di/dt$  变换为  $-i(0^+) + sI(s)$ , 其中  $i(0^+)$  为  $2\text{A}$ . 通过方程式(iii)可以求解  $I(s)$ , 用 16.6 节的方法解答为(iv)的形式. 表 16-1 中的第 1, 3 和 16 行用于求解  $I(s)$  的拉普拉斯反变换, 获得  $i(t)$ .

一个电路可以绘制在  $s$ -域中, 如图 16-2 所示. 在电路中一个初始电流好像是一个电压源,  $Li(0^+)$ . 在(ii)式中  $s$ -域电流确立了电压项  $RI(s)$  和  $sLI(s)$ , 如此一个相量电流  $I$  和一个阻抗  $Z$  形成一个相量电压  $IZ$ .

时域	$s$ -域
(i) $Ri + L \frac{di}{dt} = v$	(ii) $RI(s) + L[-i(0^+) + sI(s)] = V(s)$
↓	↓
(分类方法)	(iii) $5I(s) + (2.5 \times 10^{-3})[-2 + sI(s)] = \frac{50}{s}$
↓	↓
	(iv) $I(s) = \frac{10}{s} + \frac{-8}{s+2000}$
↓	
(vii) $i(t) = 10 - 8e^{-2000t}(\text{A})$	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;">                     (v) <math>10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 10</math>                      (vi) <math>(-8)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2000}\right] = -8e^{-2000t}</math> </div> <div style="width: 5%; text-align: center;">←</div> <div style="width: 45%;">(v) <math>\left\{ \begin{aligned} 10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] &amp;= 10 \\ (-8)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2000}\right] &amp;= -8e^{-2000t} \end{aligned} \right.</math></div> </div>

表 16-1 拉普拉斯变换公式

	$F(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	$t$	$\frac{1}{s^2}$
3	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
4	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
8	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
9	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
11	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
12	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
13	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^+)$
14	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
15	$f(t - t_1)$	$e^{-st_1} F(s)$
16	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
17	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$

#### 16.4 积分的收敛性

对于存在的拉普拉斯变换, 积分式(2)应该是收敛的. 这就将变量  $S = \sigma + j\omega$  限定在复平面的某一区域, 这一区域叫做收敛域. 例如,  $x(t) = e^{-at}u(t)$  的变换为  $1/(s+a)$ , 规定  $\operatorname{Re}[s] > -a$ , 这就定义了它的收敛域.

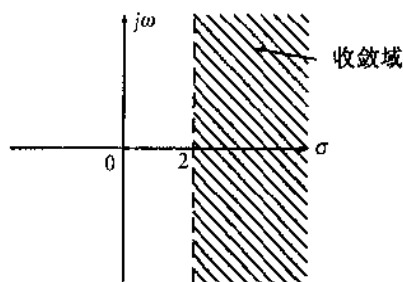


图 16-3

**例 16.2** 求出  $x(t) = 3e^{2t}u(t)$  的拉普拉斯变换并写出收敛域.

$$X(s) = \int_0^{\infty} 3e^{2t}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 3e^{-(s-2)t} dt$$

$$= \frac{3}{s-2} [e^{-(s-2)t}]_0^{\infty} = \frac{3}{s-2}, \quad \operatorname{Re}[s] > 2$$

$X(s)$  的收敛域是  $\sigma > 2$  的右半平面, 如图 16-3 所示的阴影部分.



### 16.5 初值和终值定理

取导数  $df(t)/dt$  的直接拉普拉斯变换的极限  $s \rightarrow \infty$  (对于所有实数值)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)]$$

但是, 当  $s \rightarrow \infty$  时, 被积函数  $e^{-st}$  趋近于 0. 因此

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)] = 0.$$

由于  $f(0^+)$  是一个常量, 我们可以写成

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$$

这就是初值定理.

**例 16.3** 在例 16.1 中,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( 10 - \frac{8s}{s + 2000} \right) = 10 - 8 = 2$$

它确实初始电流,  $i(0^+) = 2A$ .

终值定理也是由导数的直接拉普拉斯变换发展而来的, 但现在极限采用  $s \rightarrow 0$  (对于所有实数值)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^+)]$$

但是

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df(t) = f(\infty) - f(0^+)$$

其中  $f(0^+)$  是一个常量. 因此

$$f(\infty) - f(0^+) = -f(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

或

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

这就是终值定理. 只有当  $sF(s)$  的所有极点都有负实数时, 这条定理才适用. 它不包括像  $e^t$  和  $\cos t$  这样的函数变换, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 它们将变得无穷大或无法确定.

### 16.6 部分分式展开式

在电路分析中一个问题的未知数可以是电流  $i(t)$  或电压  $v(t)$ . 在  $s$ -域中, 它就是  $I(s)$  或  $V(s)$ ; 对于本书里所讲到的电路将被表示为有理函数的形式

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

这里, 多项式  $Q(s)$  的阶数比  $P(s)$  阶数高. 此外, 对于  $s$  的实数值来说  $R(s)$  是实数, 所以任何一个  $R(s)$  的非实数极点, 也就是  $Q(s) = 0$  的非实数根一定为共轭复数对.

在部分分式展开式中, 函数  $R(s)$  可以拆分成几个简单有理函数的和, 就是它的所谓的主要部分,  $R(s)$  的每个极点都对一个主要部分起作用.

第一种情况:  $s = a$  是一个简单极点. 当  $s = a$  是  $Q(s) = 0$  的一个非重复的根时,  $R(s)$  相应的主要部分为

$$\frac{A}{s - a}, \text{ 此处: } A = \lim_{s \rightarrow a} [(s - a)R(s)]$$

如果  $a$  是实数, 结果就是  $A$ ; 如果  $a$  是复数, 那么  $a^*$  是一个简单极点, 它的主要部分的分子是  $A^*$ . 要注意如果  $a = 0$ ,  $A$  就是  $r(t)$  的终值.

第二种情况:  $s = b$  是一个双重极点. 当  $s = b$  是  $Q(s) = 0$  的一个双重根时,  $R(s)$  相应的主要部分是:

$$\frac{B_1}{s-b} + \frac{B_2}{(s-b)^2}$$

常数  $B_2$  和  $B_1$  可以通过以下公式求出

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow b} [(s-b)^2 R(s)]$$

和

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow b} \left\{ (s-b) \left[ R(s) - \frac{B_2}{(s-b)^2} \right] \right\}$$

$B_1$  可以为 0. 与第一种情况相似, 如果  $b$  是实数,  $B_1$  和  $B_2$  就是实数, 并且对于双重极点  $b^*$ , 这些常量是  $b$  的共轭根.

更高阶极点的主要部分可以模仿第二种情况的方法得到; 我们可以假设,  $R(s)$  没有这样的极点. 一旦  $R(s)$  的部分展开式已知, 可以利用表 16-1 转换每一项, 得到时间函数  $r(t)$ .

**例 16.4** 求出时域电流  $i(t)$ , 它的拉普拉斯变换式是

$$I(s) = \frac{s-10}{s^4 + s^2},$$

$$\text{因式分解分母, } I(s) = \frac{s-10}{s^2(s-j)(s+j)}.$$

我们可以看出  $I(s)$  的极点是  $s=0$  (双重极点) 和  $s=\pm j$  (单极点).

在  $s=0$  时, 其主要部分为

$$\frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{10}{s^2}$$

由于

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s-10}{(s-j)(s+j)} \right] = -10$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[ \frac{s-10}{s^2(s^2+1)} + \frac{10}{s^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{10s+1}{s^2+1} \right) = 1$$

在  $s=+j$  时, 其主要部分为

$$\frac{A}{s-j} = -\frac{0.5+j5}{s-j}$$

由于

$$A = \lim_{s \rightarrow j} \left[ \frac{s-10}{s^2(s+j)} \right] = -(0.5+j5)$$

当  $s=-j$  时, 其主要部分是:  $-\frac{0.5-j5}{s+j}$

因此,  $I(s)$  的部分分式展开式为

$$I(s) = \frac{1}{s} - 10 \frac{1}{s^2} - (0.5+j5) \frac{1}{s-j} - (0.5-j5) \frac{1}{s+j}$$

使用表 16-1 给出的公式, 一项一项进行转换得到

$$i(t) = 1 - 10t - (0.5+j5)e^{jt} - (0.5-j5)e^{-jt} = 1 - 10t - (\cos t - 10 \sin t)$$

### 海维赛德(Heaviside)展开公式

如果  $R(s)$  所有的极点都是简单极点, 部分分式展开及逐项转换可以单步完成

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} \quad (4)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  是极点,  $Q'(a_k)$  就是  $dQ(s)/ds$  在  $s=a_k$  时的值.

## 16.7 s 域中的电路

在第 8 章我们介绍并利用了一般化的阻抗、导纳和作为复频率  $s$  函数的传递函数概念. 在

这一节中,我们将复频率的使用扩展到对  $RLC$  电路的变换,包括电源和初始状态,从时域到  $s$  域的转换.



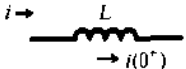
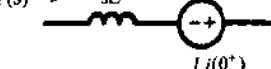
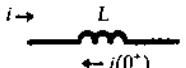
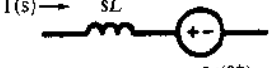
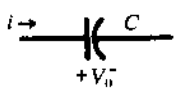
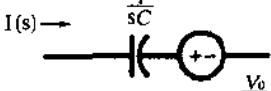
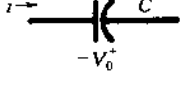
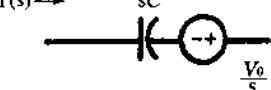
表 16-2 展示了构造一个给定的时域电路在  $s$  域所需元件的映射.表的最开始 3 行实际上就是在例 16.1 中的结果.就电容而言,当  $t > 0$  时,有

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

所以,从表 16-1 可以得到

$$V_c(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{I(s)}{Cs}$$

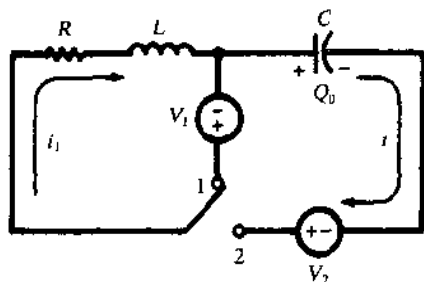
表 16-2

时域	$s$ 域	$s$ 域电压项
		$RI(s)$
		$sLI(s) + Li(0^+)$
		$sLI(s) + Li(0^+)$
		$\frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$
		$\frac{I(s)}{sC} - \frac{V_0}{s}$

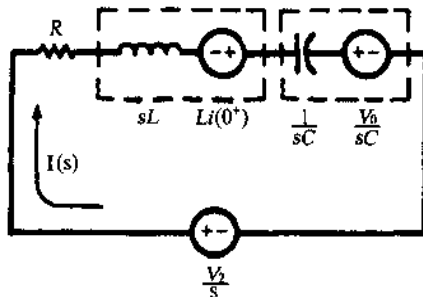
**例 16.5** 在图 16-4(a)所示电路中,当开关在位置 1 时,有一个初始电流  $i_1$ .在  $t = 0$  时刻,开关移到位置 2,接入一个初始电荷为  $Q_0$  的电容器和一个恒压源  $V_2$ .

$s$  域电路如图 16-4(b)所示, $s$  域方程式为

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{sC} = \frac{V_2}{s}$$



(a)



(b)

图 16-4

其中,  $V_0 = Q_0/C$ ,  $i(0^+) = i_1 = V_1/R$

### 习题及解答

16.1 求出  $e^{-at}\cos\omega t$  的拉普拉斯变换,  $a$  是一个常数.

解 对给出的函数应用定义方程式  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ , 我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] &= \int_0^\infty \cos\omega t e^{-(s+a)t}dt = \left[ \frac{-(s+a)\cos\omega t e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t}\omega\sin\omega t}{(s+a)^2 + \omega^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

16.2 如果  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 证明  $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$ . 将这个结果应用于题 16.1 中.

解 根据定义,  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$ . 则

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty [e^{-at}f(t)]e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a) \quad (5)$$

将(5)应用于表 16-1 的第 6 行得到

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

与题 16.1 所求结果相同.

16.3 求出  $f(t) = 1 - e^{-at}$  的拉普拉斯变换,  $a$  是一个常数.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1 - e^{-at}] &= \int_0^\infty (1 - e^{-at})e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt \\ &= \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} + \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}\end{aligned}$$

另一种方法

$$\mathcal{L}\left[a\int_0^t e^{-a\tau}d\tau\right] = a \frac{1/(s+a)}{s} = \frac{a}{s(s+a)}$$

16.4 求:  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right]$

解 使用部分分式法, 则有

$$\frac{1}{s(s^2 - a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

系数为

$$A = \frac{1}{s^2 + a^2} \Big|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \quad B = \frac{1}{s(s-a)} \Big|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2} \quad C = \frac{1}{s(s+a)} \Big|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\text{因此, } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s+a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s-a}\right]$$

相应的时间函数在表 16-1 中可以找到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}e^{-at} + \frac{1}{2a^2}e^{at} \\ &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{a^2}(\cosh at - 1)\end{aligned}$$

另一种方法

根据表 16-1 的第 11 行和第 14 行, 可得出:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/(s^2 - a^2)}{s}\right] = \int_0^t \frac{\sinh a\tau}{a} d\tau = \left[\frac{\cosh a\tau}{a^2}\right]_0^t = \frac{1}{a^2}(\cosh at - 1)$$

16.5 求:  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2 + 4s + 4)}\right]$

解 使用部分分式法, 我们得到

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$

$$\text{则 } A = \frac{s+1}{(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4} \quad B_2 = \frac{s+1}{s} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$B_1 = (s+2) \frac{s+1}{2s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{因此, } \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{4}}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\frac{1}{4}}{s+2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} \right]$$

相应的时间函数可以在表 16-1 中找到.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t e^{-2t}$$

**16.6** 在图 16-5 所示的 RC 串联电路中, 电容初始电荷为 2.5 mC. 在  $t=0$  时刻, 开关闭合, 接入 100 V 的恒压源. 使用拉普拉斯变换方法求出电流.

**解** 当开关闭合后, 给定电路的时域方程式为

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \left[ Q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = V$$

或

$$10i(t) + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \left[ (-2.5 \times 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = V \quad (6)$$

$Q_0$  与电源在电容器上存放的电荷极性相反. 采用式(6)的拉普拉斯变换, 我们得到 s-域方程式为

$$10I(s) - \frac{2.5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-6}s} + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6}s} = \frac{100}{s}$$

或

$$I(s) = \frac{15}{s + (2 \times 10^3)} \quad (7)$$

取(7)式的拉普拉斯反变换可以得到时间函数为

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{15}{s + (2 \times 10^3)} \right] = 15e^{-2 \times 10^3 t} (\text{A}) \quad (8)$$

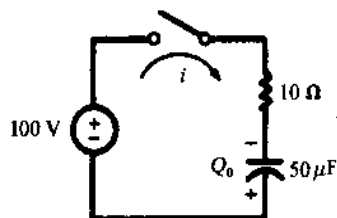


图 16-5

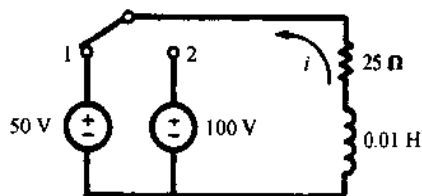


图 16-6

**16.7** 在图 16-6 所示的 RL 电路中, 开关长期处于位置 1 使电路达到稳态情况. 当  $t=0$  时刻, 开关转到位置 2, 求产生的电流.

**解** 假设电流方向如图所示. 那么初始电流是  $i_0 = -50/25 = -2\text{A}$ .

时域方程式为

$$25i + 0.01 \frac{di}{dt} = 100 \quad (9)$$

对(9)式进行拉普拉斯变换得

$$25I(s) + 0.01sI(s) - 0.01i(0^+) = 100/s \quad (10)$$

代入  $i(0^+)$  的值

$$25I(s) + 0.01sI(s) + 0.01(2) = 100/s \quad (11)$$

有

$$I(s) = \frac{100}{s(0.01s + 25)} - \frac{0.02}{0.01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s + 2500} \quad (12)$$

采用部分分式法

$$\frac{10^4}{s(s+2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2500} \quad (13)$$

$$A = \frac{10^4}{s+2500} \Big|_{s=0} = 4 \quad B = \frac{10^4}{s} \Big|_{s=-2500} = -4$$

得出

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s+2500} \quad (14)$$

对(14)式进行拉普拉斯反变换, 得到  $i = 4 - 6e^{-2500t}$  (A).

- 16.8 在图 16-7 所示的 RL 串联电路中, 当开关在  $t=0$  时刻闭合时, 施加一个指数电压  $v = 50e^{-100t}$  (V), 求产生的电流.

解 所给电路的时域方程式为

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v \quad (15)$$

(15)式在 s-域中的形式为

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s) \quad (16)$$

代入电路常数和电压变换量,  $V(s) = 50/(s+100)$ , 从式(16)可以得出

$$10I(s) + s(0.2)I(s) = \frac{50}{s+100} \quad \text{或} \quad I(s) = \frac{250}{(s+100)(s+50)} \quad (17)$$

根据 Heaviside 展开公式, 得出

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{n=1,2} \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} e^{a_n t}$$

此处,  $P(s) = 250$ ,  $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$ ,  $Q'(s) = 2s + 150$ ,  $a_1 = -100$ ,  $a_2 = -50$ . 那么:

$$i = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{250}{-50} e^{-100t} + \frac{250}{50} e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} \text{ (A)}$$

- 16.9 图 16-8 所示 RC 串联电路有一个正弦电压源  $v = 180 \sin(2000t + \phi)$  (V), 电容器有一个初始电荷  $Q_0 = 1.25 \text{ mC}$ , 极性如下图所示. 当  $\phi = 90^\circ$  时开关闭合, 确定电路中的电流.

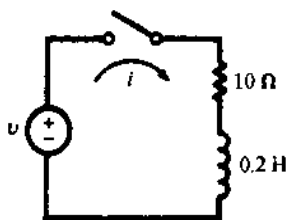


图 16-7

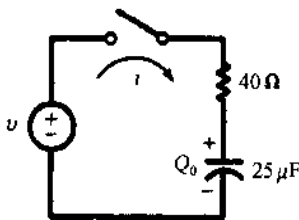


图 16-8

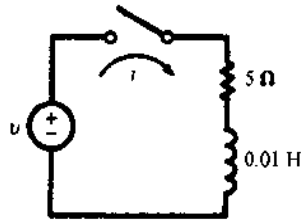


图 16-9

解 电路的时域方程式为

$$40i(t) + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \left[ (1.25 \times 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = 180 \cos 2000t \quad (18)$$

对(18)式进行拉普拉斯变换得到 s-域方程

$$40I(s) + \frac{1.25 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-6}s} + \frac{4 \times 10^4}{s} I(s) = \frac{180s}{s^2 + 4 \times 10^6} \quad (19)$$

或

$$I(s) = \frac{4.5s^2}{(s^2 + 4 \times 10^6)(s + 10^3)} - \frac{1.25}{s + 10^3} \quad (20)$$

对(20)式右边的第一项使用 Heaviside 展开公式, 有  $P(s) = 4.5s^2$ ,  $Q(s) = s^3 + 10^3s^2 + 4 \times 10^9$ ,  $Q'(s) = 3s^2 + 2 \times 10^3s + 4 \times 10^6$ ,  $a_1 = -j2 \times 10^3$ ,  $a_2 = j2 \times 10^3$ ,  $a_3 = -10^3$ . 则:

$$i = \frac{P(-j2 \times 10^3)}{Q'(-j2 \times 10^3)} e^{-j2 \times 10^3 t} + \frac{P(j2 \times 10^3)}{Q'(j2 \times 10^3)} e^{j2 \times 10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)} e^{-10^3 t} - 1.25e^{-10^3 t}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1.8 - j0.9)e^{-j2 \times 10^3 t} + (1.8 + j0.9)e^{j2 \times 10^3 t} - 0.35e^{-10^3 t} \\
 &= -1.8\sin 2000t + 3.6\cos 2000t - 0.35e^{-10^3 t} \\
 &= 4.02\sin(2000t + 116.6^\circ) - 0.35e^{-10^3 t} \quad (\text{A})
 \end{aligned} \quad (21)$$

在  $t=0$  时, 电流由瞬时电压决定. 瞬时电压由电源电压和带电荷的电容电压组成, 它们被电阻分压. 因此:

$$i_0 = \left( 180\sin 90^\circ - \frac{1.25 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-6}} \right) / 40 = 3.25 \text{ A}$$

如果我们在(21)式中令  $t=0$ , 得到的结果是相同的.

- 16.10** 在图 16-9 所示 RL 串联电路中, 电源  $v = 100\sin(500t + \phi)$  (V). 如果  $\phi=0$  时开关闭合, 确定产生的电流.

**解** RL 串联电路  $s$ -域方程式为

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s) \quad (22)$$

$\phi=0$  时电源的拉氏变换为

$$V(s) = \frac{(100)(500)}{s^2 + (500)^2}$$

由于电感中没有初始电流,  $Li(0^+) = 0$ . 将电路的常数代入式(22)得

$$5I(s) + 0.01sI(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 \times 10^4} \quad \text{或} \quad I(s) = \frac{5 \times 10^6}{(s^2 + 25 \times 10^4)(s + 500)} \quad (23)$$

用部分分式法展开(23)

$$I(s) = 5 \left( \frac{-1+j}{s+j500} \right) + 5 \left( \frac{-1-j}{s-j500} \right) + \frac{10}{s+500} \quad (24)$$

对(24)式进行拉普拉斯反变换得

$$i = 10\sin 500t - 10\cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14.14\sin(500t - 45^\circ) \quad (\text{A})$$

- 16.11** 重做题 16.10, 电压函数为

$$v = 100e^{j500t} \quad (\text{V}) \quad (25)$$

**解**  $V(s) = 100/(s - j500)$ ,  $s$ -域方程式为

$$5I(s) + 0.01sI(s) = \frac{100}{s - j500} \quad \text{或} \quad I(s) = \frac{10^4}{(s - j500)(s + 500)}$$

使用部分分式法得出

$$I(s) = \frac{10 - j10}{s - j500} + \frac{-10 + j10}{s + 500}$$

进行拉普拉斯反变换后得到

$$\begin{aligned}
 i &= (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{500t} \\
 &= 14.14e^{j(500t - \pi/4)} + (-10 - j10)e^{500t} \quad (\text{A})
 \end{aligned} \quad (26)$$

实际电压是式(25)的虚部; 因此, 实际电流是式(26)的虚部.

$$i = 14.14\sin(500t - \pi/4) + 10e^{500t} \quad (\text{A})$$

- 16.12** 在图 16-10 所示的 RLC 串联电路中, 电容器没有初始电荷. 如果开关在  $t=0$  时闭合, 确定产生的电流.

**解** 所给电路的时域方程式为

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = V \quad (27)$$

由于  $i(0^+) = 0$ , 对(27)式的拉普拉斯变换

$$RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s) = \frac{V}{s} \quad (28)$$

或

$$2I(s) + 1sI(s) + \frac{1}{0.5s}I(s) = \frac{50}{s} \quad (29)$$

因此

$$I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)} \quad (30)$$

对式(30)进行分式展开为

$$I(s) = \frac{j25}{(s+1+j)} - \frac{j25}{(s+1-j)} \quad (31)$$

对(31)式进行拉普拉斯反变换得出

$$i = j25[e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}] = 50e^{-t}\sin t \quad (\text{A})$$

**16.13** 在图 16-11 中有两个网孔的网络中, 选择两个回路电流如图所示. 用矩阵形式写出 s-域方程式, 并构造出相应的电路.

**解** 写出时域方程组为

$$5i_1 + \frac{1}{2} \left[ Q_0 + \int_0^t i_1(\tau) d\tau \right] + 5i_2 = v \quad \text{和} \quad 10i_2 + 2 \frac{di_2}{dt} + 5i_1 = v \quad (32)$$

对(32)式进行拉普拉斯变换得到相应的 s-方程式为

$$\begin{aligned} 5I_1(s) + \frac{Q_0}{2s} + \frac{1}{2s} I_1(s) + 5I_2(s) &= V(s) \\ 10I_2(s) + 2sI_2(s) - 2i_2(0^+) + 5I_1(s) &= V(s) \end{aligned} \quad (33)$$

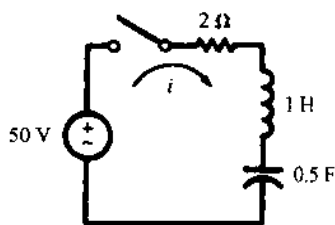


图 16-10

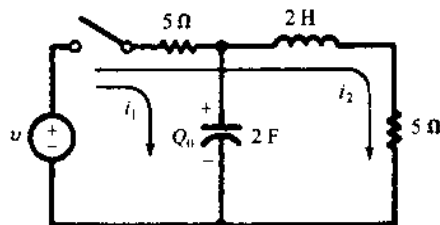


图 16-11

将 s-域的方程组写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 5 + (1/2s) & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) - (Q_0/2s) \\ V(s) + 2i_2(0^+) \end{bmatrix}$$

通过检验  $Z(s)$ ,  $I(s)$  和  $V(s)$  的矩阵可以确定所要求的 s-域电路(图 16-12).

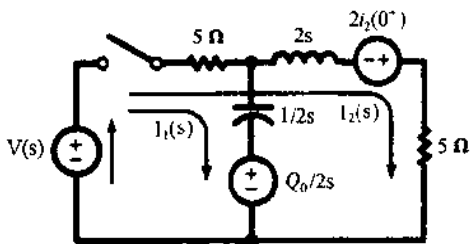


图 16-12

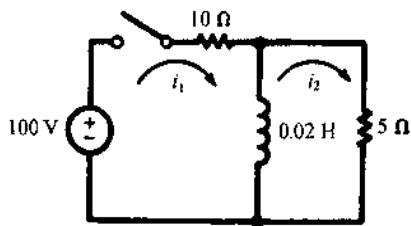


图 16-13

**16.14** 在图 16-13 所示有两个网孔的网络中, 求出当开关闭合时电路的电流.

**解** 网络的时域方程式为

$$\begin{aligned} 10i_1 + 0.02 \frac{di_1}{dt} - 0.02 \frac{di_2}{dt} &= 100 \\ 0.02 \frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0.02 \frac{di_1}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

对方程组(34)进行拉普拉斯变换可得

$$\begin{aligned} (10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02sI_2(s) &= 100/s \\ (5 + 0.02s)I_2(s) - 0.02sI_1(s) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

通过(35)式的第二个方程式求得



$$I_2(s) = I_1(s) \left( \frac{s}{s+250} \right) \quad (36)$$

把它带入第一个方程式中得到

$$I_1(s) = 6.67 \left[ \frac{s+250}{s(s+166.7)} \right] = \frac{10}{s} - \frac{3.33}{s+166.7} \quad (37)$$

对(37)式进行拉普拉斯反变换,得到

$$i_1 = 10 - 3.33e^{-166.7t} \quad (\text{A})$$

最后,把(37)式代入(36)式中,得到

$$I_2(s) = 6.67 \left( \frac{1}{s+166.7} \right) \quad \text{有} \quad i_2 = 6.67e^{-166.7t} \quad (\text{A})$$

### 16.15 对题 16.14 应用初值和终值定理.

**解** 给出  $i_1$  的初值为

$$i_1(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ 6.67 \left( \frac{s+250}{s+166.7} \right) \right] = 6.67 \text{ A}$$

终值为

$$i_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 6.67 \left( \frac{s+250}{s+166.7} \right) \right] = 10 \text{ A}$$

$i_2$  的初值为

$$i_2(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ 6.67 \left( \frac{s}{s+166.7} \right) \right] = 6.67 \text{ A}$$

终值为

$$i_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 6.67 \left( \frac{s}{s+166.7} \right) \right] = 0$$

通过对图 16-13 的检查,证明上面的每一个初值和终值正确性. 在电路闭合瞬间,电感可看作有一个无穷大的阻抗,电流是  $i_1 = i_2 = 100/(10+5) = 6.67 \text{ A}$ . 稳态时,电感如同短路,因此,  $i_1 = 10 \text{ A}$ ,  $i_2 = 0$ .

### 16.16 通过确定 s-域中的等效电路求出题 16.14 中的电流 $i_1$ .

**解** 在 s-域中  $0.02 \text{ H}$  的电感的阻抗为  $Z(s) = 0.02s$ . 因此,从电源端看去网络的等效阻抗为

$$Z(s) = 10 + \frac{(0.02s)(5)}{0.02s+5} = 15 \left( \frac{s+166.7}{s+250} \right)$$

s-域等效电路如图 16-14 所示. 电流为

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s} \left[ \frac{s+250}{15(s+166.7)} \right] = 6.67 \left[ \frac{s+250}{s(s+166.7)} \right]$$

这个表达式与题 16.14 中(37)式是相同的,所以可以得到相同的时间函数  $i_1$ .

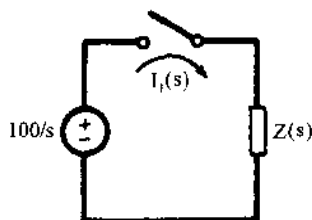


图 16-14

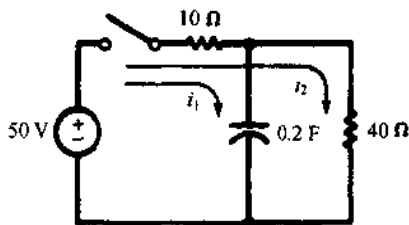


图 16-15

### 16.17 在图 16-15 所示的两网孔的网络中,电容没有初始电荷. $t=0$ 时开关闭合,求此时回路的电流 $i_1$ 和 $i_2$ .

**解** 电路的时域方程式为

$$10i_1 + \frac{1}{0.2} \int_0^t i_1 d\tau + 10i_2 = 50 \quad 50i_2 + 10i_1 = 50$$

相应的 s-域方程式为

$$10I_1(s) + \frac{1}{0.2s}I_1(s) + 10I_2(s) = \frac{50}{s} \quad 50I_2(s) + 10I_1(s) = \frac{50}{s}$$

求解得

$$I_1(s) = \frac{5}{s + 0.625} \quad I_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 0.625}$$

反变换得

$$i_1 = 5e^{-0.625t}(\text{A}) \quad i_2 = 1 - e^{-0.625t}(\text{A})$$

16.18 参考题 16.17, 求  $s$ -域网络的等效阻抗, 并使用电流分流规则确定总电流和支路电流。

解 从电压源端看去,  $s$ -域中的阻抗为

$$Z(s) = 10 + \frac{40(1/0.2s)}{40 + 1/0.2s} = \frac{80s + 50}{8s + 1} = 10 \left( \frac{s + 5/8}{s + 1/8} \right) \quad (38)$$

等效电路如图 16-16 所示; 此时电流为

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = 5 \frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)} \quad (39)$$

用部分分式法展开可得

$$I(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s + 5/8} \quad \text{由此可得, } i = 1 + 4e^{-5t/8} \quad (\text{A})$$

用电流分流可以求得支路电流  $I_1(s)$  和  $I_2(s)$ , 参考图 16-17, 有

$$I_1(s) = I(s) \left( \frac{40}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{5}{s + 5/8} \quad \text{则: } i_1 = 5e^{-0.625t} \quad (\text{A})$$

$$I_2(s) = I(s) \left( \frac{1/0.2s}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \quad \text{则: } i_2 = 1 - e^{-0.625t} \quad (\text{A})$$

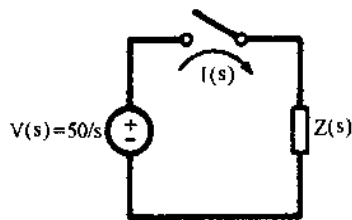


图 16-16

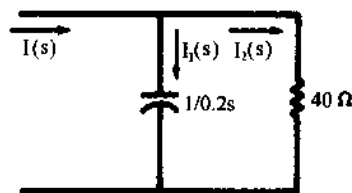


图 16-17

16.19 在图 16-18 的网路中,  $t=0$  时开关闭合, 电容都没有初始电荷. 求出此时的电流  $i$ .

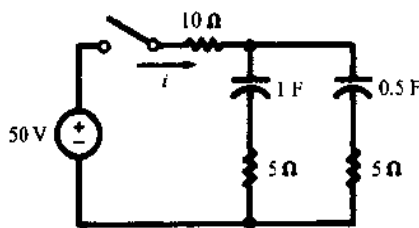


图 16-18

解  $s$ -域中网络的等效阻抗为

$$Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0.5s)}{10 + 1/s + 1/0.5s} \\ = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)}$$

因此电流为

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} \\ = \frac{4(s + 0.3)}{(s + 0.308)(s + 0.052)}$$

用部分分式法展开  $I(s)$  得

$$I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052}$$

则

$$i = \frac{1}{8}e^{-0.308t} + \frac{31}{8}e^{-0.052t}(\text{A})$$

16.20 对题 16-19 的  $S$ -域电流应用初值和终值定理。

$$\text{解 } i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left( \frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 4\text{A}$$

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left( \frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 0$$

对图 16-18 的检验说明电路的初始总电阻为  $R = 10 + 5(5)/10 = 12.5\Omega$ , 及  $i(0^+) = 50/12.5 = 4\text{A}$ .

在稳态时两个电容都充电到 50V, 电流为 0.

### 补充习题

16.21 求出以下每个函数的拉普拉斯变换.

- (a)  $f(t) = At$  (c)  $f(t) = e^{-at} \sin \omega t$  (e)  $f(t) = \cosh \omega t$   
 (b)  $f(t) = te^{-at}$  (d)  $\sinh \omega t$  (f)  $f(t) = e^{-at} \sinh \omega t$

答案: (a)~(e) 参见表 16-1, (f)  $\frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$

16.22 求出以下各函数的反拉普拉斯变换.

- (a)  $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+1)}$  (e)  $F(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+5}$   
 (b)  $F(s) = \frac{1}{s^2+7s+12}$  (f)  $F(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+13}$   
 (c)  $F(s) = \frac{5s}{s^2+3s+2}$  (g)  $F(s) = \frac{2s}{(s^2+4)(s+5)}$   
 (d)  $F(s) = \frac{3}{s(s^2+6s+9)}$

答案: (a)  $2e^{-2t} - e^{-t}$  (e)  $e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$   
 (b)  $e^{-3t} - e^{-4t}$  (f)  $2e^{-2t} \cos 3t$   
 (c)  $10e^{-2t} - 5e^{-t}$  (g)  $\frac{10}{29} \cos 2t + \frac{4}{29} \sin 2t - \frac{10}{29} e^{-5t}$   
 (d)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t} - te^{-3t}$

16.23 一个 RL 串联电路,  $R = 10\Omega$ ,  $L = 0.2\text{H}$ ,  $t = 0$  时接入恒定电压  $V = 50\text{V}$  的电压源. 使用拉普拉斯变换法求出此时的电流.

答案:  $i = 5 - 5e^{-50t} (\text{A})$

16.24 图 16-19 所示的 RL 串联电路中, 开关处于位置 1 并形成稳态. 在  $t = 0$  时刻, 开关移到位置 2. 求电流.

答案:  $i = 5e^{-50t} (\text{A})$

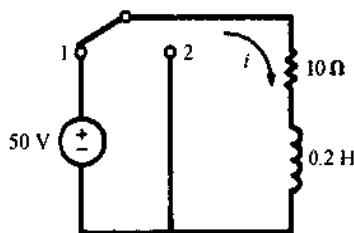


图 16-19

16.25 图 16-20 所示电路中,  $t = 0$  时, 开关 1 闭合, 在  $t = t' = 4\text{ms}$  时, 开关 2 打开. 求在时间间隔  $0 < t < t'$  和  $t > t'$  时的电流.

答案:  $i = 2(1 - e^{-500t}) (\text{A})$ ,  $i = 1.06e^{-1500(t-t')} + 0.667 (\text{A})$

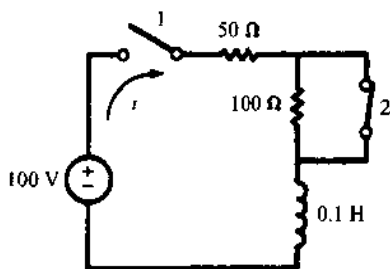


图 16-20

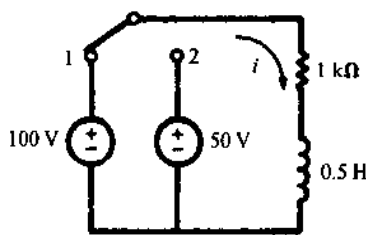


图 16-21

16.26 图 16-21 所示的 RL 串联电路中,  $t = 0$  时开关合向位置 1,  $t = t' = 50\mu\text{s}$ , 开关移到位置 2. 求在间隔  $0 < t < t'$  和  $t > t'$  时的电流.

答案:  $i = 0.1(1 - e^{-2000t}) (\text{A})$   $i = 0.06e^{-2000(t-t')} - 0.05 (\text{A})$

16.27 一个 RC 串联电路,  $R = 10\Omega$ ,  $C = 4\mu\text{F}$ , 当开关闭合时, 电容初始电荷  $Q_0 = 800\mu\text{C}$ , 施加的恒定电压源为  $V = 100\text{V}$ . 如果充电是: (a) 与电源极性相同, (b) 与电源极性相反, 求出此时的瞬时电流.

答案: (a)  $i = -10e^{-25 \times 1000t} (\text{A})$ ; (b)  $i = 30e^{-25 \times 1000t} (\text{A})$

16.28 一个 RC 串联电路中,  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 20\mu\text{F}$ , 当开关闭合时, 电容初始电荷为  $Q_0$ , 施加的恒定电压源为  $V = 50\text{V}$ . 如果产生的电流为  $i = 0.075e^{-50t} (\text{A})$ , 求电荷  $Q_0$  和极性.

答案:  $500\mu\text{C}$ , 与电源极性相反.

- 16.29 图 16-22 所示的 RC 电路中,  $t=0$  时开关合向位置 1, 在  $t=t'=\tau$  (时间常数) 时, 移到位置 2. 求在时间间隔  $0 < t < t'$  和  $t > t'$  时的瞬时电流.

答案:  $i = 0.5e^{-200t}$  (A); (b)  $i = -0.516e^{-200(t-t')}$  (A)

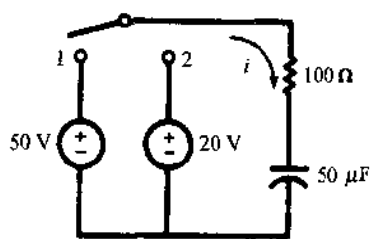


图 16-22

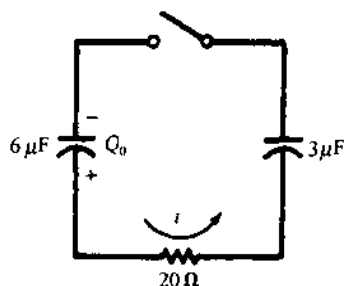


图 16-23

- 16.30 在图 16-23 所示电路中, 当开关闭合时,  $Q_0 = 300 \mu\text{C}$ , 求此时的瞬时电流.

答案:  $i = 2.5e^{-2.5 \times 10000t}$  (A)

- 16.31 在图 16-24 所示电路中, 电容有初始电荷  $Q_0 = 25 \mu\text{C}$ , 正弦电压源  $v = 100 \sin(1000t + \phi)$  (V). 如果在  $\phi = 30^\circ$  时开关闭合, 求此时的电流.

答案:  $i = 0.1535e^{-4000t} + 0.0484 \sin(1000t + 106^\circ)$  (A)

- 16.32 一个 RLC 串联电路,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $C = 500 \mu\text{F}$ ,  $t = 0$  时施加恒定电压  $V = 10 \text{ V}$ , 求此时的电流.

答案:  $i = 0.72e^{-25t} \sin 139t$  (A)

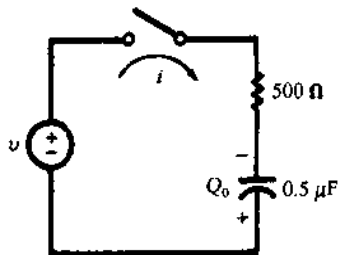


图 16-24

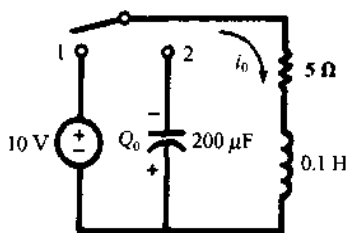


图 16-25

- 16.33 在图 16-25 所示 RLC 串联电路中, 电容器有初始电荷  $Q_0 = 1 \text{ mC}$ , 开关在位置 1, 电路达到稳态. 求当开关由位置 1 移到位置 2 时电路的电流.

答案:  $i = e^{-25t}(2\cos 222t - 0.45\sin 222t)$  (A)

- 16.34 一个 RLC 串联电路,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 0.2 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ F}$ , 在  $t = 0$  时刻作用的电压源  $v = 10e^{-100t}$  (V), 求此时电路的电流.

答案:  $i = -0.666e^{-100t} + 0.670e^{-20.8t} - 0.004e^{-0.2t}$  (A)

- 16.35 一个 RLC 串联电路中,  $R = 200\Omega$ ,  $L = 0.5 \text{ H}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ , 有一个正弦电压源  $v = 300 \sin(500t + \phi)$  (V), 求在  $\phi = 30^\circ$  时开关闭合后电路的电流.

答案:  $i = 0.517e^{-341.4t} - 0.197e^{-58.6t} + 0.983\sin(500t - 19^\circ)$  (A)

- 16.36 RLC 串联电路,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $C = 500 \mu\text{F}$ , 有正弦电压源  $v = 100\sin 250t$  (V). 求  $t = 0$  时刻开关闭合时电路的电流.

答案:  $i = e^{-25t}(5.42\cos 139t + 1.89\sin 139t) + 5.65\sin(250t - 73.6^\circ)$  (A)

- 16.37 图 16-26 所示两网孔网络中, 选择电流如图所示, 写出时域方程, 将它们转换为相应的 s 域方程, 并求电流  $i_1$  和  $i_2$ .

答案:  $i_1 = 2.5(1 + e^{-10^5 t})$  (A),  $i_2 = 5e^{-10^5 t}$  (A)

- 16.38 图 16-27 所示两网孔网络, 求当  $t = 0$  时刻开关闭合时的电流  $i_1$  和  $i_2$ .

答案:  $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t}$  (A),  $i_2 = -5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t}$  (A)

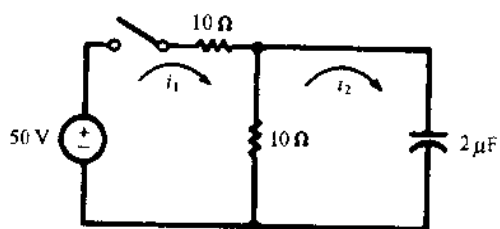


图 16-26

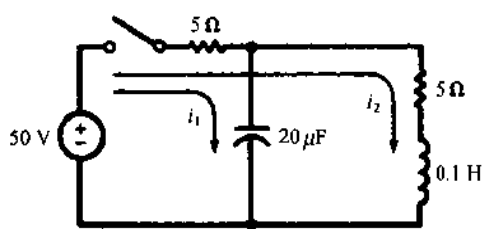


图 16-27

- 16.39 在图 16-28 所示网络中,当开关打开时,100 V 的电源在第一个回路中产生连续的电流.求开关在  $t = 0$  时刻闭合后电路的电流.

答案:  $i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5(\text{A})$ ,  $i_2 = 0.555e^{-6.67t} + 5(\text{A})$

- 16.40 图 16-29 所示两网孔网络中有一个正弦电压源  $v = 100\sin(200t + \phi)(\text{V})$ . 开关在电压增长到最大速率的瞬间闭合,求图示电流方向下的网孔电流.

答案:  $i_1 = 3.01e^{-100t} + 8.96\sin(200t - 63.4^\circ)(\text{A})$ ,

$i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48\sin(200t - 63.4^\circ)(\text{A})$ .

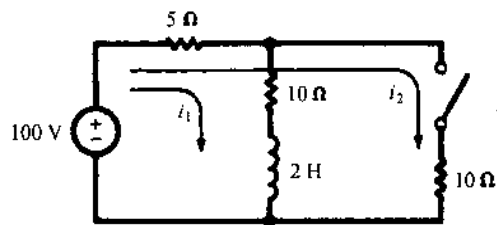


图 16-28

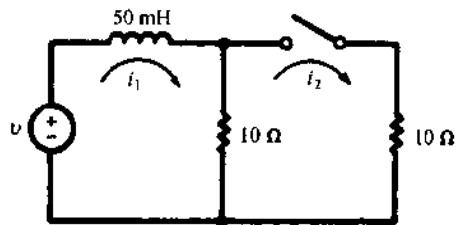


图 16-29

## 第 17 章 波形分析的傅里叶方法

### 17.1 引言

在前面讨论的电路中,求得了关于直流、正弦或指数形式激励的响应.此时,一个信号表达式描述了所有时间的强迫函数.例如,  $v = \text{常数}$  或  $v = V \sin \omega t$ , 如图 17-1(a)和(b)所示:

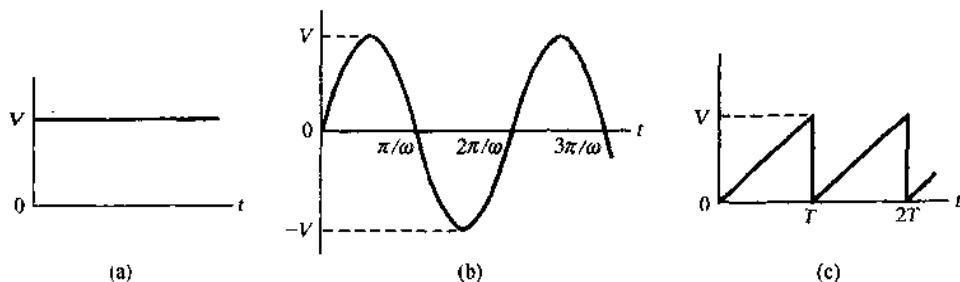


图 17-1

确定周期性波形,例如图 17-1(c)中的锯齿波,可以用信号函数进行局部定义.这样,锯齿波可以表示为:  $f(t) = (V/T)t$  (在  $0 < t < T$  期间)和  $f(t) = (V/T)(t - T)$  ( $T < t < 2T$ ).虽然用分段表达式描述这个波形会令人满意,但它们不能确定电路的响应.如果周期性函数可以表示为有限个或无限个正弦函数之和,则线性网络对于非正弦激励的响应就可以应用叠加原理来确定.傅里叶方法提供了解决这类问题的方法.

在这一章中,为进行这样的扩展我们介绍了一些工具和条件.周期性波形可以用傅里叶级数的形式表示.非周期性波形可以用它的傅里叶变换表示.然而,在有限时间周期内的一段非周期波形也可以在这段时间周期内用傅里叶级数表示.因此,傅里叶级数分析法是本章的主要内容.

### 17.2 傅里叶三角级数

任何周期性波形,即对于函数  $f(t) = f(t + T)$ ,可以用傅里叶级数表示.

- (1) 如果是不连续函数,在周期  $T$  中仅有有限的非连续项.
- (2) 在周期  $T$  内有限的平均值.
- (3) 在周期  $T$  内有有限个最大值与最小值.

当满足狄利克莱德(Dirichlet)条件时,傅里叶级数存在并可以写成三角级数的形式

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots \quad (1)$$

傅里叶系数  $a$  和  $b$  是对所给波形经积分计算确定的.我们求  $\cos$  项系数用(1)式乘以  $\cos n\omega t$  后在整个周期内进行积分计算.由于级数中每一项都有一个频率,该频率是基本频率的整数倍,因此,  $2\pi/\omega$  是级数的基本周期.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t dt &= \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} a_0 \cos n\omega t dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t dt + \cdots \\ &+ \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t dt + \cdots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \sin \omega t \cos n\omega t dt \\ &+ \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \sin 2\omega t \cos n\omega t dt + \cdots \end{aligned} \quad (2)$$

在(2)式右边的积分项除了包括  $\cos^2 n\omega t$  项外, 都可以确定为 0, 而该项的值为  $(\pi/\omega)a_n$ . 因此

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \quad (3)$$

在  $\sin$  项系数积分计算中, 用  $\sin n\omega t$  乘以(1)式并对上式求积分, 有

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt \quad (4)$$

计算积分的另一种形式是使用变量  $\psi = \omega t$  及相应周期  $2\pi$  弧度

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \cos n\psi d\psi \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \sin n\psi d\psi \quad (6)$$

此处,  $F(\psi) = f(\psi/\omega)$ . 这个积分可以从  $-T/2$  到  $T/2$ ,  $-\pi$  到  $+\pi$  或其它任何整个周期内进行, 这样可以简化计算. 常数  $a_0$  可以由(3)式或(5)式中令  $n=0$  得到. 由于  $\frac{1}{2}a_0$  是函数的平均值, 因此它通常可以通过观察波而确定. 由上面积分计算得到的带系数的级数, 在所有连续点上一致收敛到函数上, 在非连续点上收敛到平均值上.

**例 17.1** 求图 17-2 所示波形的傅里叶级数.

波形是周期性的. 周期为  $2\pi/\omega$  (对  $t$  轴) 或  $2\pi$  (对  $\omega t$  轴). 在  $0 < \omega t < 2\pi$  期间是连续的,  $f(t) = (10/2\pi)\omega t$ ; 而在  $\omega t = n2\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 处是非连续的, 满足狄利克莱德(Dirich-

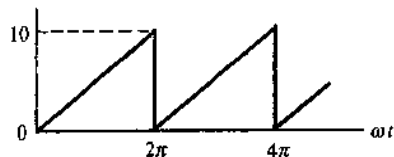


图 17-2

let) 条件. 函数的平均值为 5, 则  $\frac{1}{2}a_0 = 5$ . 对于

$n > 0$ , (5) 式为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{10}{2\pi} \right) \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[ \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t + \frac{1}{n^2} \cos n\omega t \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{10}{2\pi^2 n^2} (\cos n2\pi - \cos 0) = 0 \end{aligned}$$

这样, 级数中没有  $\cos$  项. 使用(6)式可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{10}{2\pi} \right) \omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[ \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t + \frac{1}{n^2} \sin n\omega t \right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

使用  $\sin$  项和平均值, 级数为

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots = 5 - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$$

$\sin$  和  $\cos$  的频率项可以作为含有一个相位角的单一  $\sin$  或  $\cos$  项组合起来构成级数. 两种形式的三角级数各为

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum C_n \cos(n\omega t - \theta_n) \quad (7)$$

及

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum C_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (8)$$

这里,  $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$ ,  $\phi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$ . 在(7)和(8)式中,  $C_n$  是谐波幅值,  $\theta_n$  或  $\phi_n$  是谐波相位角.

### 17.3 指数型傅里叶级数

一个周期波形  $f(t)$ , 满足狄利克莱德条件, 也可以写成指数型傅里叶级数. 它是一种三角

级数的变形. 指数级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t} \quad (9)$$

为求得系数  $A_n$  的积分计算值, 我们将(9)式两边同乘  $e^{-jn\omega t}$ , 并在整个周期内求积分

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) &= \cdots + \int_0^{2\pi} A_{-2} e^{-j2\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_{-1} e^{-j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ &+ \int_0^{2\pi} A_0 e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_1 e^{j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \cdots \\ &+ \int_0^{2\pi} A_n e^{jn\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \cdots \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式右边除了  $\int_0^{2\pi} A_n d(\omega t)$  等于  $2\pi A_n$  外, 定积分的值都为 0. 则

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) \quad \text{或} \quad A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (11)$$

如同  $a_n$  和  $b_n$  的计算, (11)式中的有限积分, 可以用任何方便的整个周期做为边界, 而不必须为 0 到  $2\pi$  或 0 到  $T$ . 注意,  $f(t)$  是实数,  $A_{-n} = A_n^*$ , 因此, 在(11)式中只需要考虑  $+n$  的情况. 进而有:  $a_n = 2R_e A_n$ ,  $b_n = -2I_m A_n$ .

**例 17.2** 由三角级数(1)式, 推导出指数级数(9)式.

用复数指数形式代替(1)式中的  $\sin$  和  $\cos$  项.

$$\sin n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \quad \cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

按  $n$  在  $-\infty, +\infty$  之间增加的方式排列指数项, 得到(9)式的无限项之和. 此处  $A_0 = a_0/2$ , 以及

$$A_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad \text{其中: } n = 1, 2, 3, \cdots$$

**例 17.3** 求图 17-2 所示波形的指数傅里叶级数. 使用指数级数的导数, 求三角级数的  $a_n$  和  $b_n$ , 并与例 17.1 进行比较.

在区间  $0 < \omega t < 2\pi$  内, 给定函数  $f(t) = (10/2\pi)\omega t$ . 通过观察, 函数的平均值为  $A_0 = 5$ , 将  $f(t)$  代入(11)式, 求得系数  $A_n$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{10}{2\pi} \right) \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2} \left[ \frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_0^{2\pi} = j \frac{10}{2\pi n} \quad (12)$$

在(9)式中插入系数  $A_n$ , 给定波形的指数型傅里叶级数则为

$$f(t) = \cdots - j \frac{10}{4\pi} e^{-j2\omega t} - j \frac{10}{2\pi} e^{-j\omega t} + 5 + j \frac{10}{2\pi} e^{j\omega t} + j \frac{10}{4\pi} e^{j2\omega t} + \cdots \quad (13)$$

由(12)式得出三角级数的系数为

$$a_n = 0 \quad b_n = -\frac{10}{\pi n}$$

有

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \cdots$$

这与例 17.1 的结果相同.

#### 17.4 波形的对称性

例 17.1 得到的级数仅包括  $\sin$  项及一个常数项. 另外的波形可能只包括  $\cos$  项; 有时仅存在奇次谐波, 而无论级数中是否包含有  $\sin$  项、或  $\cos$  项, 这就导致了波形表现出一定的对称性. 这些对称性的知识会在确定傅里叶级数时使计算简化. 因此, 下面的定义是重要的.



1. 如果  $f(x) = f(-x)$ , 则函数  $f(x)$  为偶函数.

函数  $f(x) = 2 + x^2 + x^4$  是一个偶函数的例子. 对于  $x$  和  $-x$ , 函数的值相等.  $\cos$  是偶函数, 因为它可以表示为幂级数:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

两个或多个偶函数的和或积仍是偶函数, 并且加上一个常数仍保持偶函数的性质.

在图 17-3 中, 波形显示为  $x$  的偶函数. 它们关于垂直轴对称. 可用图 17-3(a) 的结构说明.

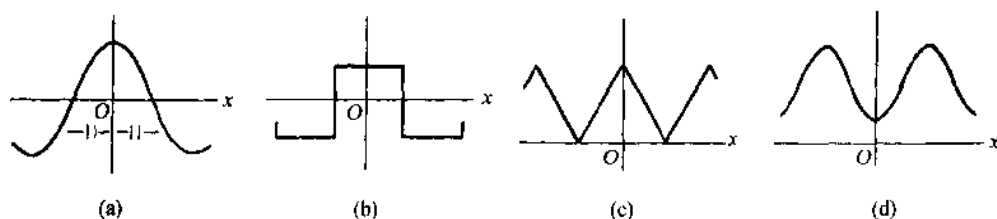


图 17-3

2. 如果  $f(x) = -f(-x)$ , 则函数  $f(x)$  为奇函数.

函数  $f(x) = x + x^3 + x^5$  是奇函数的例子. 对  $x$  和  $-x$ , 函数值反号.  $\sin$  是奇函数, 因为它可以表示为幂级数:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

两个或多个奇函数之和仍是奇函数, 但是当加上一个常数后会去掉函数的奇函数性质, 两个奇函数之积是偶函数.

图 17-4 的波形表示为  $x$  的奇函数. 它们关于原点对称, 可用图 17-4(a) 的结构说明.

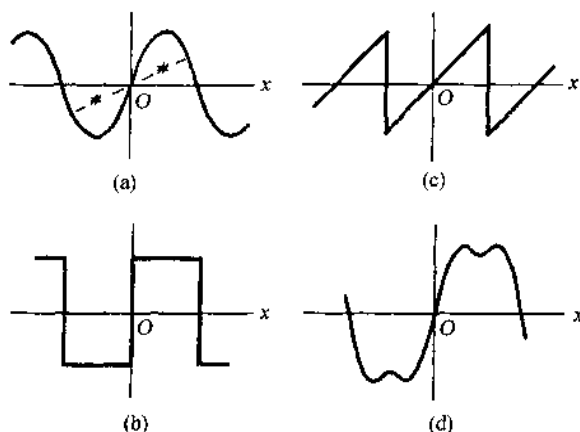


图 17-4

3. 如果  $f(x) = -f(x + T/2)$  ( $T$  为周期), 则周期函数  $f(x)$  称为半波对称函数. 两种半波对称波形示于图 17-5 中.

当确定了波形的对称类型时, 可得出下列结论: 如果波形是关于  $y$  轴对称的, 它的傅里叶级数的所有项都是  $\cos$  项, 如果波形的均值非零, 则包含一个常数项. 因此, 不需要为求得系数  $b_n$  而计算积分, 因为不存在  $\sin$  项. 如果波形是关于原点对称的, 级数中仅含  $\sin$  项. 波形仅在减去平均值后是奇的, 则它的傅里叶表达式中将简单地包含常数项和一系列  $\sin$  项. 如果波形具有半波对称性, 在级数中仅存在奇次谐波. 这个级数可包含  $\sin$  和  $\cos$  项, 除非函数同时既是奇函数又是偶函数. 对于具有半波对称性的任何波形, 在任何情况下,  $a_n$  和  $b_n$  都在  $n = 2, 4, 6, \dots$  时等于 0. 另外, 半波对称性也仅在减去平均值后存在.

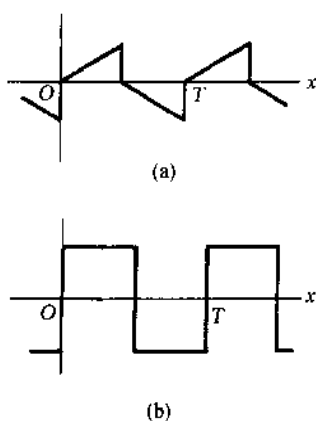


图 17-5

一个确定的波形可以是关于  $y$  轴对称的也可以是关于原点对称的, 取决于垂直轴的位置. 图 17-6(a) 的方波是偶函数, 即  $f(x) = f(-x)$ . 若将垂直轴移到图 17-6(b) 的位置, 会成为一个奇函数, 即  $f(x) = -f(-x)$ . 将垂直轴移到图 17-6 以外的任何位置, 方波既不是偶函数的也不是奇函数的, 它的级数包含有  $\sin$  和  $\cos$  项. 这样, 在分析周期函数时, 如果波形的类型允许, 垂直轴应该选择在使函数为偶函数或奇函数的位置.

水平轴的移动可以简化函数的级数表达式. 举一个例子, 图 17-7(a) 的波形不满足奇函数的要求, 而如图 17-7(b) 所示去掉均值后, 它的级数将包含一个常数项和  $\sin$  项.

上面讨论的对称性可以用来检查指数傅里叶级数的系数. 在三角级数中, 一个偶函数波形只包含  $\cos$  项, 因此, 指数傅里叶级数的系数必定是纯实数. 类似, 三角级数中由  $\sin$  项构成的奇函数, 在它的指数级数中有纯虚部系数.

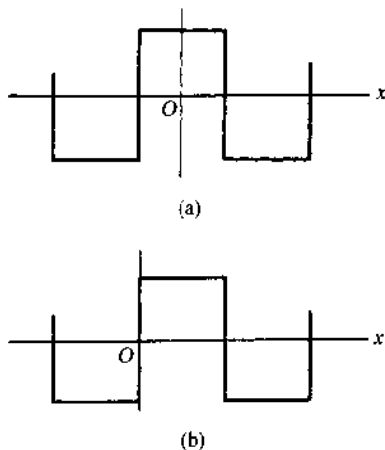


图 17-6

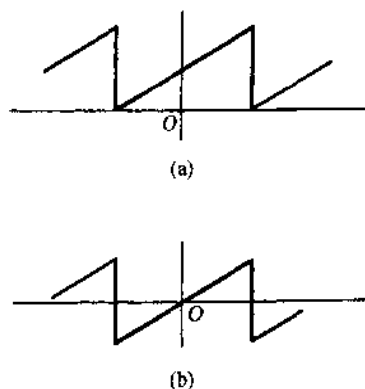


图 17-7

## 17.5 线谱

一个用来表示波形中每一个谐波幅值的图形叫做线谱. 级数收敛越快的波形, 它的谱线减小越快. 非连续的波形, 例如锯齿波和方波, 由于它们的级数中有很强的高次谐波, 因而有幅值减小很慢的谱线. 相对于基波来讲, 第十次谐波经常有不可忽略的幅值. 相比较而言, 对于没有间断的波形和具有一般平滑特性的波形的级数将很快收敛, 产生的波形只需要几项就可以. 这样快的收敛从线谱中可以明显看出, 线谱中谐波幅值很快减少, 使得 5 次或 6 次以上的谐波变得无意义.

波形的谐波内容和谱线是波形性质的一部分, 并且与分析方法无关. 移动原点会使三角级数有完全不同的样子, 指数级数的系数也会有很大变化. 然而, 相同的谐波在级数中总是表现出来, 它们的幅值被保留为相同的值

$$c_0 = \left| \frac{1}{2} a_0 \right| \quad \text{及} \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \geq 1) \quad (14)$$

或

$$c_0 = |A_0| \quad \text{及} \quad C_n = |A_n| + |A_{-n}| = 2|A_n| \quad (n \geq 1) \quad (15)$$

注意, 当使用指数形式时, 第  $n$  次谐波的幅值与频率  $+n\omega$  和  $-n\omega$  有关.

**例 17.4** 在图 17-8 中显示出例 17.1 的锯齿波和它的线谱. 由于在三角级数中仅有  $\sin$  项, 谱

波幅值直接由  $\frac{1}{2}a_0$  和  $b_n$  给出. 同样的谱线可以由 (13) 式的指数傅里叶级数得到.

### 17.6 波形综合

综合是将各部分结合起来以构成整体. 傅里叶综合是三角级数各项的重组, 一般用前面的 4 或 5 项产生原始波形. 经常在综合一个波形之后学习者被说服: 傅里叶级数实际上代表一个可以求出的周期波形.

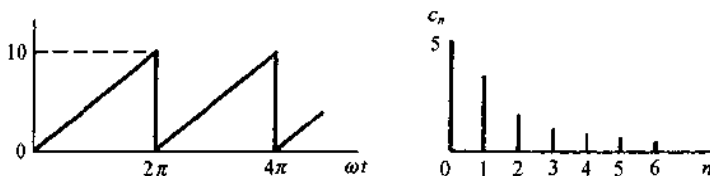


图 17-8

对于图 17-8 的锯齿波, 三角级数为

$$f(x) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$

图 17-9 中画出了这四项并进行了相加. 虽然结果并不完全是锯齿波, 但显然包含更多项的图形会更接近于锯齿波. 由于这个波形是非连续的, 它的级数并不很快收敛, 因此, 仅使用四项进行综合并不能产生很好的结果. 在下一项, 频率是  $4\omega$ , 幅值是  $10/4\pi$ , 它肯定会对基波幅值  $10/\pi$  有影响. 在综合中, 每一项加起来, 结果中不规则部分减少, 波形会大大改善接近原始波形, 这就是我们前面讲的, 级数收敛于函数所有连续的点以及收敛于函数非连续点的平均值. 在图 17-9 中, 在 0 和  $2\pi$  点, 由于在这些点上, 所有  $\sin$  项为 0, 因此这些点是非连续点, 当它们由左边接近时函数值为 10, 由右边接近时为 0, 平均值为 5.

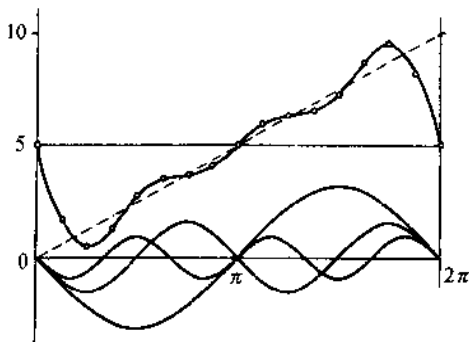


图 17-9

### 17.7 有效值和功率

函数  $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$  的有效值或均方根值为

$$\begin{aligned} F_{rms} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \dots + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \dots} \\ &= \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_3^2 + \dots} \end{aligned} \quad (16)$$

此处使用了 (14) 式.

考虑一个施加周期性电压的线性网络, 我们期望引起的电流将包括与电压相同的谐波项, 但是具有不同的谐波幅值, 这是由于阻抗随  $n\omega$  的变化而变化, 可能在电流中没有某些谐波. 例如, 在纯 LC 并联电路中, 一个谐波频率可能与谐振频率一致, 使得在这个频率上阻抗为无限大. 一般可以写为

$$v = V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad \text{及} \quad i = I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n) \quad (17)$$

相应的有效值为

$$V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 + \cdots} \quad \text{及} \quad I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2 + \cdots} \quad (18)$$

平均功率是瞬时功率的积分, 瞬时功率由  $v$ 、 $i$  乘积得到

$$p = vi = \left[ V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n) \right] \left[ I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n) \right] \quad (19)$$

由于  $v$  和  $i$  都以  $T$  为周期, 它们的积分也必须是在周期  $T$  内积分. (对于施加正弦波电压,  $vi$  乘积的周期是电压波的一半). 因此, 平均功率可在一个周期内计算得到

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n) \right] \left[ I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n) \right] dt \quad (20)$$

检验两个无限级数乘积中可能出现的项, 有如下类型: 两个常数乘积, 一个常数和  $\sin$  函数乘积, 两个不同频率的  $\sin$  函数的乘积以及  $\sin$  函数的平方. 积分后, 两个常数的乘积还是  $V_0 I_0$ ,  $\sin$  函数的平方项为  $(V_n I_n / 2) \cos(\phi_n - \psi_n)$ , 其它项的乘积在周期  $T$  内的积分都是 0. 平均功率是

$$P = V_0 I_0 + \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 + \cdots \quad (21)$$

此处,  $\theta_n = \phi_n - \psi_n$  是网络在角频率  $n\omega$  处等效阻抗的相角,  $V_n$ ,  $I_n$  分别是  $\sin$  函数的电压和电流的最大值.

在单一频率正弦电压的特殊情况下,  $V_0 = V_2 = V_4 = \cdots = 0$ , (21) 式简化为

$$P = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 = V_{eff} I_{eff} \cos \theta$$

与 10.2 节相比结果是一致的. 另外, 对直流电压,  $V_1 = V_2 = \cdots = 0$ , (21) 式变为

$$P = V_0 I_0 = VI$$

所以, (21) 式为一般式. 注意, 在等式右边不包含不同频率的电压和电流项. 考虑每一个谐波独立作用下的功率, 有

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

## 17.8 电路分析中的应用

前面我们已经讨论了一个作用在线性网络的电压级数以及求得相应的电流级数的各谐波项, 可以用叠加原理求得最后结果. 我们考虑将电压的傅里叶级数的每一项作为一个电源, 如图 17-10 所示. 现在, 用每一个谐波频率  $n\omega$  上网络的等效阻抗来计算在这个谐波的电流值. 对于作用的电压, 这些个别的响应之和是总的响应  $i$ , 并用级数形式表示.

**例 17.5** 串联  $RL$  电路,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$  (图 17-11), 施加的电压  $v = 100 + 50\sin\omega t + 25\sin 3\omega t$  (V),  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ , 求电流和平均功率.

计算在电压函数中每一个频率下电路的等效阻抗, 然后分别求出电流.

当  $\omega = 0$  时,  $Z_0 = R = 5\Omega$ ,

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

当  $\omega = 500 \text{ rad/s}$  时,  $Z_1 = 5 + j(500)(20 \times 10^{-3}) = 5 + j10 = 11.15 \angle 63.4^\circ \Omega$

$$i_1 = \frac{V_{1,\max}}{Z_1} \sin(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11.15} \sin(\omega t - 63.4^\circ) = 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) \text{ (A)}$$

当  $\omega = 1500 \text{ rad/s}$  时,  $Z_3 = 5 + j30 = 30.4 \angle 80.54^\circ \Omega$

$$i_3 = \frac{V_{3,\max}}{Z_3} \sin(3\omega t - \theta_1) = \frac{25}{30.4} \sin(3\omega t - 80.54^\circ) = 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ (A)}$$

各谐波电流之和是总的响应, 它是 (8) 式的傅里叶级数.

$$i = 20 + 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ (A)}$$

电流的有效值为

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{20^2 + (4.48^2/2) + (0.823^2/2)} = \sqrt{410.6} = 20.25 \text{ A}$$

在  $5\Omega$  电阻上消耗的功率为:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = (410.6)5 = 2053 \text{ W}$$

进行检查, 计算每一个谐波的功率然后相加的方法求平均功率

$$\omega = 0 \text{ 时, } P_0 = V_0 I_0 = 100(20) = 2000 \text{ W}$$

$$\omega = 500 \text{ rad/s 时, } P_1 = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 = \frac{1}{2} (50)(4.48) \cos 63.4^\circ = 50.1 \text{ W}$$

$$\omega = 1500 \text{ rad/s 时, } P_3 = \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 = \frac{1}{2} (25)(0.823) \cos 80.54^\circ = 1.69 \text{ W}$$

$$\text{则 } P = 2000 + 50.1 + 1.69 = 2052 \text{ W}$$

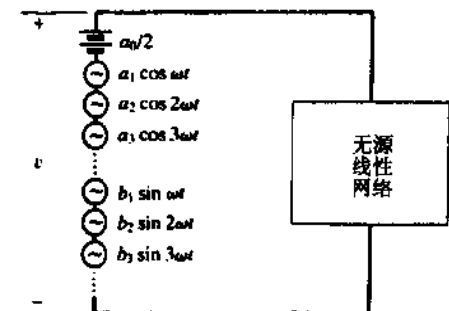


图 17-10

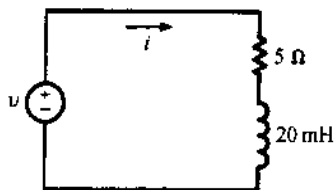


图 17-11

### 另一种方法

电阻两端电压的傅里叶级数表达式为

$$v_R = Ri = 100 + 22.4 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 4.11 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \quad (\text{V})$$

及

$$V_{\text{Reff}} = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22.4)^2 + \frac{1}{2}(4.11)^2} = \sqrt{10259} = 101.3 \text{ V}$$

电源提供的功率为:  $P = V_{\text{Reff}}^2 / R = (10259)/5 = 2052 \text{ W}$

在例 17.5 中, 给定的驱动电压是三角傅里叶级数, 可在时域中进行计算(复数常使用简化形式;  $Z_n$  和  $\theta_n$  从  $R, L$  和  $n\omega$  直接得到). 如果电压用指数傅里叶级数进行表达, 则

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_n e^{jn\omega t}$$

我们不得不进行相量  $V_n$  的叠加(如果  $n > 0$ , 逆时针旋转, 如果  $n < 0$ , 顺时针旋转), 这也称为频域方法, 该方法将在例 17.6 中说明.

**例 17.6** 一个用三角波表示的电压示于图 17-12 中. 将该电压施加到纯电容上, 请确定所引起的电流.

在区间  $-\pi < \omega t < 0$ , 电压函数为  $v = V_{\text{max}} + (2V_{\text{max}}/\pi)\omega t$ ; 在  $0 < \omega t < \pi$ ,  $v = V_{\text{max}} - (2V_{\text{max}}/\pi)\omega t$ . 则指数级数的系数用积分进行确定

$$V_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [V_{\text{max}} + (2V_{\text{max}}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [V_{\text{max}} - (2V_{\text{max}}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t)$$

由此可得: 对于奇数  $n$  有:  $V_n = 4V_{\text{max}}/\pi^2 n^2$ , 对于偶数  $n$  有:  $V_n = 0$ .

由  $V_n$  ( $n$  为奇数) 产生的电流为

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \frac{4V_{\max}/\pi^2 n^2}{1/jn\omega C} = j \frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2 n}$$

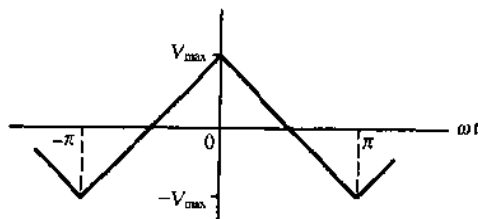


图 17-12

由于有一个隐含时间因子  $e^{jn\omega t}$ , 因此产生的电流为

$$i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} I_n e^{jn\omega t} = j \frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jn\omega t}}{n}$$

这里仅对奇数  $n$  求和.

这个级数可以转换为三角形形式, 经过综合后可以显示电流波形. 习题 17.8 中也有相同形式的级数作结果, 那里的系数为  $A_n = -j(2V/n\pi)$ , 仅在  $n$  是奇数的情况下.

这里符号是负的, 表明电流波形是题 17.8 的负方波, 峰值为  $2V_{\max}\omega C/\pi$ .

### 17.9 非周期波形的傅里叶变换

一个非周期波形  $x(t)$ , 如果

(a)  $x(t)$  是绝对可积的, 并且  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ ;

(b) 在每一个有限区间内, 最大值个数和最小值个数以及不连续点个数是有限的; 则称  $x(t)$  满足狄里克莱德(Dirichlet)条件.

对于这样一个波形, 我们可以定义傅里叶变换  $X(f)$  为

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (22a)$$

这里  $f$  是频率, 上述积分称为傅里叶积分, 时间函数  $x(t)$  称为  $X(f)$  的傅里叶反变换.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (22b)$$

$x(t)$  和  $X(f)$  的形式是一个傅里叶变换对, 不用  $f$ , 也可以用角速度  $\omega = 2\pi f$  表达. 此时, (22a) 和 (22b) 分别变为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (23a)$$

和

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (23b)$$

**例 17.7** 求  $x(t) = e^{-at}u(t)$  的傅里叶变换,  $a > 0$ . 画出  $X(f)$  的图形 ( $-\infty < f < +\infty$ ).

由 (22a) 式可知,  $x(t)$  的傅里叶变换为

$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (24)$$

$X(f)$  是一个实变量的复数函数, 它的幅值和相位角分别是  $|X(f)|$  和  $\angle X(f)$ , 示于图 17-13(a) 和 (b) 中.

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (25a)$$

$$\angle X(f) = -\tan^{-1}(2\pi f/a) \quad (25b)$$

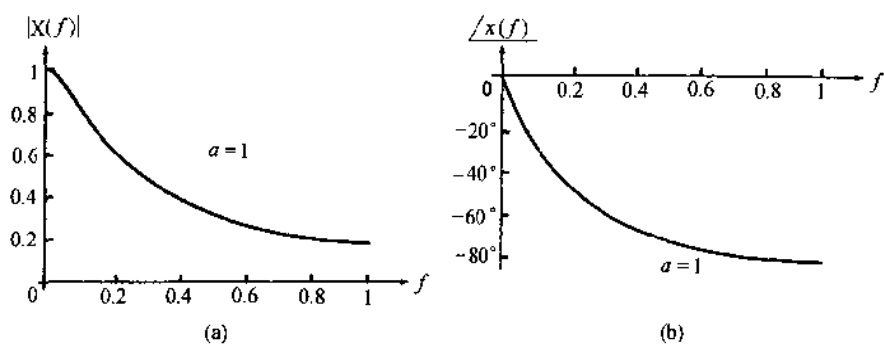


图 17-13

在图 17-14(a)和(b)中也显示了它的实部和虚部  $\text{Re}[X(f)]$  和  $\text{Im}[X(f)]$

$$\text{Re}[X(f)] = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (26a)$$

$$\text{Im}[X(f)] = \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (26b)$$

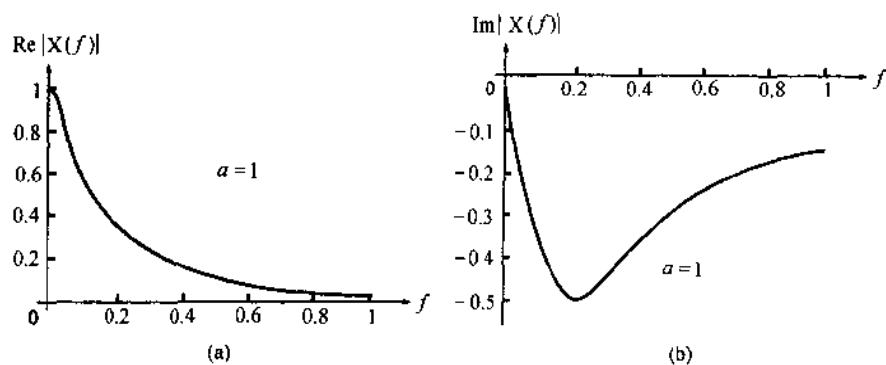


图 17-14

**例 17.8** 求下列方波脉冲的傅里叶变换.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (-T < t < T) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由(22a)式有

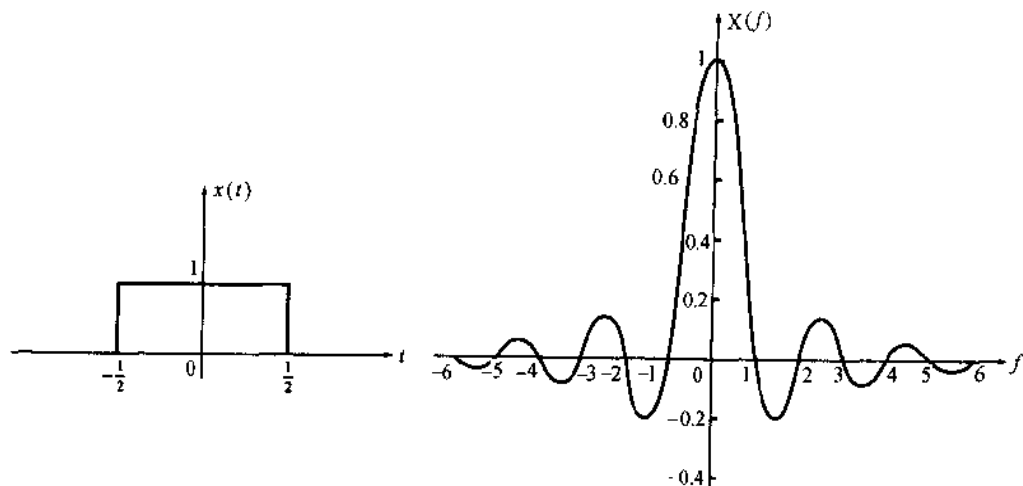


图 17-15

$$X(f) = \int_{-T}^{+T} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{j2\pi ft}]_{-T}^{+T} = \frac{\sin 2\pi fT}{\pi f} \quad (27)$$

因为  $x(t)$  是偶函数, 所以  $X(f)$  是实数. 对于  $T = \frac{1}{2}s$  的变换画于图 17-15(a) 和 (b) 中.

**例 17.9** 求  $x(t) = e^{at}u(-t)$ ,  $a > 0$  的傅里叶变换.

$$X(f) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (28)$$

**例 17.10** 求  $X(f) = 2a/(a^2 + 4\pi^2 f^2)$ ,  $a > 0$  的傅里叶反变换.

根据部分方式, 有

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (29)$$

对式 (29) 的每一项反变换可由 (24) 和 (28) 式推导得出

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = e^{-a|t|} \quad (\text{对所有的 } t)$$

见图 17-16.

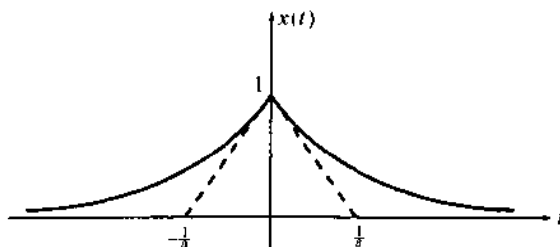


图 17-16

### 17.10 傅里叶变换的性质

表 17-1 中列出了傅里叶变换的某些性质, 表 17-2 给出了几种最常使用的变换对.

表 17-1 傅里叶变换性质

	时域 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	频域 $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
1	$x(t)$ 实数	$X(f) = X^*(-f)$
2	$x(t)$ 偶, $x(t) = x(-t)$	$X(f) = X(-f)$
3	$x(t)$ 奇, $x(t) = -x(-t)$	$X(f) = -X(-f)$
4	$X(f)$	$x(-t)$
5	$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$	$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$
6	$y(t) = x(at)$	$Y(f) = \frac{1}{ a } X(f/a)$
7	$y(t) = tx(t)$	$Y(f) = -\frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}$
8	$y(t) = x(-t)$	$Y(f) = X(-f)$
9	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(f) = e^{-j2\pi ft_0} X(f)$



## 17.11 连续谱

正如在 17.9 节中的定义,  $|X(f)|^2$  称为波形  $x(t)$  的能量密度或能量谱. 和周期函数不同, 非周期波形  $x(t)$  的能量, 在每一个频率都是 0. 然而, 在  $f_1$  到  $f_2$  的频率带内其能量为

$$W = 2 \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df \quad (30)$$

**例 17.11** 求  $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$ ,  $a > 0$  的能量谱.

设  $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ ,  $x_1(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $x_2(t) = e^{at}u(-t)$

$$X_1(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad X_2(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

则 
$$X(f) = X_1(f) - X_2(f) = \frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

由此可得

$$|X(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

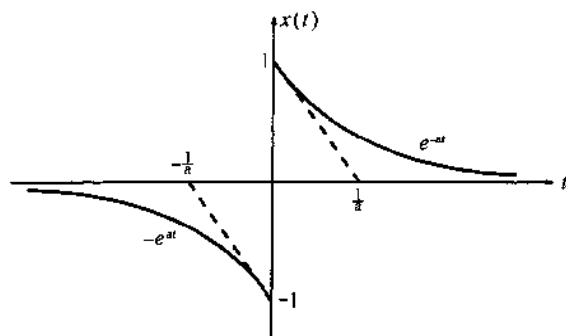


图 17-17

表 17-2 傅里叶变换对

	$x(t)$	$X(f)$
1	$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
2	$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
3	$te^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
4	$\exp(-\pi t^2/\tau^2)$	$\tau \exp(-\pi f^2 \tau^2)$
5		
6		

续表

	$x(t)$	$X(f)$
7	1	$\delta(f)$
8	$\delta(t)$	1
9	$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$
10	$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$

例 17.12 求  $y_1(t) = e^{-|a|}$  和  $y_2(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$  ( $a > 0$ ) 在频带 0—1 Hz 之间的能量  $W_1$  和  $W_2$  并进行比较, 设  $a = 200$ .

由例 17.10 和 17.11, 有

$$|Y_1(f)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2} \quad \text{及} \quad |Y_2(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

在  $0 < f < 1$  Hz 内, 谱线和能量约为

$$|Y_1(f)|^2 \approx 4/a^2 = 10^{-4} \text{ J/Hz} \quad \text{及} \quad W_1 = 2(10^{-4}) \text{ J} = 200 \mu\text{J}$$

$$|Y_2(f)|^2 \approx 10^{-7} f^2 \quad \text{及} \quad W_2 \approx 0$$

上面的结果与观察到的一致.  $y_1(t)$  中主要能量在低频区域, 与  $y_2(t)$  形成对照.

### 习题及解答

17.1 求图 17-18 中方波的三角傅里叶级数并画出其线谱.

解 在区间  $0 < \omega t < \pi$  内,  $f(t) = V$ , 在  $\pi < \omega t < 2\pi$ ,  $f(t) = -V$ . 波形的平均值为 0, 因此,  $a_0/2 = 0$ .  $\cos$  的系数用具有函数的积分值求得, 如下

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi V \cos n\omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} (-V) \cos n\omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_0^\pi - \left[ \frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_\pi^{2\pi} \right\} \\ &= 0 \quad (\text{对所有的 } n) \end{aligned}$$

所以, 这个级数中没有  $\cos$  项. 继续进行积分求得  $\sin$  项系数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi V \sin n\omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} (-V) \sin n\omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{\pi} \left\{ \left[ -\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_0^\pi + \left[ \frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_\pi^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi n} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

所以, 当  $n = 1, 3, 5, \dots$  时,  $b_n = 4V/\pi n$ , 当  $n = 2, 4, 6, \dots$  时,  $b_n = 0$ . 方波的级数为

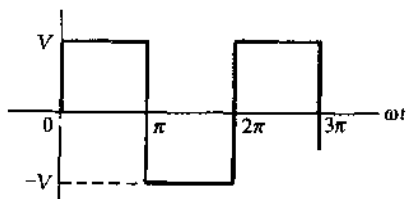


图 17-18

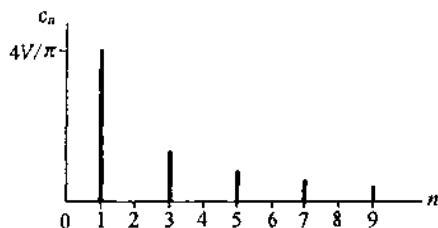


图 17-19

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \sin \omega t + \frac{4V}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4V}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$$

它的线谱示于图 17-19 中. 这个级数只包含奇次谐波的  $\sin$  项, 可以通过波形对称性的检查而事先得知. 由于图 17-18 的波形是对于原点对称的, 它的级数只包含  $\sin$  项; 由于它也具有半波对称性, 所以只存在奇次谐波.

### 17.2 求图 17-20 所示三角波的三角傅里叶级数, 并画出它的线谱.

**解** 由于  $f(t) = f(-t)$ , 所以这个波形是偶函数波形, 如果减去它的平均值  $V/2$ , 它也是半波对称的, 即  $f(t) = f(t + \pi)$ . 对于  $-\pi < \omega t < 0$ ,  $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$ ; 对于  $0 < \omega t < \pi$ ,  $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ . 由于偶函数波形仅有  $\cos$  项, 所以所有的  $b_n = 0$ . 对于  $n \geq 1$ , 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \cos n\omega t d(\omega t) + \int_{-\pi}^0 \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) - \int_0^{\pi} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{\pi^2} \left\{ \left[ \frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_{-\pi}^0 - \left[ \frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2 n^2} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{V}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

由于前面已经指出波形具有半波对称性, 级数只包含奇次项, 所以对于  $n = 2, 4, 6, \dots$  时,  $a_n = 0$ ; 对于  $n = 1, 3, 5, \dots$  时,  $a_n = 4V/\pi^2 n^2$ . 则所求级数为

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2} \cos \omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t + \dots$$

系数以  $1/n^2$  的速率减小, 因此这个级数比题 17.1 的级数收敛更快. 由图 17-21 所示的线谱更能清楚地证明这一点.

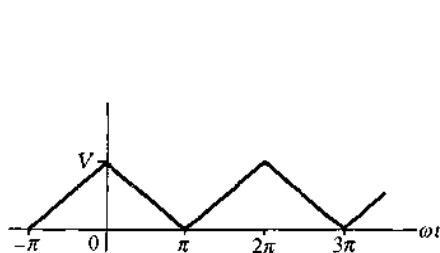


图 17-20

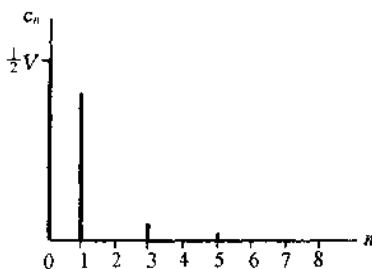


图 17-21

### 17.3 求图 17-22 所示锯齿波的三角傅里叶级数并画出其线谱.

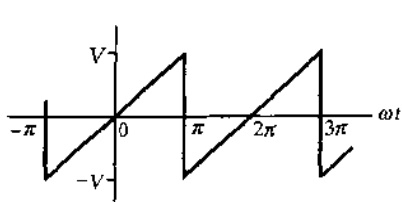


图 17-22

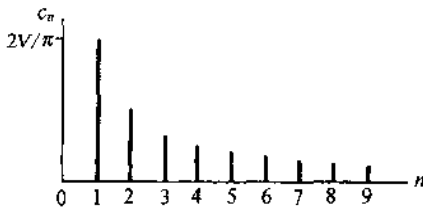


图 17-23

**解** 由波形的样子可知波形是关于原点对称的(因此平均值为 0). 这样级数将只包含  $\sin$  项. 用单一的表达式  $f(t) = (V/\pi)\omega t$  来描述在  $-\pi$  到  $+\pi$  一个整个周期内的波形, 我们在这个界限内求积分值得到  $b_n$ .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2V}{n\pi} (\cos n\pi) \end{aligned}$$

因为对于偶数  $n$ ,  $\cos n\pi = +1$ , 对于奇数  $n$ ,  $\cos n\pi = -1$ , 因此系数的符号是交替变化的, 所求级数为:

$$f(t) = \frac{2V}{n\pi} (\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \frac{1}{4}\sin 4\omega t + \dots)$$

系数以  $1/n$  速率减小, 因此这个级数收敛较慢, 如图 17-23 所示的线谱. 除了原点和平均值移动以外, 这个波形与图 17-8 的波形是相同的. 可比较两个线谱.

#### 17.4 求图 7-24 所示波形的三角傅里叶级数, 并画出线谱.

**解** 在区间  $0 < \omega t < \pi$  内,  $f(t) = (V/\pi)\omega t$ , 在区间  $\pi < \omega t < 2\pi$  内,  $f(t) = 0$ . 由波形的形状可知, 波形平均值是  $V/4$ . 由于波形既不关于  $y$  轴对称也不关于原点对称, 所以级数将包含  $\sin$  项和  $\cos$  项. 对于  $n > 0$ , 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V/\pi)\omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^\pi \\ &= \frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

当  $n$  是偶数时,  $\cos n\pi - 1 = 0$ ,  $a_n = 0$ . 当  $n$  是奇数时,  $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$ . 系数  $b_n$  为

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_0^\pi \\ &= -\frac{V}{n\pi} (\cos n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{V}{n\pi} \end{aligned}$$

则所求傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t - \dots \\ &\quad + \frac{V}{\pi} \sin \omega t - \frac{V}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{V}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots \end{aligned}$$

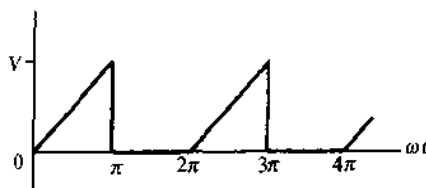


图 17-24

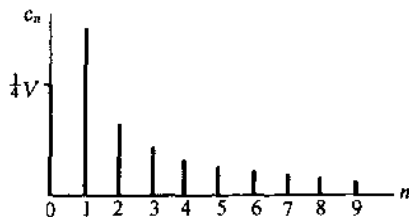


图 17-25

由于级数中没有偶次谐波  $\cos$  项, 所以偶次谐波幅值直接由  $|b_n|$  给出. 而奇次谐波的幅值必须用  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  来计算. 于是

$$c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2} = V(0.377) \quad c_3 = V(0.109) \quad c_5 = V(0.064)$$

线谱画于图 17-25 中.

#### 17.5 求图 17-26 所示半波整流正弦波形的三角傅里叶级数, 并画出其线谱.

**解** 波形表明没有对称性. 因此级数中包含了  $\sin$  项和  $\cos$  项. 由于平均值不能依波形得到, 所以要计算  $a_0/2$  中的  $a_0$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} [-\cos \omega t]_0^\pi = \frac{2V}{\pi}$$

确定  $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \cos n\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left[ \frac{-n \sin \omega t \sin n\omega t - \cos n\omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^\pi = \frac{V}{\pi(1 - n^2)} (\cos n\pi + 1) \end{aligned}$$

$n$  为偶数时,  $a_n = 2V/\pi(1 - n^2)$ ;  $n$  为奇数时,  $a_n = 0$ . 然而, 这个表达式不能确定  $n=1$  时的  $a_1$ , 因此必须分开积分求  $a_1$ .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\omega t d(\omega t) = 0$$

计算  $b_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \sin n \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[ \frac{n \sin \omega t \cos n \omega t - \sin n \omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^\pi = 0$$

这个表达式也不能确定  $n=1$  时的值,  $b_1$  要单独计算

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[ \frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2 \omega t}{4} \right]_0^\pi = \frac{V}{2}$$

则所求傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3} \cos 2 \omega t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega t - \frac{2}{35} \cos 6 \omega t - \dots \right)$$

图 17-27 的谱线说明这个级数中有较强的基波项, 而高次谐波的幅值减小很快.

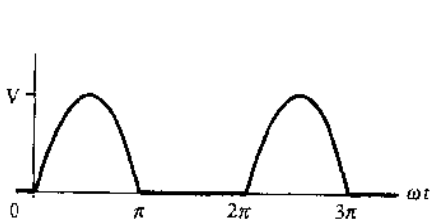


图 17-26

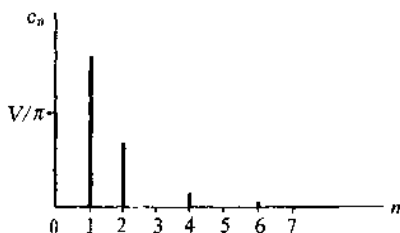


图 17-27

- 17.6 求图 17-28 所示半波整流正弦波形的三角傅里叶级数, 这里垂直轴从图 17-26 的位置移动一个距离.

**解** 函数在区间  $-\pi < \omega t < 0$  的形式为:  $f(t) = -V \sin \omega t$ , 其平均值与题 15.5 中相同, 即  $\frac{1}{2} a_0 = V/\pi$ . 对于系数  $a_n$  有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \cos n \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (1 + \cos n \pi)$$

$n$  为偶数时,  $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$ ;  $n$  为奇数时,  $a_n = 0$ , 但  $n=1$  必须分开检验

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0$$

对于系数  $b_n$ , 求得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \sin \omega t) \sin n \omega t d(\omega t) = 0$$

对于  $n=1$  时,

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V) \sin^2 \omega t d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

因此, 这个级数为

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left( 1 - \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3} \cos 2 \omega t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega t - \frac{2}{35} \cos 6 \omega t - \dots \right)$$

这个级数除了基波项以外与题 17.5 相同, 在这个级数中, 基波项有负的系数. 显然, 它的谱线图也与图 17-27 相同.

### 另一种方法

当从图 17-26 的图形中减去正弦波形  $V \sin \omega t$  时, 就得到图 17-28 的图形.

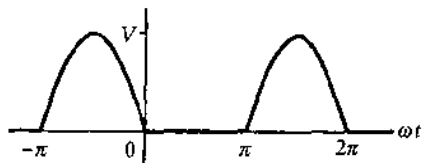


图 17-28

17.7 求图 17-29 所示重复的矩形波的三角傅里叶级数,并画出它的线谱图。

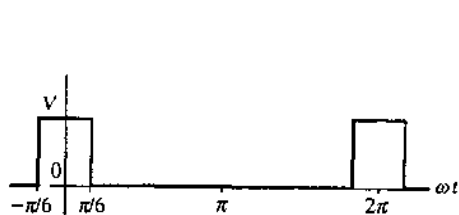


图 17-29

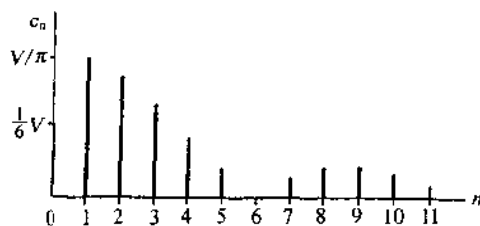


图 17-30

**解** 垂直轴的位置如图所示.波形是关于  $y$  轴对称的,级数中将只包含  $\cos$  项和常数.在周期  $-\pi$  到  $\pi$  期间进行积分计算,除了  $-\pi/6$  到  $\pi/6$  区间外,函数值为 0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V d(\omega t) = \frac{V}{3} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{6}$$

由于当  $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  时, 分别有  $\sin n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, \dots$ , 所以这个级数为

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \cos 2\omega t + 1 \left( \frac{1}{3} \right) \cos 3\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{4} \right) \cos 4\omega t + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} \right) \cos 5\omega t - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{7} \right) \cos 7\omega t - \dots \right]$$

或

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi/6) \cos n\omega t$$

图 17-30 显示了它的线谱.由于这个函数的级数收敛很慢,因此这个波形的线谱的幅值减小很慢.特别注意的是 8、9、10 次谐波的幅值超过了 7 次谐波的幅值.而先前考虑的简单波形,较高次谐波的幅值都是渐进降低的.

17.8 求图 17-18 和图 17-31 所示方波的指数傅里叶级数,并画出它的线谱.由这些指数级系数求三角级数的系数并与题 17.1 进行比较.

**解** 在区间  $-\pi < \omega t < 0$  内,  $f(t) = -V$ , 在  $0 < \omega t < \pi$  内,  $f(t) = V$ . 波形是关于原点对称的, 因此,  $A_0 = 0$ ,  $A_n$  是纯虚数.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-V) e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} V e^{-jn\omega t} d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{2\pi} \left\{ - \left[ \frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t} \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t} \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{-j2\pi n} (-e^0 + e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^0) = j \frac{V}{n\pi} (e^{jn\pi} - 1) \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数时,  $e^{jn\pi} = +1$ ,  $A_n = 0$ ; 当  $n$  为奇数时,  $e^{jn\pi} = -1$ ,  $A_n = -j(2V/n\pi)$  (半波对称性). 所求傅里叶级数为

$$f(t) = \dots + j \frac{2V}{3\pi} e^{j3\omega t} + j \frac{2V}{\pi} e^{j\omega t} - j \frac{2V}{\pi} e^{-j\omega t} - j \frac{2V}{3\pi} e^{-j3\omega t} - \dots$$

图 17-32 中的图形显示出正的和负的频率的幅值情况. 结合在  $+n$  和  $-n$  的值产生了与图 17-19 相同的线谱图.

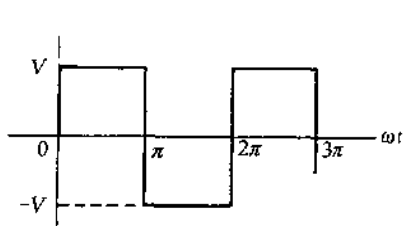


图 17-31

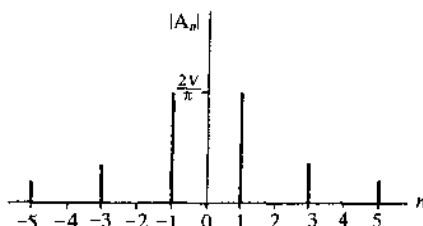


图 17-32

三角级数的  $\cos$  系数为

$$a_n = 2R_e A_n = 0$$

及

$$b_n = -2I_m A_n = \frac{4V}{n\pi} \quad (n \text{ 为奇数})$$

这些系数与在题 17.1 中求得的系数一致。

**17.9** 求图 17-20 和图 17-33 所示三角波的指数傅里叶级数, 并画出线谱图。

**解** 在区间  $-\pi < \omega t < 0$  内,  $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$ , 在  $0 < \omega t < \pi$  内,  $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ . 波形是关于  $y$  轴对称的, 因此系数  $A_n$  将是纯实数. 由图的形状知平均值为  $V/2$ .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^0 \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} (-\omega t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_{-\pi}^{\pi} \pi e^{-jn\omega t} d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \left[ \frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_{-\pi}^0 - \left[ \frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2 n^2} (1 - e^{jn\pi}) \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数时,  $e^{jn\pi} = +1$ ,  $A_n = 0$ ;  $n$  为奇数时,  $A_n = 2V/\pi^2 n^2$ , 这样, 级数为

$$f(t) = \cdots + \frac{2V}{(-3\pi)^2} e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2} e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2} e^{j3\omega t} + \cdots$$

谐波幅值为

$$c_0 = \frac{V}{2} \quad c_n = 2|A_n| = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \cdots) \\ 4V/\pi^2 n^2 & (n = 1, 3, 5, \cdots) \end{cases}$$

其图画于图 17-21 中。

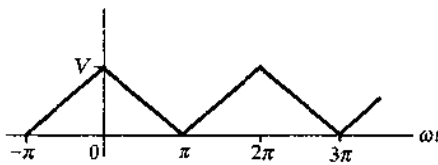


图 17-33

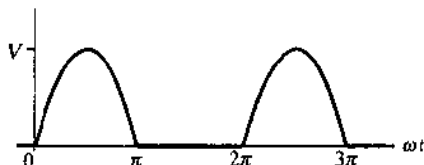


图 17-34

**17.10** 求图 17-26 和图 17-34 所示半波整流正弦波的指数傅里叶级数, 并画出其线谱图。

**解** 在区间  $0 < \omega t < \pi$  内,  $f(t) = V \sin \omega t$ , 由  $\pi$  到  $2\pi$ ,  $f(t) = 0$ . 所以

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ &= \frac{V}{2\pi} \left[ \frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)} (-jn \sin \omega t - \cos \omega t) \right]_0^{\pi} = \frac{V(e^{-jn\pi} + 1)}{2\pi(1-n^2)} \end{aligned}$$

当偶数  $n$  时,  $A_n = V/\pi(1-n^2)$ ; 当奇数  $n$  时,  $A_n = 0$ . 但是对于  $n=1$ ,  $A_n$  的表达式不能确定. 可以使用洛比达法则, 即分子和分母分别相对于  $n$  来微分, 然后使这个  $n$  趋近 1, 这样得到  $A_1 = -j(V/4)$ .

平均值为

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V}{2\pi} [-\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}$$

这样, 指数傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \cdots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + j \frac{V}{4} e^{-j\omega t} \\ &\quad + \frac{V}{\pi} - j \frac{V}{4} e^{j\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} - \cdots \end{aligned}$$

谐波幅值为

$$c_0 = A_0 = \frac{V}{\pi} \quad c_n = 2|A_n| = \begin{cases} 2V/\pi(n^2 - 1) & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ V/2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 3, 5, 7, \dots) \end{cases}$$

其线谱图画于图 17-27 中。

- 17.11 如果电流的傅里叶级数为  $i = 10\sin\omega t + 5\sin 3\omega t + 2\sin 5\omega t$  (A), 求电阻  $R = 10\Omega$  时的平均功率。

解 电流有效值为  $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64.5} = 8.05\text{A}$ 。则平均功率为  $P = I_{eff}^2 R = (8.05)^2 10 = 645\text{W}$

### 另一种方法

总的功率是各谐波功率之和, 各谐波功率由  $\frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos\theta$  算出。对于所有谐波, 电阻两端的电压和流过的电流是同相位, 即  $\theta_n = 0$ 。则

$$v_R = Ri = 100\sin\omega t + 50\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t$$

$$P = \frac{1}{2}(100)(10) + \frac{1}{2}(50)(5) + \frac{1}{2}(20)(2) = 645\text{W}$$

- 17.12 如果施加的电压和产生的电流如下, 求供给网络的平均功率。

$$v = 50 + 50\sin 5 \times 10^3 t + 30\sin 10^4 t + 20\sin 2 \times 10^4 t \quad (\text{V})$$

$$i = 11.2\sin(5 \times 10^3 t + 63.4^\circ) + 10.6\sin(10^4 t + 45^\circ)$$

$$+ 8.97\sin(2 \times 10^4 t + 26.6^\circ) \quad (\text{A})$$

解 总的平均功率是各谐波功率之和

$$P = (50)(0) - \frac{1}{2}(50)(11.2)\cos 63.4^\circ + \frac{1}{2}(30)(10.6)\cos 45^\circ + \frac{1}{2}(20)(8.97)\cos 26.6^\circ = 317.7\text{W}$$

- 17.13 求在题 17.12 施加的电压和电流条件下, 两个串联电路元件的常数。

解 在电压级数中含有一个常数项 50, 但在电流级数中没有相应的项, 这就表明其中一个元件是电容。由于电路消耗了功率, 另一个元件必定是电阻。

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(11.2)^2 + \frac{1}{2}(10.6)^2 + \frac{1}{2}(8.97)^2} = 12.6\text{A}$$

平均功率为:  $P = I_{eff}^2 R$ , 由此得  $R = 317.7/159.2 = 2\Omega$

在  $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$  时, 电流滞后电压  $45^\circ$ 。因此,

$$1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{\omega CR} \quad \text{或} \quad C = \frac{1}{(10^4)(2)} = 50\mu\text{F}$$

所以, 两个元件的串联电路是由一个  $2\Omega$  电阻和一个  $50\mu\text{F}$  的电容器组成的。

- 17.14 图 17-35 所示的电压波形施加到一个电阻和电感串联电路上,  $R = 2\text{k}\Omega$ ,  $L = 10\text{H}$ 。使用三角傅里叶级数求电阻两端的电压。画出提供的电压和电阻电压  $v_R$  的线谱图并说明电感对谐波的作用,  $\omega = 377 \text{ rad/s}$ 。

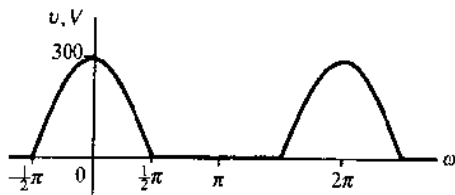


图 17-35

解 如题 17.5 所示求出该施加电压的平均值为  $V_{\max}/\pi$ 。

该波形是偶函数的波长, 因此级数中只包含  $\cos$  项, 其系数由下列积分计算得到

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n \omega t d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi/2 \quad (\text{V})$$

这里, 当  $n = 2, 6, 10, \dots$  时,  $\cos n\pi/2 = -1$ ; 当  $n = 4, 8, 12, \dots$  时,  $\cos n\pi/2 = +1$ 。而  $n$  为奇数时,  $\cos n\pi/2 = 0$ 。然而, 对于  $n = 1$ , 表达式的值不能确定, 要单独计算。



$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{300}{\pi} \left[ \frac{\omega t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2} \text{ V}$$

$$\text{这样, } v = \frac{300}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

表 17-3

$n$	$n\omega$ , rad/s	$R$ , k $\Omega$	$n\omega L$ , k $\Omega$	$Z_n$ , k $\Omega$	$\theta_n$
0	0	2	0	2	$0^\circ$
1	377	2	3.77	4.26	$62^\circ$
2	754	2	7.54	7.78	$75.1^\circ$
4	1508	2	15.08	15.2	$82.45^\circ$
6	2262	2	22.62	22.6	$84.92^\circ$

在表 17-3 中, 串联电路的总阻抗是对电压表达式中的每一次谐波计算得到的. 电流级数中的傅里叶系数是电压级数的系数除以  $Z_n$ . 电流项滞后电压项的相位角为  $\theta_n$ .

$$I_0 = \frac{300/\pi}{2} \text{ mA}$$

$$i_1 = \frac{300/2}{4.26} \cos(\omega t - 62^\circ) \text{ (mA)}$$

$$i_2 = \frac{600/3\pi}{7.78} \cos(2\omega t - 75.1^\circ) \text{ (mA)}$$

.....

电流级数为

$$i = \frac{300}{2\pi} + \frac{300}{(2)(4.26)} \cos(\omega t - 62^\circ) + \frac{600}{3\pi(7.78)} \cos(2\omega t - 75.1^\circ) - \frac{600}{15\pi(15.2)} \cos(4\omega t - 82.45^\circ) + \frac{600}{35\pi(22.6)} \cos(6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \text{ (mA)}$$

而电阻两端的电压为

$$v_R = Ri = 95.5 + 70.4 \cos(\omega t - 62^\circ) + 16.4 \cos(2\omega t - 75.1^\circ) - 1.67 \cos(4\omega t - 82.45^\circ) + 0.483 \cos(6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \text{ (V)}$$

图 17-36 清楚地显示了 10H 的串联电感减小电源电压的谐波幅值.

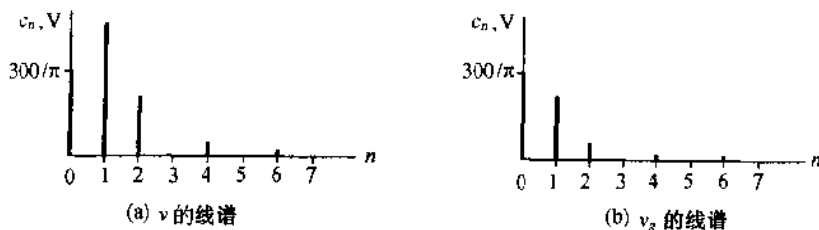


图 17-36

**17.15** 一个 10 mH 的电感中的电流波形示于图 17-37 中. 求电感两端电压的三角傅里叶级数, 设  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ .

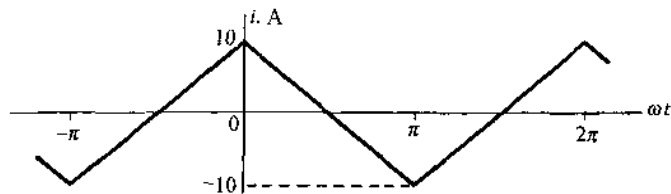


图 17-37

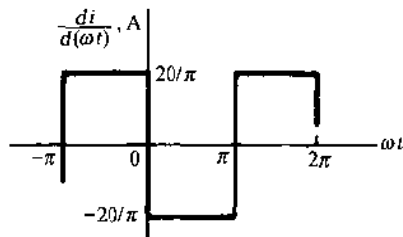


图 17-38

**解** 图 17-37 波形的导数图形画在图 17-38 中. 这个图恰恰是  $V = -20/\pi$  时的 17-18 图. 所以, 由题 17.1 可知

$$\frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{80}{\pi^2} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \text{ (A)}$$

$$\text{因此, } v_L = L \omega \frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{400}{\pi^2} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

### 补充习题

17.16 对于下列三角傅里叶级数的波形进行综合.

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$$

17.17 如果波形的傅里叶级数如下, 请进行综合.

$$f(t) = 5 - \frac{40}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right) + \frac{20}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots \right)$$

17.18 综合给定傅里叶级数的波形.

$$f(t) = V \left\{ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \omega t - \frac{1}{3\pi} \cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi} \cos 3\omega t - \frac{1}{15\pi} \cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi} \cos 5\omega t + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \sin 2\omega t + \frac{4}{15\pi} \sin 4\omega t - \dots \right\}$$

17.19 求图 17-39 所示锯齿波形的三角傅里叶级数, 并画出它的线谱图. 与例 17.1 比较.

$$\text{答案: } f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

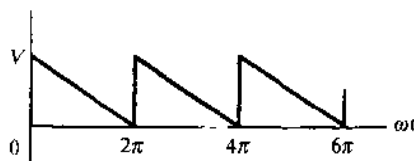


图 17-39

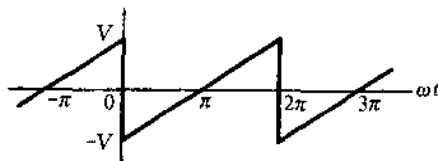


图 17-40

17.20 求图 17-40 所示锯齿波形的三角傅里叶级数并画出它的线谱图. 与例 17.3 比较.

$$\text{答案: } f(t) = \frac{-2V}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots \right)$$

17.21 求图 17-41 所示波形的三角傅里叶级数, 并画出它的线谱图.

$$\text{答案: } f(t) = \frac{4V}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right) - \frac{2V}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

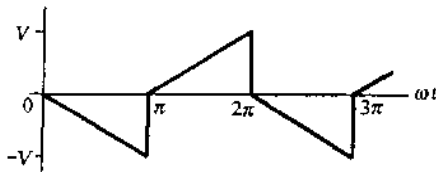


图 17-41

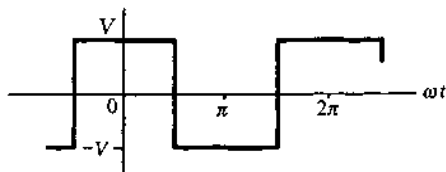


图 17-42

17.22 求图 17-42 所示方波三角傅里叶级数, 画出它的线谱图. 并与题 17.1 的结果进行比较.

$$\text{答案: } f(t) = \frac{4V}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right)$$

17.23 求图 17-43 所示波形的三角傅里叶级数. 画出它们的线谱图并进行比较.

答案: (a)  $f(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{10}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{12} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{12} \right) \sin n\omega t \right]$   
 (b)  $f(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{10}{n\pi} \left( \sin \frac{n5\pi}{3} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n5\pi}{3} \right) \sin n\omega t \right]$

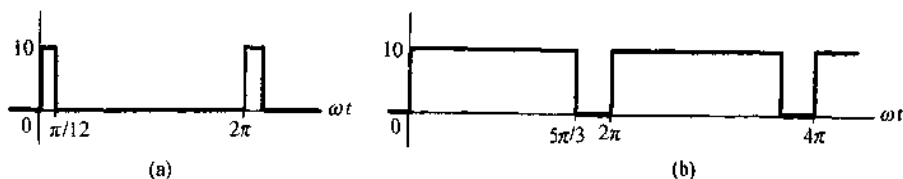


图 17-43

- 17.24 求图 17-44 所示半波整流正弦波的三角傅里叶级数, 并画出它的线谱图. 与题 17.5 和 17.6 的结果进行比较.

答案:  $f(t) = \frac{V}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$



图 17-44

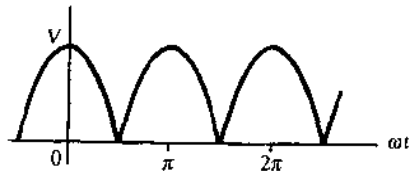


图 17-45

- 17.25 求图 17-45 所示全波整流正弦波的三角傅里叶级数, 并画出它的线谱图.

答案:  $f(t) = \frac{2V}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

- 17.26 图 17-46 中的波形是图 17-45 的波形移到原点后的波形. 求傅里叶级数并证明两者的线谱是相同的.

答案:  $f(t) = \frac{2V}{\pi} \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

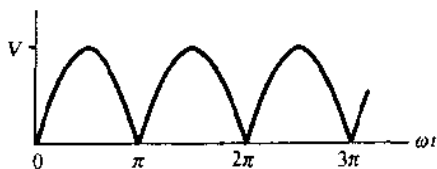


图 17-46

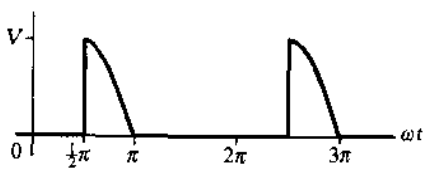


图 17-47

- 17.27 求图 17-47 所示波形的三角傅里叶级数.

答案:  $f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + n \sin n\pi/2) \cos n\omega t$   
 $+ \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{-nV \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \right] \sin n\omega t$

- 17.28 求图 17-48 所示波形的三角傅里叶级数. 将这个级数与题 17.27 的级数相加并将得到的结果和与题 17.5 得到的级数进行比较.

答案:  $f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V(n \sin n\pi/2 - 1)}{\pi(n^2 - 1)} \cos n\omega t$   
 $+ \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{nV \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \right] \sin n\omega t$

- 17.29 求图 17-49 所示波形的指数傅里叶级数并画出它的线谱图. 将得到的系数转换成三角级数的系数, 写出三角级数并与题 17.4 的结果比较.

答案:  $f(t) = V \left[ \dots - \left( \frac{1}{9\pi^2} - j \frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} - j \frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} - \left( \frac{1}{\pi^2} - j \frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right]$

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} + \dots$$

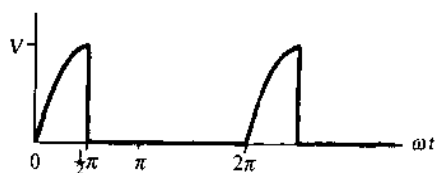


图 17-48

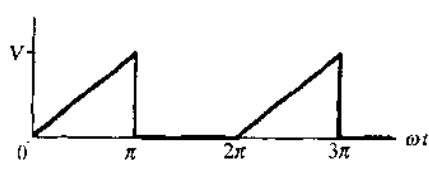


图 17-49

17.30 求图 17-50 所示波形的指数傅里叶级数,并画出它的线谱图。

$$\text{答案: } f(t) = V \left[ \dots + \left( \frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} + \left( \frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} + \left( \frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right]$$

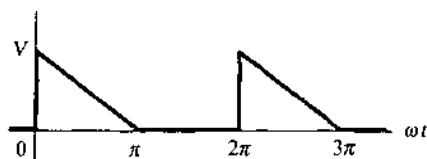


图 17-50

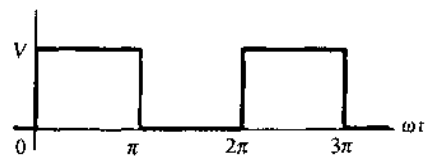


图 17-51

17.31 求图 17-51 所示方波的指数傅里叶级数并画出它的线谱图.将题 17.29 和 17.30 的指数级数相加所得之和与此题得到的级数相比较。

$$\text{答案: } f(t) = V \left( \dots + j\frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{\pi} e^{j\omega t} - j\frac{1}{3\pi} e^{j3\omega t} - \dots \right)$$

17.32 求图 17-52 所示锯齿波的指数傅里叶级数并画出它的线谱图.将得到的系数转换成三角级数的系数,写出三角级数并与题 17.19 得到的级数进行比较。

$$\text{答案: } f(t) = V \left( \dots + j\frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} + j\frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} - \dots \right)$$



图 17-52

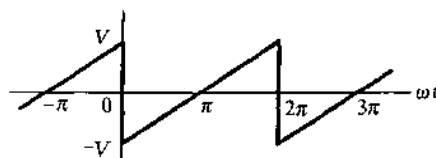


图 17-53

17.33 求图 17-53 所示波形的指数傅里叶级数,并画出它的线谱图.将题 17.20 所求的三角级数的系数转换成指数级数的系数,并将它们与此题得到的系数相比较。

$$\text{答案: } f(t) = V \left( \dots - j\frac{1}{2\pi} e^{-j2\omega t} - j\frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + j\frac{1}{\pi} e^{j\omega t} + j\frac{1}{2\pi} e^{j2\omega t} + \dots \right)$$

17.34 求图 17-54 所示波形的指数傅里叶级数,并画出它的线谱图.将得到的系数转换成三角级数的系数,写出三角级数并与题 17.21 得到的级数进行比较。

$$\text{答案: } f(t) = V \left[ \left( \frac{2}{9\pi^2} - j\frac{1}{3\pi} \right) e^{-j3\omega t} + \left( \frac{2}{\pi^2} - j\frac{1}{\pi} \right) e^{-j\omega t} + \left( \frac{2}{\pi^2} + j\frac{1}{\pi} \right) e^{j\omega t} \right. \\ \left. + \left( \frac{2}{9\pi^2} + j\frac{1}{3\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right]$$

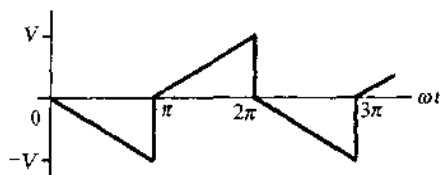


图 17-54

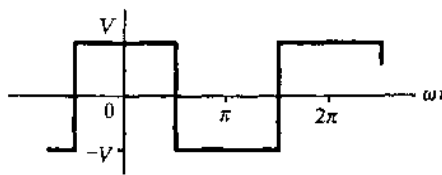


图 17-55

- 17.35 求图 17-55 所示方波的指数傅里叶级数并画出它的线谱图. 将题 17.22 中求得的三角级数的系数转换为指数级数的系数并与此题求得的结果比较.

$$\text{答案: } f(t) = \frac{2V}{\pi} \left( \dots + \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} - \frac{1}{3} e^{-j3\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \frac{1}{3} e^{j3\omega t} + \frac{1}{5} e^{j5\omega t} - \dots \right)$$

- 17.36 求图 17-56 所示波形的指数傅里叶级数并画出它的线谱图.

$$\text{答案: } f(t) = \dots + \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) e^{-j2\omega t} + \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} + \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) e^{j2\omega t} + \dots$$

- 17.37 求图 17-57 所示半波整流正弦波的指数傅里叶级数. 将系数转换为三角级数的系数, 并与题 17.24 的结果进行比较.

$$\text{答案: } f(t) = \dots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \frac{V}{4} e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \dots$$

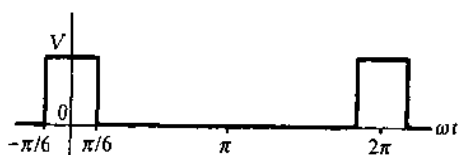


图 17-56

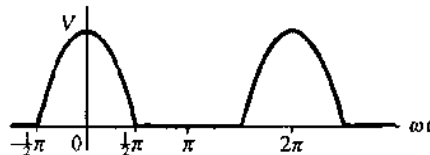


图 17-57

- 17.38 求图 17-58 所示全波整流正弦波的指数傅里叶级数并画出它的线谱图.

$$\text{答案: } f(t) = \dots - \frac{2V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \dots$$

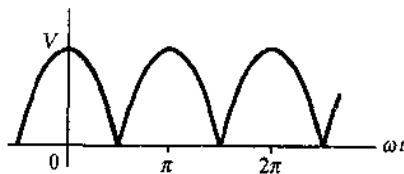


图 17-58

- 17.39 若加到一个无源网络的电压为  $v = 200 + 100\cos(500t + 30^\circ) + 75\cos(1500t + 60^\circ)$  (V), 而产生的电流为  $i = 3.53\cos(500t + 75^\circ) + 3.55\cos(1500t + 78.45^\circ)$  (A), 求提供给网络的电压有效值、电流有效值和平均功率.

$$\text{答案: } 218.5\text{ V}, 3.54\text{ A}, 250.8\text{ W}$$

- 17.40 加到一个无源网络两端的电压为  $v = 50 + 25\sin 500t + 10\sin 1500t + 5\sin 2500t$  (V), 产生的电流为

$$i = 5 + 2.23\sin(500t - 26.6^\circ) + 0.556\sin(1500t - 56.3^\circ) + 0.186\sin(2500t - 68.2^\circ) \text{ (A)}$$

求电压有效值、电流有效值和平均功率.

$$\text{答案: } 53.6\text{ V}, 5.25\text{ A}, 276.5\text{ W}$$

- 17.41 一个三元件的串联电路,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 5\text{ mH}$ ,  $C = 50\mu\text{F}$ , 施加电压  $v = 150\sin 1000t + 100\sin 2000t + 75\sin 3000t$  (V). 求电路的电流有效值和平均功率. 画出电压和电流的线谱图, 请注意串联谐振的作用.

$$\text{答案: } 16.58\text{ A}, 1374\text{ W}$$

- 17.42 一个二元件串联电路,  $R = 10\Omega$ ,  $L = 20\text{ mH}$ , 电流为  $i = 5\sin 100t + 3\sin 300t + 2\sin 500t$  (A), 求施加的电压有效值和平均功率.

$$\text{答案: } 48\text{ V}, 190\text{ W}$$

- 17.43 一个  $L = 10\text{ mH}$  的纯电感上有图 17-59 所示的三角波电流,  $\omega = 500\text{ rad/s}$ . 求电感两端电压的指数傅里叶级数. 并与题 17.8 的结果进行比较.

$$\text{答案: } v_L = \frac{200}{\pi^2} \left( \dots - j\frac{1}{3} e^{-j3\omega t} - je^{-j\omega t} + je^{j\omega t} + j\frac{1}{3} e^{j3\omega t} + \dots \right) \text{ (V)}$$

- 17.44 一个  $L = 10\text{ mH}$  的纯电感上施加有图 17-60 所示的电压波形,  $\omega = 200\text{ rad/s}$ . 求电感上的电流的三角级数并识别电流波形.

$$\text{答案: } i = \frac{20}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right) \text{ (A); 三角波}$$

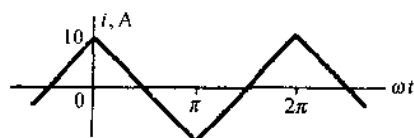


图 17-59

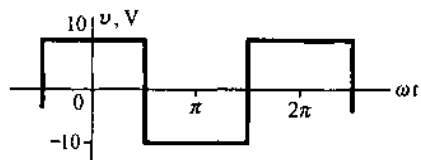


图 17-60

- 17.45 图 17-61 所示加到一个  $LC$  串联电路的全波整流正弦波形的电压的图形. 使用三角傅里叶级数求电感和电容两端的电压.

$$\text{答案: } v_L = \frac{4V_m}{\pi} \left[ \frac{2\omega L}{3\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)} \cos 2\omega t - \frac{4\omega L}{15\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)} \cos 4\omega t + \dots \right]$$

$$v_C = \frac{4V_m}{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3(2\omega C)\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)} \cos 2\omega t + \frac{1}{15(4\omega C)\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)} \cos 4\omega t - \dots \right]$$

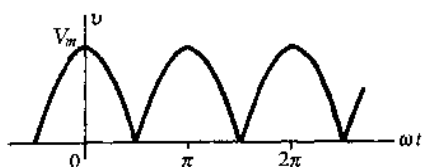


图 17-61

- 17.46 一个三元件电路, 由  $LC$  并联后再串联一个  $R = 5 \Omega$  的电阻组成. 在  $\omega = 500 \text{ rad/s}$  时,  $X_L = 2 \Omega$ ,  $X_C = 8 \Omega$ . 如果施加的电压为  $v = 50 + 20\sin 500t + 10\sin 1000t$  (V), 求电路的总电流.

$$\text{答案: } i = 10 + 3.53\sin(500t - 28.1^\circ) \text{ (A)}$$

## 附录 A 复数系统

### A1 复数

一个复数  $z$  是一个  $x + jy$  形式的数, 其中  $x$  和  $y$  为实数,  $j = \sqrt{-1}$ . 我们写成:  $x = \operatorname{Re} z$ , 为  $z$  的实数部分;  $y = \operatorname{Im} z$ , 为  $z$  的虚数部分. 当且仅当两个复数的实数部分相等, 虚数部分也相等时, 这两个复数才相等.

### A2 复数平面

具有标为  $\operatorname{Re} z$  的水平轴和  $j\operatorname{Im} z$  的垂直轴的一对坐标轴就确定了一个复数平面, 在这个平面中, 每一个复数都有一个惟一的点. 参见图 A-1, 图中有 6 个复数. 相同地, 每一个复数可以用在复平面上由原点出发的惟一的矢量来表示, 就如在图 A-1 中对复数  $z_6$  的表示一样.

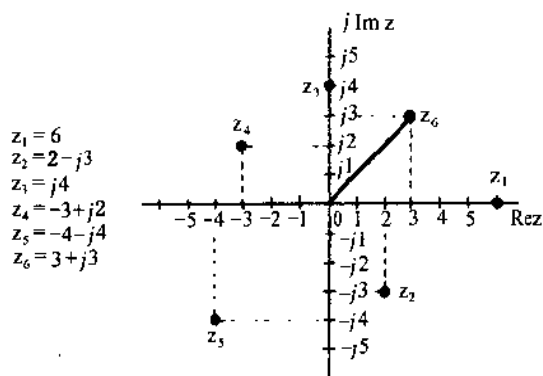


图 A-1

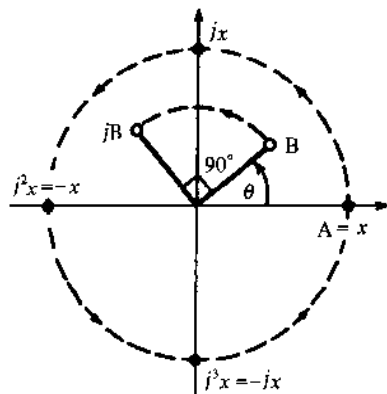


图 A-2

### A3 矢量算子 $j$

在 A-1 节中除了对  $j$  的定义外, 它还可以被看作是一个算子, 它使任意一个复数  $A$  (矢量) 以逆时针方向旋转  $90^\circ$ . 在图 A-2 中显示出  $A$  是一个纯实数  $x$  的情况. 这种旋转使  $A$  变为  $jx$ , 位于正虚轴上. 继续旋转,  $j^2$  使  $A$  旋转  $180^\circ$ ;  $j^3$  使  $A$  旋转为  $270^\circ$ ,  $j^4$  使  $A$  旋转为  $360^\circ$ . 在图 A-2 中也显示出在第一象限中有相角  $\theta$  的复数  $B$  的情况. 注意,  $jB$  在第二象限, 相角为  $\theta + 90^\circ$ .

### A4 复数的其他表示形式

在 A1 一节中复数被定义为正交形式. 在图 A-3 中,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 复数  $z$  可以写成如下三角形形式

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

这里  $r$  是模或绝对值 (一般符号为  $r = |z|$ ),  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 而角度  $\theta = \tan^{-1}(y/x)$  是  $z$  的幅角.

根据欧拉公式可得,  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ , 允许用另一种复数表达方式, 也叫指数形式

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta = re^{j\theta}$$

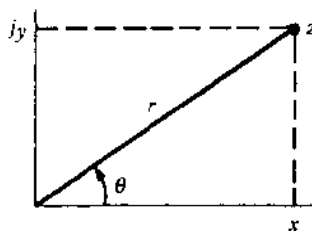


图 A-3

在电路分析中广泛使用的第三种形式是极坐标或 Steinmetz 形式,  $z = r \angle \theta$ . 这里的  $\theta$  一般用度数作单位.

### A5 复数的和与差

两个复数相加, 实数部分和虚数部分分别相加. 两个复数相减, 实数部分和虚数部分分别相减. 从实际的角度看, 两个复数都采用正交形式时, 复数的加法和减法实现起来最方便.

例 A1 给定  $z_1 = 5 - j2$ ,  $z_2 = -3 - j8$ ,

$$z_1 + z_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$$

$$z_2 - z_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$$

### A6 复数乘法

当两个复数都是指数形式时, 复数的乘法遵循指数定律并且直接相乘

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

很明显, 采用极坐标形式时, 复数乘法可参考指数形式

$$z_1 z_2 = (r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

正交形式的复数乘积可以用处理两个复数的二次多项式的方法求得

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

例 A2 如果  $z_1 = 5e^{j\pi/3}$  及  $z_2 = 2e^{-j\pi/6}$ , 则  $z_1 z_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$ .

例 A3 如果  $z_1 = 2 \angle 30^\circ$  及  $z_2 = 5 \angle -45^\circ$ , 则  $z_1 z_2 = (2 \angle 30^\circ)(5 \angle -45^\circ) = 10 \angle -15^\circ$ .

例 A4 如果  $z_1 = 2 + j3$  及  $z_2 = -1 - j3$ , 则  $z_1 z_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$

### A7 复数除法

以指数形式的两个复数, 它们的商可由指数定律直接得到

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

除法的极坐标形式可参考指数形式得到

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

两个正交形式的复数除法使用分子和分母同乘分母的共轭复数(见 A8 节)的方法进行

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \left( \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \right) = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

例 A5 给定  $z_1 = 4e^{j\pi/3}$  及  $z_2 = 2e^{j\pi/6}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$$

例 A6 给定  $z_1 = 8 \angle -30^\circ$  及  $z_2 = 2 \angle -60^\circ$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 \angle -30^\circ}{2 \angle -60^\circ} = 4 \angle 30^\circ$$

例 A7 给定  $z_1 = 4 - j5$  及  $z_2 = 1 + j2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2} \left( \frac{1 - j2}{1 - j2} \right) = -\frac{6}{5} - j\frac{13}{5}$$

### A8 一个复数的共轭值

复数  $z = x + jy$  的共轭值是复数  $z^* = x - jy$ . 这样,



$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2j} \quad |z| = \sqrt{z z^*}$$

在复平面中, 点  $z$  和  $z^*$  是关于实数轴的镜面映射.

指数形式:  $z = re^{j\theta}$ ,  $z^* = re^{-j\theta}$ .

极坐标形式:  $z = r \angle \theta$ ,  $z^* = r \angle -\theta$ .

三角形式:  $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ ,  $z^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$ .

共轭复数有下列性质

$$(i) (z^*)^* = z$$

$$(iii) (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$(ii) (z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

$$(iv) \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$



$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A$  的共轭矩阵是

$$A^* \equiv \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & a_{m3}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix}$$

如果  $A = (A^*)^T$  则矩阵  $A$  是 Hermitian 矩阵; 也就是一个厄米特矩阵是一个在主对角线上为实数元素的方阵, 并且共轭复数元素位于关于主对角线的镜面映象的位置上. 注意,  $(A^*)^T = (A^T)^*$ .

非奇异矩阵: 如果存在一个  $n \times n$  的方阵  $B$  使得

$$AB = BA = I$$

则这个  $n \times n$  的方阵  $A$  是非奇异矩阵(或可逆矩阵). 这里  $I$  是  $n \times n$  的单位阵. 矩阵  $B$  称为非奇异矩阵  $A$  的逆矩阵, 我们写作  $B = A^{-1}$ . 如果  $A$  是非奇异的,  $B1$  节的矩阵方程  $Y = AX$  对于任意的  $Y$  有惟一的解答

$$X = A^{-1}Y$$

### B3 矩阵算术运算

#### 矩阵的加法和减法

两个相同阶数的矩阵适合于加法或减法运算, 两个不同阶数的矩阵不能作加法或减法运算.

两个  $m \times n$  阶矩阵  $A = [a_{ij}]$  和  $B = [b_{ij}]$  的和(差)是  $m \times n$  阶矩阵  $C$ ,  $C$  阵的每一个元素都是  $A$  和  $B$  阵的相应元素的和(差). 这样,  $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$ .

**例 B1** 如果

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

两个矩阵的和(差)的转置是两个转置矩阵的和(差)

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

#### 矩阵的乘法

一个  $1 \times m$  的矩阵  $A$  和一个  $m \times 1$  的矩阵  $B$  的乘积  $AB$  是一个  $1 \times 1$  的矩阵  $C \equiv [c_{11}]$ , 这里:

$$C = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} \quad a_{12}b_{21} \quad a_{13}b_{31} \quad \cdots \quad a_{1m}b_{m1}] = \left[ \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} \right]$$

注意,行矩阵的每一个元素都与列矩阵的相应元素相乘后再将乘积求和.通常,我们用标量  $c_{11}$  来标识  $C$ ,把它作为由  $A$  和  $B$  的元素所属的数域中取来的数进行处理.

一个  $m \times s$  的矩阵  $A = [a_{ij}]$  和一个  $s \times n$  的矩阵  $B = [b_{ij}]$  的乘积  $AB$  是一个  $m \times n$  的矩阵  $C = [c_{ij}]$ , 这里

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n)$$

### 例 B2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 19 & 10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

只有当  $A$  的列数等于  $B$  的行数时,矩阵  $A$  与矩阵  $B$  才适合相乘,即乘积  $AB$  有定义.这样,如果  $A$  是  $3 \times 2$  矩阵,  $B$  是  $2 \times 5$  矩阵,则乘积  $AB$  有定义,但  $BA$  无定义.如果  $D$  和  $E$  是  $3 \times 3$  矩阵,则  $DE$  和  $ED$  都有定义.然而,不一定有  $DE = ED$ .

两个矩阵乘积的转置等于两个矩阵转置取反序的乘积

$$(AB)^T = B^T A^T$$

如果  $A$  和  $B$  是相同维数的非奇异矩阵,则  $AB$  也是非奇异的,有

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

### 一个矩阵与标量的乘法

一个矩阵  $A = [a_{ij}]$  与一个标量  $k$  的乘积由下式定义

$$kA = Ak = [ka_{ij}]$$

即  $A$  的每一个元素都乘以  $k$ . 注意下列的性质

$$k(A+B) = kA + kB \quad k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad (kA)^T = kA^T$$

### B4 一个方阵的行列式

附属于任意一个  $n \times n$  矩阵的  $A = [a_{ij}]$  是  $a_{ij}$  的一个确定的标量函数,称为  $A$  的行列式.这个数标记为

$$\det A \quad \text{或} \quad |A| \quad \text{或} \quad \Delta_A \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这里,最后一种形式非常明显由  $A$  的元素组成.对于  $n=1$  和  $n=2$  阶的行列式,显然有

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

对于较大的  $n$ ,类似的表达式变得非常麻烦,通常使用拉普拉斯的展开定理(见下面)来避

免这种表达式,用这样一种方式定义行列式是非常重要的.

对任意两个  $n \times n$  矩阵  $A$  和  $B$  有

$$\det AB = (\det A)(\det B)$$

行列式的另两个基本性质为

$$\det A^T = \det A \quad \det kA = k^n \det A$$

最后,当且仅当  $A$  是非奇异矩阵时,  $\det A \neq 0$ .

**例 B3** 用下列矩阵验证行列式的乘法法则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

**解** 

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{bmatrix}$$

以及

$$\begin{vmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{vmatrix} = 2(27+2\pi) - (9+4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

确实,  $90 + 20\pi = (-10)(-9 - 2\pi)$ .

### 拉普拉斯展开定理

一个  $n$  阶行列式的元素  $a_{ij}$  的余子式  $M_{ij}$  为  $n-1$  阶行列式,由去掉  $a_{ij}$  所在的行和列得到. 元素  $a_{ij}$  的余因子  $\Delta_{ij}$  定义为

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

拉普拉斯定理描述为:在方阵  $A$  的行列式中,第  $p$  行(列)的每一个元素乘以第  $q$  行(列)的相应元素的余因子,再对乘积求和.若  $p \neq q$ ,则结果为 0,若  $p = q$ ,结果为  $\det A$ .

根据拉普拉斯定理,如果矩阵  $A$  有两行或两列相同,则  $\det A = 0$  ( $A$  必定为一个奇异阵).

### 用行列式求矩阵的逆阵

#### 克莱姆法则

拉普拉斯定理可以作为矩阵乘法,其说明如下

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

或

$$A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = (\det A)I$$

这里,  $\text{adj}A \equiv [\Delta_{ji}]$  是矩阵  $A$  的行列式中  $a_{ji}$  的余因子的转置矩阵,  $I$  是  $n \times n$  单位矩阵.

如果  $A$  是非奇异的, 可以用 1 去除以  $\det A \neq 0$ , 并推导出

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$$

这表明线性系统  $Y = AX$  的惟一解为

$$X = \left( \frac{1}{\det A} \text{adj}A \right) Y$$

这是克莱姆法则的矩阵形式.

通常, 用考虑矩阵解的第  $r$  行的方法求得行列式的形式. 由于  $\text{adj}A$  的第  $r$  行为

$$[\Delta_{1r}, \Delta_{2r}, \Delta_{3r}, \dots, \Delta_{nr}]$$

有

$$\begin{aligned} x_r &= \left( \frac{1}{\det A} \right) [\Delta_{1r}, \Delta_{2r}, \Delta_{3r}, \dots, \Delta_{nr}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{\det A} \right) (y_1 \Delta_{1r} + y_2 \Delta_{2r} + y_3 \Delta_{3r} + \dots + y_n \Delta_{nr}) \\ &= \left( \frac{1}{\det A} \right) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(r-1)} & y_1 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(r-1)} & y_2 & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(r-1)} & y_n & a_{n(r+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

对给定的行列式的第  $r$  列使用拉普拉斯定理可以验证最后的等式.

## B5 方阵的特征值

对于一个线性系统  $Y = AX$ , 具有  $n \times n$  的特征矩阵  $A$ , 对研究产生合适的“响应” $Y$  的“激励” $X$  非常重要. 令  $Y = \lambda X$ ,  $\lambda$  为标量,

$$\lambda X = AX \quad \text{或} \quad (\lambda I - A)X = 0$$

这里,  $O$  是  $n \times 1$  的零矩阵. 如果矩阵  $(\lambda I - A)$  是非奇异的, 只存在无效解  $X = Y = O$ . 因此, 对于有效解,  $\lambda$  的值必须使  $\lambda I - A$  为奇异矩阵, 即必须有

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

这个含  $\lambda$  的多项式方程的  $n$  个根是矩阵  $A$  的特征值; 相应的有效解  $X$  是  $A$  的特征向量.

在上述的特征方程的左边令  $\lambda = 0$ , 我们看到方程中的常数项一定为

$$\det(-A) = \det[(-1)A] = (-1)^n (\det A)$$

因为方程中  $\lambda^n$  的系数明显为 1, 所以常数项也等于  $(-1)^n$  与所有根的乘积. 一个方阵的行列式是它的所有特征值的乘积——从另一方面讲, 这是非常有用的行列式定义.

## 附录 C 来自 Schaum 的电子教师指南的计算机屏幕举例

这本书有一个 Schaum's Electronic Tutor (电子教师)指南,它使用 Mathcad®(MathSoft 软件),是为帮助你更容易地学习课程内容而设计的.电子教师使用 Mathcad 专门计算软件的 LIVE-MATH 环境,在你的计算机屏幕上给出大约 100 道本书中的有代表性的习题及解答,连同有理论要点的总结并与电子学相互参考并紧密联系.下面几页重现了屏幕上来自电子教师的一个典型示例,会帮助你理解这个电子学习工具的强大功能.将这些屏幕上的例子与本书相关习题及解答进行比较(相应的页号列于每个习题的开始)以了解如何完成其它习题.

在 Schaum 的电子教师指南中,你会在你的计算机屏幕上发现对一个特定求解问题的所有相关文本、图表和方程.正如在以下几页看到的,所有的数学问题都以熟悉的符号出现,包括单位.你可以注意到在打印的 Schaum's Outline 和 Electronic Tutor 之间格式的差别,它们被设计为鼓励你与这些材料进行交互,或者帮助你更换解决问题的方法.

如同看到的下面几页,在屏幕上显示的每一个数字,公式和图表都是完全交互的.你可以改变问题的起始参数并且对新的输出图进行计算;你可以改变任何方程并且立即看到数值计算对答案的影响.你看见的每一个方程、图表和数字对于实验都是有用的.每个适合解答的问题都可以变成“激活”状态,以便于你修改以解答许多相关的问题. Electronic Tutor 指南将帮助你学习和掌握本书所教的内容,你也可以作为一个习题解答工具来使用它.

在右侧显示的 Mathcad 图象是通过 Schaum's Outline 打印的,用来指示在 Electronic Tutor 中发现的问题.

### 平均功率和能量(Schaum's 电路,第三版,习题解答 1.3)

叙述:一个线性元件,电流为  $i(t, \omega)$ ,  $\omega$  是角频率.元件两端的电压差为  $v(\omega, t)$ .求在正弦函数的一个周期中传递的能量  $W_T$  和平均功率  $P_{avg}$ .

$$\text{系统: mA:} = 10^{-3} \cdot \text{amp} \quad \text{mW:} = 10^{-3} \cdot \text{watt} \quad \text{Hz} \equiv \frac{1}{\text{sec}}$$

参数:电流和电压的幅值

$$(I_0): = 2.5 \cdot \text{mA} \quad V_0: = 45 \cdot \text{volt}$$

$$\text{假设频率:} \quad \omega: = 1 \cdot \text{Hz}$$

$$i(t): = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad v(t): = V_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

解:电流和电压有相似的随时间变化的正弦波形.当两者相乘时(功率 =  $vi$ )时间变量为

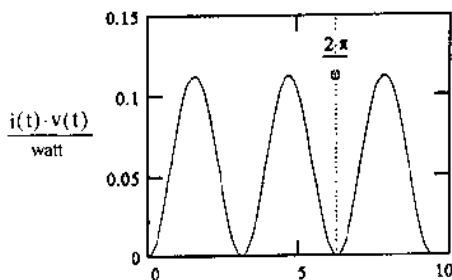
$$t: = 0 \cdot \text{sec}, \frac{1}{\omega} \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

能量是这个曲线下的面积,或者为瞬时功率  $v \cdot i$  的一个周期的积分

$$W_T: = \int_{0 \cdot \text{sec}}^{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} v(t) \cdot i(t) dt$$

$$W_T: = 0.353 \cdot \text{焦尔}$$

平均功率是能量除以一个周期的时间.



® Mathcad 是 MathSoft 公司的注册商标.

$$P_{avg} = \frac{W_T}{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} \quad P_{avg} = 56.25 \cdot \text{mW}$$

试着改变频率的值, 注意一个周期的能量在变化(短的周期有较少的能量), 但是  $P_{avg}$  独立于  $\omega$ , 因此是一个常数. 平均功率与正弦波形的幅值有关

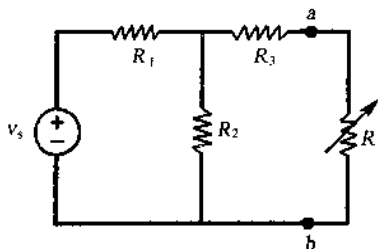
$$P_{avg} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \quad P_{avg} = 56.25 \cdot \text{mW}$$

试着求解积分代数来验证为什么这样是对的.

### 最大功率传输理论(Schaum's 电路, 第三版, 习题解答 4.16)

叙述: 求可调电阻  $R$  的值, 使得在下面所示的电路中  $a$ 、 $b$  两端得到的最大功率传输.( 当一个电阻可调时, 称做一个电位计或分压器).

系统:



参数

$$\Omega \equiv \text{ohm}$$

$$V_s = 100 \cdot \text{volt}$$

$$R_1 = 10 \cdot \Omega \quad R_2 = 15 \cdot \Omega \quad R_3 = 5 \cdot \Omega$$

解答: 首先得到除分压器  $R$  电路的戴维宁等效电路. 在题 4.6 中也显示了相同的方法. 戴维宁(开路)等效电压为

$$V' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_s \quad V' = 60 \cdot \text{volt}$$

戴维宁等效电路电阻为

$$R' = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad R' = 11 \cdot \text{ohm}$$

应用第 4 章最大功率传输理论, 最大功率传输  $P(R)$  发生在  $R = R'$  时. 这样最大功率传输为

$$P_{\max} = \frac{V'^2}{4 \cdot R'} \quad P_{\max} = 81.818 \cdot \text{watt}$$

为了解题方便, 可以用网络简化的方法求出电阻  $R$  两端的功率降, 如题 4.7 所示. 得到的功率表达式为

$$P(R) = \frac{\left[ \frac{V_s \cdot R_2 \cdot R}{[R_1 \cdot (R + R_3 + R_2) + R_2 \cdot R + R_2 \cdot R_3]} \right]^2}{R}$$

画出对于  $R$  的多个值的表达式的曲线图, 可以看出峰值为

$$R = 1 \cdot \Omega \dots 60 \cdot \Omega$$

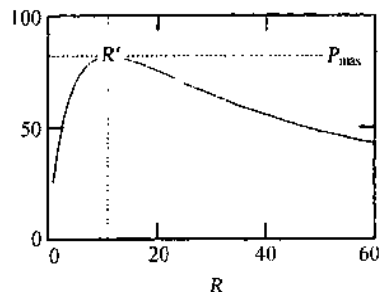
现在你可以看到最大功率传输理论的应用. 网络简化可以使用导数从而得到一个最大的值, 但是这个方法比戴维宁等效电路的方法要花费更多的时间.

### 理想放大器电路中的反馈(Schaum's 电路, 第三版, 例 5.4)

叙述: (a) 求作为开环增益  $k$  的函数  $v_2/v_1$ . (b) 计算对于  $k = 100$  和  $1000$  时的  $v_2/v_1$  并比较其结果.

系统参数:

$$k\Omega \equiv 10^3 \cdot \Omega$$





$$R_1 := 1 \cdot k\Omega$$

$$R_2 := 5 \cdot k\Omega$$

**解答:** (a) 理想放大器是图中 A 和 B 节点右侧电路的一部分, 反馈电阻  $R_2$  由开路替换. 加上反馈电阻控制放大器的整个增益. 因为

$$v_2 = -k \cdot v_1 \quad \text{或} \quad v_1 = \frac{-v_2}{k}$$

对节点 A 应用 KCL 方程得到

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{\left(\frac{-v_2}{k} - v_s\right)}{R_1} + \frac{\left(\frac{-v_2}{k} - v_2\right)}{R_2} = 0$$

使用 Mathcad 的符号处理器可以容易地解出  $v_2$ . (如果你正使用 Mathcad Engine 则没有这部分). 如何使用符号处理器中更多的信息, 请见 A Mathcad Tutorial.

$$v_2 = v_s \cdot \frac{-R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)} \quad \frac{v_2}{v_s} = \frac{-R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)}$$

比例项

$$b := \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{则:} \quad b = 0.167$$

将增益  $v_2/v_s$  重写为

$$G_{neg} = \frac{v_2}{v_s} \quad (\text{负号表示负增益})$$

$$G_{neg}(k) := (1 - b) \cdot \frac{-k}{1 + b \cdot k}$$

(b) 给定  $k$  值, 增益为

$$k_1 := 100 \quad G_{neg}(k_1) = -4.717$$

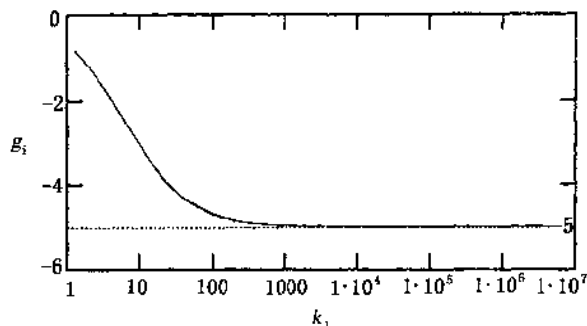
$$k_2 := 1000 \quad G_{neg}(k_2) = -4.97$$

可以看出,  $k$  增长 10 倍, 增益  $v_2/v_s$  仅适度变化

$$\frac{G_{neg}(k_2) - G_{neg}(k_1)}{G_{neg}(k_1)} = 5.368 \cdot \%$$

我们也可以通过研究  $k$  与  $v_2/v_s$  之间的函数曲线进一步考察这一点.

$$i := 1..70 \quad k_i := 10 \frac{i}{10} \quad g_i := G_{neg}(k_i)$$



注意, 当  $k$  的值非常大时,  $v_2/v_s$  趋近于  $-R_2/R_1$

$$G_{neg}(\infty) = -5$$

所以, 带有反馈的电路, 只要  $k$  不是很小, 其总的增益对于  $k$  的变化并不敏感.

## 电容器两端建立直流电压(Schaum's 电路, 第三版, 习题解答 7.7)

**叙述:**下图所示的电路中, 开关在  $t = 0$  时刻闭合, 此时电容器有电荷  $Q_0$ , 其极性如图所示. 求  $t > 0$  时的  $i$  和  $q$ , 并画出  $q$  的图形.

**系统**

**参数:**

$$R: = 1 \cdot \text{k}\Omega$$

$$V_s: = 50 \cdot \text{伏特}$$

$$C: = 20 \cdot \mu\text{F}$$

$$Q_0: = 500 \cdot \mu\text{C}$$

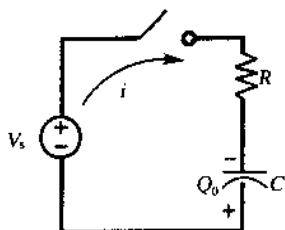
$$\text{k}\Omega \equiv 10^3 \cdot \text{欧姆}$$

$$\mu\text{F} \equiv 10^{-6} \cdot \text{法拉第}$$

$$\mu\text{C} \equiv 10^{-6} \cdot \text{库仑}$$

$$\text{ms} \equiv 10^{-3} \cdot \text{秒}$$

$$\text{mA} \equiv 10^{-3} \cdot \text{安培}$$



**解答:**我们知道, 对于  $t > 0$ ,  $i$ ,  $C$  和  $v$  (电容两端电压) 之间的关系是

$$i = C \cdot \frac{d}{dt}v$$

对于  $t > 0$ , 回路的 KVL 方程为

$$V_s = R \cdot i + v(t) = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt}v + v$$

$$\frac{d}{dt}v + \frac{v}{R \cdot C} = \frac{V_s}{R \cdot C}$$

在初始条件下的  $v_c$  为

$$v(0 \cdot \text{ms}) = \frac{-Q_0}{C} \quad (\text{负号是由于相对电流方向所指示的极性})$$

以下特定的解答(或强制解)满足微分方程, 但没有初始条件.

$$v_p(t) = V_s$$

这个特定解是正确的, 因为在  $t = \infty$  时, 电流将为 0, 并且在电阻  $R$  两端没有电压降. 相似的解(或自然响应)为

$$v_h(t) = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

将它们相加并且调整幅值  $A$  使总的解答  $v_p + v_h$  满足这两个方程.

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_s + A \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right)$$

由初始条件, 我们得到  $A$  的值为

$$v(0 \cdot \text{ms}) = \frac{-Q_0}{C} = V_s + A \quad \frac{-Q_0}{C} = -25 \cdot \text{伏特}$$

$$A: = \frac{-Q_0}{C} - V_s$$

因此

$$v(t) = \left(\frac{-Q_0}{C} - V_s\right) \cdot \exp\left(\frac{-t}{R \cdot C}\right) + V_s$$

由此得到

$$q(t): = C \cdot v(t) \quad \text{及} \quad i(t): = \frac{d}{dt}q(t)$$

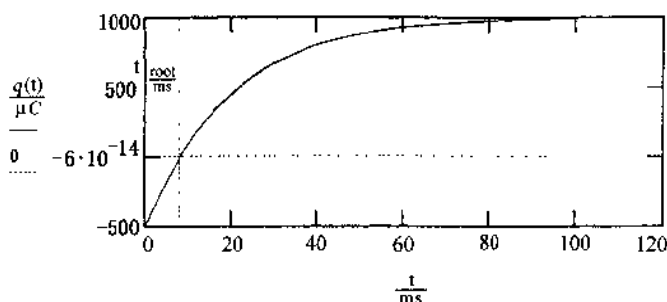
下面, 我们画出  $q(t)$ ,  $i(t)$ ,  $v(t)$  的图形. 为了求得  $q = 0$  的点(曲线通过  $x$  轴的交点), 使用 A Mathcad Tutorial 中描述的根函数.

假设

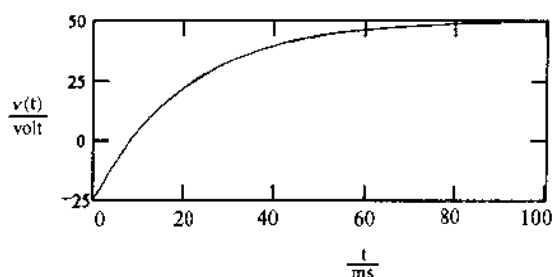
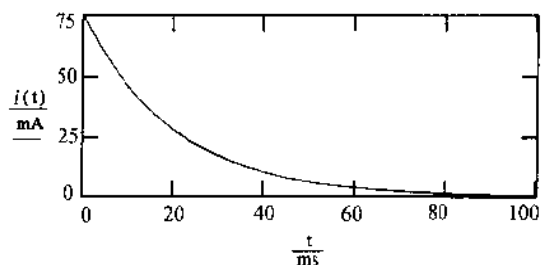
$$t_{\text{root}}: = 5 \cdot \text{ms}$$

$$t_{root} := \text{root}(v(t_{root}), t_{root}) \quad t_{root} = 8.109 \cdot \text{ms}$$

$$t := 0 \cdot \text{sec}, \dots 2 \cdot R \cdot C \dots 5 \cdot R \cdot C$$



前面的图显示了在  $t=0$  由特定的起始值充电到连接的电压源所指示的电荷. 由于这两种电荷的极性相反, 如图中所示, 曲线通过零点.



和频率有关的阻抗 (Schaum's 电路, 第三版, 习题解答 8.11)

叙述: 求下图所示电路的阻抗  $Z_{in}(s)$ ,  
 $0 < s < \infty$ . 画出对数尺度的幅值和相角图.

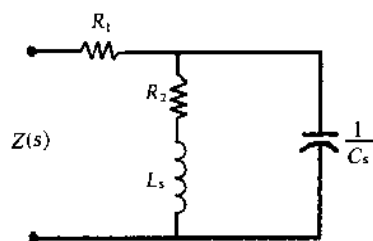
系统

参数:

$$R_1 := 2 \cdot \Omega \quad L := 2 \cdot \text{亨利}$$

$$R_2 := 2 \cdot \Omega \quad C := .25 \cdot \text{法拉}$$

解答: 使用标准网络简化方法, 求电路的等效阻抗.



$$Z_{in}(s) := \left[ R_1 + \frac{(R_1 + L \cdot s) \cdot \left( \frac{1}{C \cdot s} \right)}{(R_1 + L \cdot s) + \frac{1}{C \cdot s}} \right]$$

$$Z_{in}(s) := \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot s + R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + R_1 + R_2 + L \cdot s)}{(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1)}$$

使用符号处理器简化该表达式。(如果你正使用 Mathcad Engine, 就没有这个选项。)

$$Z_{in}(s) := \frac{[R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + (R_1 \cdot R_2 \cdot C + L) \cdot s + R_1 + R_2]}{(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 + 1)}$$

分子和分母都除以 LC。

$$Z_{in}(s) := \frac{\left( R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C} \right)}{\left( s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right)}$$

(a)  $s = 0$  时

$$Z_{in} \left( 0, \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right) = 4 \cdot \Omega$$

这是对直流电源的阻抗表达式。正如在第 7 章所讨论的, 在直流电源下, 电容相当于开路, 电感相当于短路。保留的阻抗是两个串联的电阻。

(b)  $s = j4 \text{ rad/sec}$  时

$$Z_{in} \left( j \cdot 4 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right) = 2.038 - 1.132j \cdot \text{欧姆}$$

对于向量形式,

$$\left| Z_{in} \left( j \cdot 4 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right) \right| = 2.331 \cdot \text{欧姆}$$

$$\arg \left( Z_{in} \left( j \cdot 4 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right) \right) = -29.055 \cdot \text{度}$$

这是电源为  $\sin(4t)$  或  $\cos(4t)$  时的阻抗。

(c) 根据观察,  $Z_{in}(\infty) = 2\Omega$ 。为了说明该点, 将阻抗表达式的每一项都除以  $s^2$ 。分母带有  $s$  和  $s^2$  的项其极限都是零, 只剩下  $R_1$  项。

$$Z_{in}(s) := \frac{\left( R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C \cdot s} + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C \cdot s^2} \right)}{\left( 1 + \frac{R_2}{L \cdot s} + \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2} \right)} \quad R_1 = 2 \cdot \Omega$$

也可以用符号处理器计算  $s$  趋于  $\infty$  时  $Z_{in}$  的极限值。(如果你正使用 Mathcad Engine, 就没有这个选项。)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left( R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C} \right)}{\left( s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} \right)} \quad \text{得到 } R_1$$

在第 12 章讨论过, 在非常高的频率下, 电容器如同短路跨接在 RL 支路两端。

让我们研究一下阻抗和相位对频率的依赖性。为了弄清  $s$  值在较宽范围变化的情况, 我们创建一个在对数尺度基础上的等间隔变化的范围:

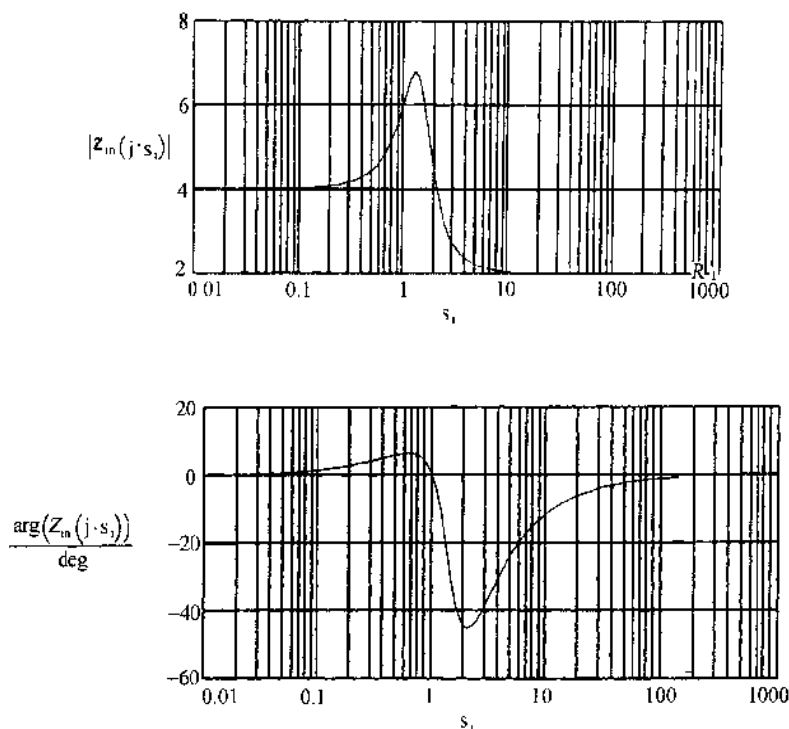
$$\text{画图的最小值} \quad S_{low} := .01 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\text{画图的最大值} \quad S_{high} := 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\text{点数} \quad N := 100 \quad i := 0..N-1$$

$$\text{步长} \quad r := \log \left( \frac{S_{low}}{S_{high}} \right) \cdot \frac{1}{N} \quad r = -0.04$$

$$\text{变化的范围} \quad s_i := S_{high} \cdot 10^{i \cdot r}$$



电容的行为从一种极限情况变化到另一种极限情况是比较有趣的. 某些谐振频率使阻抗达到一个最大值特性, 其他的频率响应和谐振的内容将在第 12 章叙述.

#### 方波的傅里叶级数(Schaum's 电路, 第三版, 习题解答 17.1 和 17.8)

**叙述:** (a) 求下面所示以  $T$  为周期的方波的三角傅里叶级数并画出它的线谱图. 使用傅里叶系数重构时间域波形. (b) 求指数傅里叶级数的傅里叶系数, 并和三角傅里叶系数进行比较.

**系统**

**参数:**

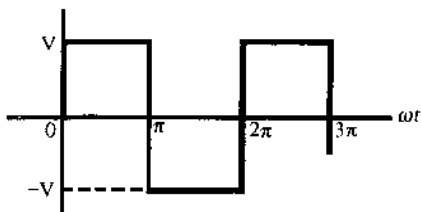
$$T = 2 \cdot \pi \quad V = 10 \cdot \text{伏特}$$

**解答:** (a) 在间隔  $0 < \omega t < \pi$  内,  $f(t) = V$ ; 在  $\pi < \omega t < 2\pi$  内,  $f(t) = -V$ . 注意, 因为这个波形在每个周期内具有有限个间断点, 所以它满足第 17 章中的狄里赫莱特条件. 波形的平均值是零, 因此  $a_0/2 = 0$ . 对写出的函数进行积分得到  $\cos$  项的系数:

$$a_0 = 0 \cdot \text{伏} \quad \text{由于平均值是零.}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) d(\omega \cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) d(\omega \cdot t) \right]$$

将  $u = \omega \cdot t$  代入, 得



编者注: 注意在 Mathcad 中, 相量, 或虚数都可以采用指数形式,  $Ae^{j\theta}$ , 或正交形式. 当计算机计算一个虚数答案时, 总是用正交形式显示, 但是幅度和相位可以很容易扩展, 如上面所示, 使用  $\parallel$  和  $\arg()$  算子. 同时也要注意, 在这里矩阵转换是自动进行, 所以, 在 Schaum's 的印刷版本中使用的行列式和子矩阵是不需要的.

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \cos(n \cdot u) du + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \cos(n \cdot u) du \right]$$

从符号菜单中选择负载符号处理器,选择上面完整的表达式,以及评估符号。(如果你使用的是 Mathcad Engine,将没有这些选择.)

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V - \frac{\sin(n \cdot T)}{n} \cdot V \right] = 0 \cdot \text{伏}$$

你可能会预料到这个结果,由于这个波形是关于原点对称的,因此傅里叶级数应该只包含 sin 项.

用积分计算处理 sin 项

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) d(\omega \cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) d(\omega \cdot t) \right]$$

将  $u = \omega \cdot t$  代入

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot u) du + \int_{\frac{T}{2}}^T (-V) \cdot \sin(n \cdot u) du \right]$$

再计算表达式并化简,得出

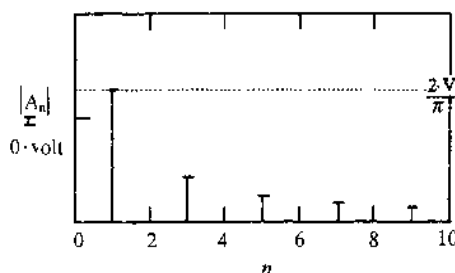
$$b_n := \frac{2}{T} \cdot \left[ -2 \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V + \frac{1}{n} \cdot V + \frac{\cos(n \cdot T)}{n} \cdot V \right]$$

$$A_0 := 0 \text{ 伏}$$

$$A_n = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 -V \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} d(\omega \cdot t) + \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} d(\omega \cdot t) \right]$$

代入:  $u = \omega \cdot t$

$$A_n := \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 -V \cdot e^{-j \cdot n \cdot u} du + \int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot e^{-j \cdot n \cdot u} du \right]$$



现在,可以准备画出线谱图.

注意,幅值已经用来显示系数的大小,不是它们的复数值.

这个线谱图仅仅显示了正频率下的幅值.结合在  $+n$  和  $-n$  下的值产生相同的线谱,如上面在(a)部分所画的图形.

三角级数的系数可以求出

$$n := 0 \dots n_{\max}$$

cos 系数是

$$a_n := 2 \cdot \operatorname{Re}(A_n) \quad a^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \text{ 伏}$$

如前, sin 的系数为

$$b'_n := -2 \cdot \operatorname{Im}(A_n)$$

用系数  $b_n$  定义前 10 次谐波幅值

$$n_{\max} \equiv 10 \quad n \equiv 1 \dots n_{\max} \quad c_n := \sqrt{(b_n)^2}$$

由于  $a_n$  是零,因此在表达式中去掉了它,现在就可以画出线谱图.

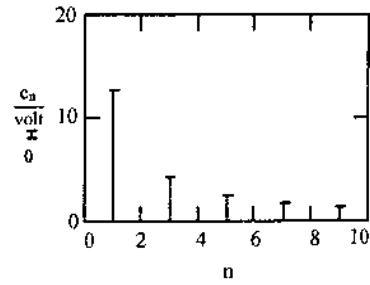
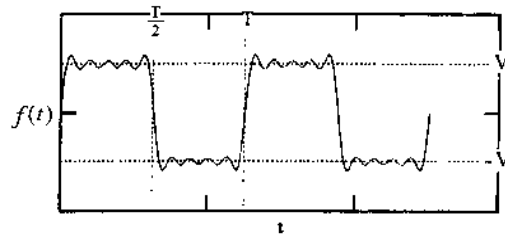
扫描类型“误差”用于产生谱线.为此,要将系数和零线都要画出,并为它们选择扫描类型误差.对于选择画图特性的更多信息,请见 A Mathcad Tutorial.

这个级数仅含有  $\sin$  项的奇次谐波(偶次项是零). 可以由波形对称性的检查预料到. 半波对称性仅由奇次谐波组成. 如果我们移动了波形的原点, 级数可能由  $\cos$  项组成, 但是在线谱图中仍然只有奇次谐波项. 进行实验并观察结果.

为了确信这些项的级数并产生一个方波, 下面重构这个波形.

$$f(t) = \sum_n b_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot t}{T}\right)$$

$$t: = 0, .01 \cdot T \dots 2 \cdot T$$



你可以看到用有限项近似一个需要无限  $n$  的波形的作用. 试看改变  $n_{\max}$  的值来看看得到的近似波形变好还是变坏.

(b) 在间隔  $-\pi < \omega t < 0$  内,  $f(t) = -V$ ; 在  $0 < \omega t < \pi$ ,  $f(t) = V$ . 波形是关于原点对称的. 因此,  $A_0 = 0$  并且  $A_n$  将是纯虚数.

$$\hat{b}^T = (0 \quad 12.732 \quad 0 \quad 4.244 \quad 0 \quad 2.546 \quad 0 \quad 1.819 \quad 0 \quad 1.415 \quad 0) \text{ 伏}$$

和初始值进行比较:

$$b^T = (0 \quad 12.732 \quad 0 \quad 4.244 \quad 0 \quad 2.546 \quad 0 \quad 1.819 \quad 0 \quad 1.415 \quad 0) \text{ 伏}$$